Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов

МАТЕМАТИКА 10

Методическое пособие
учебника по предмету Математика для 10 класса общеобразовательных школ

Замечания и предложения, связанные с этим изданием, просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az.
Заранее благодарим за сотрудничество!

Radius
Баку-2017

Оглавление

1. Функции

2. Точка, прямая и плоскость в простарانстве

3. Тригонометрические функции угла

4. Теоремы синусов и косинусов

5. Тригонометрические функции

6. Многогранники

7. Тригонометрические уравнения

8. Объёмы пространственныхных фигур

9. Показательная и логарифмическая функции

10. Комплексные числа

11. Информация и прогноз

Используемые условные обозначения

Содержательный стандарт

Навыки, приобретённые учащимися

Необходимые теоретические материалы

Необходимые начальные знания

Примеры обучающих заданий

Дополнительные материалы

Моменты требующие внимания

Вопросы для рефлексии

Домашнее задание

Задания для оценивания

Решение некоторых заданий из учебника

Словарь

Структура учебника

В учебнике для реализации навыков по стандартам содержательных линий Числа и действия, Алгебра и функции и Измерения предусмотрены 6 разделов:

- Функции,
- Показательная и логарифмическая функция,
- Тригонометрическая функция произвольного угла,
- Тригонометрические функции,
- Тригонометрические уравнения и неравенства,
- Комплексные числа.

Для реализации навыков по стандартам содержательных линий Геометрия и Измерения, предусмотрены 4 раздела:

- Точка, прямая и плоскость в пространстве
- Многогранники
- Объёмы пространственных фигур
- Теорема синусов и косинусов

Для реализации навыков по стандартам содержательной линии Статистика и вероятность предусмотрены уроки, объединённые под общим названием

- Прогнозирование информации

Стандарты содержательной линии Измерения реализованы на протяжении всего учебника в виде упражнений и прикладных заданий.

Между содержательными линиями ожидалась горизонтальная интеграция. Например, в разделе функции и тригонометрические функции представлены задачи, которые тесно связаны как с содержательной линией Статистика и вероятностью, так и с содержательной линией Измерения.

Принципы нового подхода к обучению. Каждый урок, на котором вводится новые понятия построен по следующей структуре.

1. Исследовательские задания и практическая работа, охватывающие начальные математические знания, необходимые для нового понятия.

2. Определение математического понятия или формула.

3. Обучающие задания, построенные на определение или формуле.

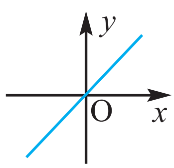
4. Простые задания прикладного характера, обусловленные на определении или формуле.

5. Творческие задания, построенные на определении, запись формулы математической модели для задач, взятых из реальной жизненной ситуации.

Подходы для реализации каждого содержательного стандарта построены на основе навыков соответствующих куррикулуму. Поэтому, подход к новым понятиям в учебнике, в корне отличается от подхода, которые представлены в учебниках, основанных на простом запоминании. Например, при изучении относительно сложной темы преобразование функций, вводится понятие “семейства функций”, что приводит к достаточно простому и интересному случаю. Так, наиболее часто используемые функции объеденены в одно семейство - одну группу и, в общем виде даны графики и свойства основной функции. (Учебник стр.23). Для каждой функции из одного семейства (функция $y = x^2 + 1$ принадлежит семейству $y = x^2$) дано объяснение преобразования основной функции в виде графика, формулы или словами.

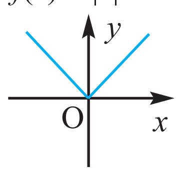
Тождественная функция

$f(x) = x$



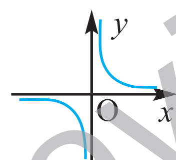
Модульная функция

$f(x) = |x|$



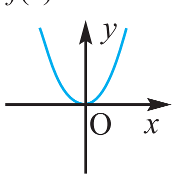
Рациональная функция

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



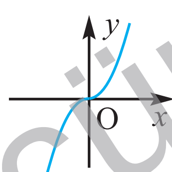
Квадратичная функция

$f(x) = x^2$



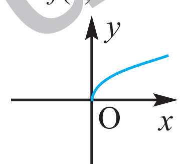
Кубическая функция

$f(x) = x^3$



Функция квадратного корня

$f(x) = \sqrt{x}$



Параллельный перенос, и также отражение, расстяжение (сжатие) графиков представлены в виде графика, формулы и словесно. Подход такого вида развивает пространственное и творческое мышление учащихся, и даёт возможность более глубже осознать понятие преобразования функций. При применении этой темы к тригонометрическим функциям, ученик, достаточно хорошо зная как выполняются преобразования, уже выполняет их более внимательно. Теперь он понимает каждый шаг преобразования, его влияние на события в задачах из реальной жизни и может объяснить их смысл.

Уроки по изучению тригонометрических функций также в корне отличаются от уроков, основанных на запоминании. Так, для вычисления тригонометрической функции любого угла, вместо запоминания формул приведения, необходимых для вычислений, с первых уроков вводятся понятия единичной окружности и острого угла, при помощи которых создаётся возможность вычисления для любого угла. Учащиеся понимает, что зная значения тригонометрических функций углов в первой четверти 0º-90º , они смогут найти тригонометрическую функцию любого угла. На этих уроках задания выполняются, не при помощи формул, а геометрически, что даёт возможность координировать навыки, охватывающие более обширные знания.

Для обучения тригонометрическим, показательным и логарифмическим функциям представлены группы задач, моделирующих эти функции в реальной жизни. Показывается возможность смоделировать при помощи тригонометрической функции ситуации основанные на периодическом механическом движении. Например, с лёгкостью можно увидеть, что детская карусель в парке может считаться моделью единичной окружности. Можно найти расстояние от земли до кабинки (ось *y, синус)*, где находится человек в любой момент времени, смоделировав при помощи тригонометрической функции. Также для более ясного представления связи между градусной и радианной мерой угла были введены ряд физических задач, описывающих события для решения которых необходимо находить линейную и угловую скорости. Ученик понимает, что относительная стабильность происходящих в природе процессов связана с периодическими событиями. Для этого представлены задачи, где при помощи тригонометрической функции смоделирована зависимость между количеством хищников и их жертв.

Для развития кругозора учащихся, при решении задач на показательную функцию, экспоненциально возрастающих или убывающих ситуаций, в учебнике представлены интересные задачи из разных областей науки, например, экологии и археологии. Учащиеся знакомятся с глобальными проблемами человечества. Они узнают о вреде радиоактивного распада веществ (изотопов полония и т.д.). Радиоактивный распад держит людей в страхе перед ядерной войной. Вместе с тем узнают об открытии Углерода 14, за которое была присуждена Нобелевская премия. При помощи этого открытия можно устанавливать возраст ископаемых. Учащиеся должны уметь моделировать соответствующую экспоненциальную формулу по описанию. Вместе с тем, рассматриваются и знакомые ситуации, например изменение температуры воды. Экспоненциальный рост ещё чаще рассматривается в аспекте решения экономических задач, на примере сложного процентного роста.

Логарифмическая функция изучается на примерах задач в которых надо найти уровень pH жидкости, мощности звука и амплитуды землетрясения.

Выражение конкретной жизненной ситуации в виде математической модели играет важную роль при для формирования навыков когнитивности, таких как - сопоставления, творческого мышления, выражение собственного мнения в различных формах.

Уроки содержательной линии геометрии созданы в соответствии с возрастом учащихся таким образом, чтобы они могли легко усваивать понятия и выполнять задания. Для формирования геометрических представлений задания в основном представлены на готовых чертежах. В учебнике достаточным образом представлены задания на непосредственное применение геометрических определений и формул.

В методическом пособии для учителя для многих уроков представлены дополнительные рабочие листы.

Методические рекомендации для организации урока.

Представленные для каждого урока упражнения должны быть рассмотрены и сгруппированы заранее.

Простые задания для непосредственного применения понятий и формул.

Более сложные задания расширенные внутрипредметной интеграцией для непосредственного применения понятий и формул.

Простые текстовые задачи для непосредственного применения заданных формул в реальной жизненной ситуации.

Задачи, которые требуют поэтапного решения проблемы реальной жизненной ситуации для непосредственного применения формулы.

Планируется как будут использоваться упражнения по ходу урока.

Этап мотивации: в качестве мотивации (проблеммной ситуации)для обсуждения может быть представлена одна из задач, возникшая в реальной жизненной ситуации. Определяются данные и необходимая информация, формируются мнения о путях решения.

После объяснения концепции решения вопроса задание может быть выполнено на данном уроке или при необходимости на следующем уроке.

Обучение (объяснение нового урока): определения,формулы, доказательства.

Изучение определения, формулы: определение и формулы непосредственно применяется в упражнениях.

Расширение знаний и умений: простые прикладные задания

Применение и творчество: математическое моделирование реальной ситуации

Оценивание: декларативные знания, процедуральные знания, когнитивное умение.

В качестве примера представлены два показательных урока -

Показательная функция $y = a^x$ (МПУ. стр.193) ,

а также урок по содержательной линии Геометрия

Сечение призмы плоскостью (МПУ. стр.146) .

В методическом пособии для учителя особое внимание уделяется навыкам учащегося по каждому содержательному стандарту. Полезно, при подготовки к каждой новой теме, давать домашнее задание для диагностического оценивания начальных знаний и навыков.

Приведены примерные задания по каждому разделу для малого суммативного оценивания. Для каждого раздела представлено достаточно много заданий и многие из них даны без ответов. Таким образом можно внести определённые изменения и сделать их многовариантными. В большом количестве представлены примеры заданий для большого суммативного оценивания, что также помогает облегчить работу по комплектации вопросов.

Виртуальные графокалькуляторы.

https://www.desmos.com/calculator

http://www.meta-calculator.com/online/

http://my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html

https://mathway.com/graph

1. Функции

Таблица планирования

<table>
<tr><th>Содержательный стандарт</th><th>№ урока</th><th>Тема</th><th>Количество часов</th><th>Учебник стр.</th></tr>
<tr><td rowspan="12">2.2. Знает понятие функции, строит математические модели реальных проблем и решает их, при помощи свойств функций.
2.2.1.Знает определение числовой функции и способы её задания, понимает понятия области определения и множества значений функции.
2.2.2. Знает понятие графика функции, устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций и умеет преобразовывать графики.
2.2.3. Знает понятия сложной функции и обратной функции и находит обратную функцию для некоторых функций.
2.2.5 Знает определение и свойства степенной функции и строит её график.</td><td>1,2</td><td>Функция и способы задания функций.</td><td>2</td><td>7-11</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Область определения и множество значений некоторых функций.</td><td>1</td><td>12-13</td></tr>
<tr><td>4,5</td><td>Свойства функций. Чётная функция. Нечётная функция.</td><td>2</td><td>14-19</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Кусочно-заданная функция.</td><td>1</td><td>20-21</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Степенная функция $y = x^n$ $(n \in N)$.</td><td>1</td><td>22</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Классификация функций.</td><td>1</td><td>23, 24</td></tr>
<tr><td>9-11</td><td>Преобразование графиков.</td><td>3</td><td>25-31</td></tr>
<tr><td>12</td><td>Действия над функциями.</td><td>1</td><td>32, 33</td></tr>
<tr><td>13, 14</td><td>Сложная функция.</td><td>2</td><td>34-36</td></tr>
<tr><td>15, 17</td><td>Обратная функция. Обобщающие задания.</td><td>3</td><td>37-42</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Функции. Суммативное оценивание.</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Всего</td><td>18</td><td></td></tr>
</table>

Урок 1-3. Учебник стр. 7-13 Функция и способы задания функций. Область определения и множество значений некоторых функций. 3 часа.

Содержательный стандарт

2.2. <u>Знает понятие функции</u>, строит математические модели реальных проблем и решает их, при помощи свойств функций

2.2.1.Знает определение числовой функции и способы её задания, понимает понятия области определения и множества значений функции.

2.2.2. <u>Знает понятие графика функции</u>, устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций и умеет преобразовывать графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

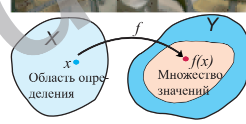
Рабочие листы

- *определяет различными способами является ли зависимость между двумя величинами функцией*
- *знает различные способы задания функций и применяет их при решении задач*
- *определяет область определения и множество значений функции*
- *применяет некоторые способы нахождения области определения и множества значений для функции заданной в аналитическом виде*

Математический словарь

- функция
- область определения, множество значений
- пара значений
- граф зависимости
- таблица значений
- график функции

Является ли функцией или нет.



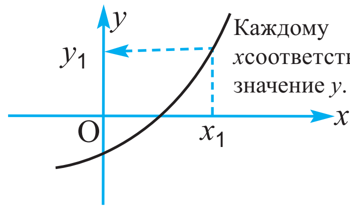
На 1-ом уроке главное внимание уделяется формированию умения определить, является или нет зависимость функцией. Обобщаются знания учащихся о функциях. Функция определяется как соответствие и правила по которому оно задаётся. Обсуждается следующее определение функции “*если каждому элементу x из множества X, по определённому правилу ставится в соответствие определённое и единственное значение y из множества Y, то такое соответствие называется функцией.*”. Вводятся обозначения D(f) и E(f).

Представьте, что в классе 25 стульев и 20 учеников. Каждый ученик выбирает и садится на одно из мест. Каждому ученику соответствует одно место. Один ученик не может одновременно сидеть на двух местах. Это самый простой пример функции из реальной жизни. Значению x ставится в соответствие единственное значение y. Учащиеся образуют множество X и это множество является областью определения функции, стулья образуют множество Y и это множество является множеством значений функции.

Является или нет зависимость между двумя величинами функцией возможно определить при помощи графа зависимости, таблицы значений или по графику. Для формирование и развитие навыков используются задания, представленные в учебнике и дополнительные рабочие листы.

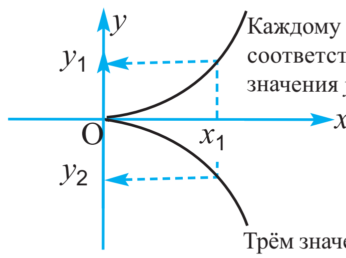
Рассматриваются зависимости сгруппированные в 4 категории.

Взаимно-однозначное соответствие.
В этом случае, каждому значению *x* ставится в соответствие одно значение *y*.



Каждому значению *x*соответствует одно значение *y*.

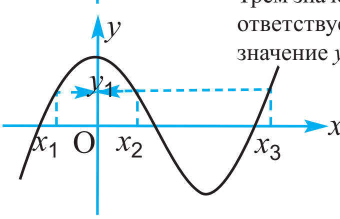
Соответствие одного значения нескольким.
В этом случае одному значению *x* ставится в соответствие больше одного значения *y*.



Каждому значению *x* соответствует два значения *y*.

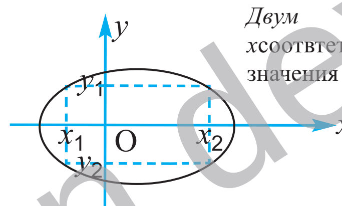
Соответствие нескольких значений одному.
В этом случае как минимум двум значениям *x* соответствует одно значение *y*.

Трём значениям *x* соответствует одно значение *y*.



Соответствие нескольких значений нескольким.
В этом случае, как минимум двум значениям *x* *соответствует как минимум два значения y.*

Двум значениям *x*соотвтетствует два значения *y*.

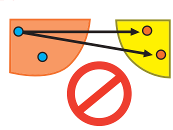


Какие из данных зависимостей можно назвать функцией, а какие нет. Проводится обсуждение. Представленная выше информация может быть представлена в виде слайдов или плаката.

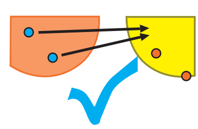
! **Обратите внимание!**

Случай, соответствия одного значения нескольким или нескольких значений нескольким не является функцией.

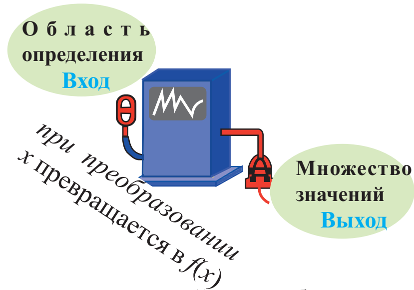
Не является функцией!



Является функцией!



Функцию можно представить как машину. При этом каждое заданное значение на входе(области определения), принимает одно значение на выходе (множество значений).То есть функция f, каждое значение x, по определённому правилу(работы машины) преобразовывает в значения $f(x)$ (образовывая множество значений).



$f: x \to f(x)$

Например, функция $f: x \to 3x + 2$ преобразовывает x “на два больше утроенного произведения”. Ограничив область определения можно вычислить эти преобразования.

Например, при значениях $1 \le x \le 4$, $x \in Z$ значения $f(x)$ будут:

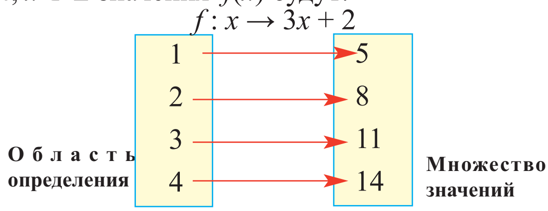
$f(1) = 3 + 2 = 5$

$f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$f(3) = 3 \cdot 3 + 2 = 11$

$f(4) = 3 \cdot 4 + 2 = 14$

Построим диаграмму соответствующей зависимости.

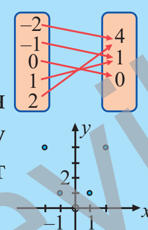


Способы задания функции. Внимание уделяется умению преобразовывать функцию из одного вида в другой. Рекомендуется выполнять упражнения, которые формируют навыки составления таблицы значений, задание графа зависимости, задание аналитической формулы или описания функции, заданной графически.

Например, ученик должен показать как он для значений {–2; –1; 0; 1; 2} из области определения функции $y = x^2$ может составить граф зависимости и отметить соответствующие точки на координатной плоскости.

$y = x^2$

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Эта зависимость является функцией, т.к. каждому значению x соответствует единственное значение y.

Решение некоторых заданий из учебника

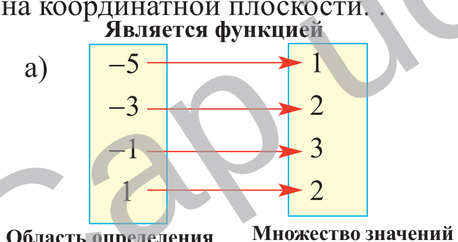
У.2. Определите является ли зависимость, заданная множеством точек функцией или нет.

а) {(–5; 1), (–3; 2), (–1; 3), (1; 2)} б) {(0; 4), (3; 5), (5; –2), (0; 1)}

Для выполнения заданий такого типа, учащимся рекомендуется данные пары координат точек изобразить либо при помощи графа зависимости или на координатной плоскости. .

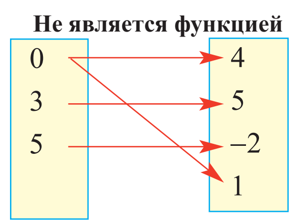
Является функцией

а)



Не является функцией

б)



Рабочий лист № 1

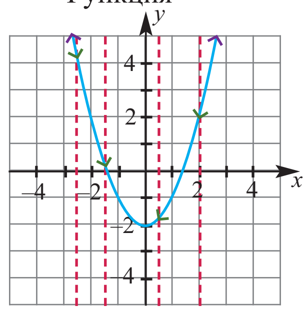
Имя _____ Фамилия______ Дата________

1) “При помощи вертикальных линий можно определить является или нет изображение графиком функции.” а) Объясните своё мнение: ___________________________

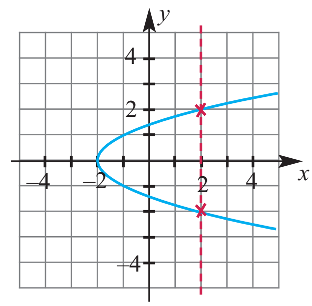
____

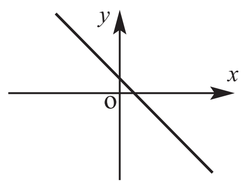
____

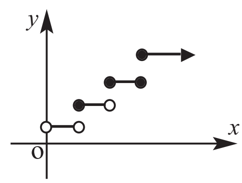
Функция

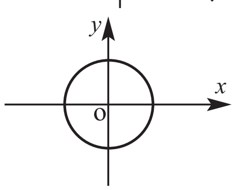


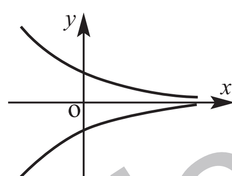
Не является функцией







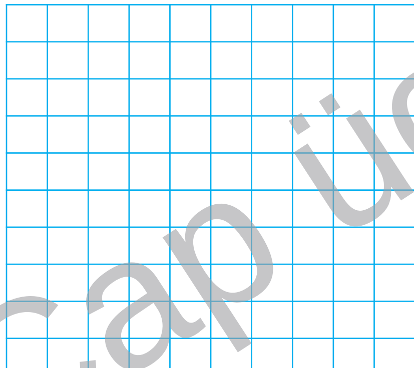


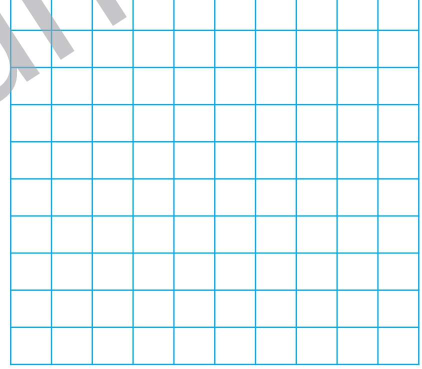


2) Отметьте точки на координатной плоскости и определите является ли зависимость функцией.

а) {(3; 1), (1;2), (2; 3), (1; 4)}

б) {(2; 2), (1; 1), (3; 3), (4, 5)}

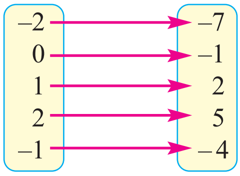




Рекомендуется выполнять задания в которых надо задать формулу функции по графу зависимости или по таблице. Рассмотрим следующие задания.

✔ **По графу зависимости:** а) Запишите область определения и множество значений функции; б) Отметьте точки на координатной плоскости; в) Определить формулу функции.

$f: X \to Y$

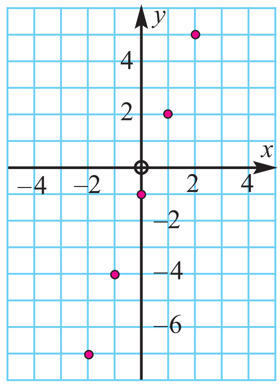


Область определения:

$\{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Множество значений:

$\{-7; -4; -1; 2; 5\}$



Отметим эти значения на координатной плоскости. Видно, что все точки лежат на одной прямой. Значит, функция задаётся формулой вида $y = kx + b$.

$$k = \frac{5-2}{2-1} = 3$$

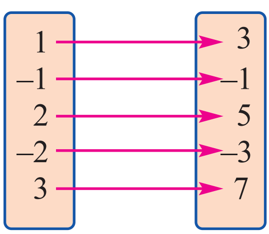
Так как точка, с координатами (0; –1) является точкой пересечения с осью *y,* то $b = -1$. Тогда, функция задаётся формулой: $f(x) = 3x - 1, \ -2 \le x \le 2,$ $x \in Z$

Рабочий лист № 2

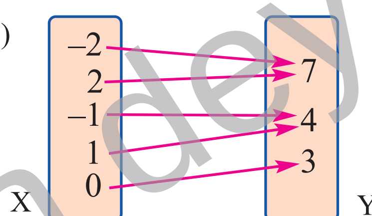
Имя _____ Фамилия______ Дата_________

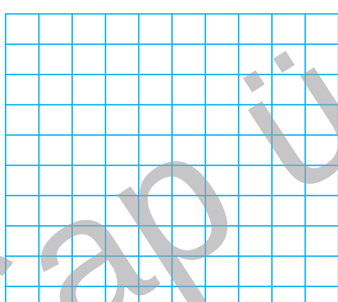
Для функции *f*, заданной графом зависимости выполните следующее:
а) запишите область определения функции *f* в) постройте график функции *f*
б) запишите множество значений функции *f* г) запишите формулу функции *f*

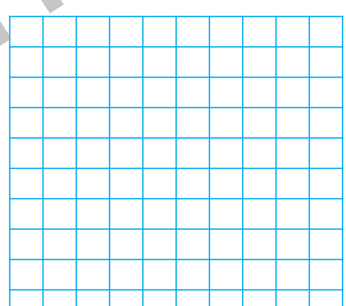
а)



б)

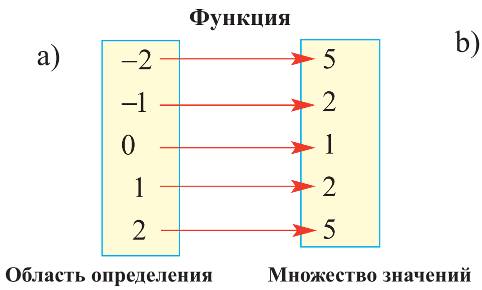




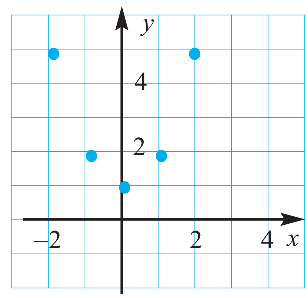


По заданной формуле: для аргументов {–2;–1; 0;1; 2} функции $y = x^2 + 1$: а) задайте граф зависимости; б) перечислите пары значений и покажите их на координатой плоскости.

а)



b)



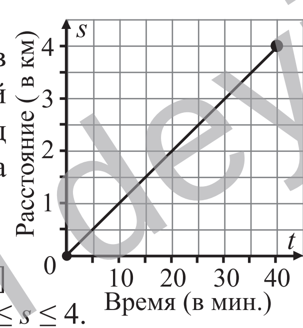
$f(x) = x^2+1$

Обращается внимание на то, чтобы каждый учащийся мог определить является зависимость функцией или нет, а также умел представить функцию в различных видах. Помимо упражнений в учебнике, рекомендуется использовать рабочие листы. Выполняются упражнения,формирующие навыки учащихся определять область определения и множество значений функций,описывающих реальную жизненную ситуацию. В учебнике для этой цели используется упражнение У.22.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.22 1) Дилара в течении 40 минут совершала пробежку, пробегая 1км за 10 минут.

Дилара за минуту пробегала 0,1 км. Умножив эту скорость на время, можно найти путь, который она пробежала в любой момент за данный период времени. Расстояние, которое преодолела Дилара можно смоделировать функцией $s(t) = 0{,}1t$, где s - расстояние (в км), t - затраченное время (в мин.).Область определения функции [0; 40] или интервал $0 \le t \le 40$. Множество значений $0 \le s \le 4$.



При этом учащиеся должны понять, что графики представляющие реальную жизненную ситуацию чертят на ограниченном интервале.

Закрашенный кружок показывает, что в данной ситуации данная точка принадлежит графику.

Пустой кружок, в данной ситуации показывает, что точка не принадлежит графику.

Стрелка на конце графика означает, что в данном направлении график продолжается до бесконечности.

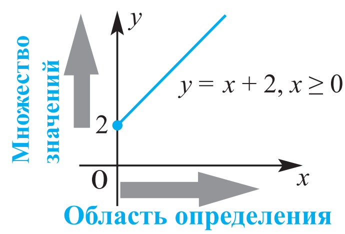
Обсуждения направлены на развитие навыков рассуждений.

При этом особое внимание следует уделить умению логически верно выбрать область определения функции, моделирующей реальную ситуацию. Например, выбрать такую ситуацию, чтобы областью определения были как положительные, так и отрицательные числа(изменение температуры) или как измениться область определения, множество значений и график функции в предыдущей задаче, если вместо 40 минут взять 30 или 50 минут?

Ученики самостоятельно выполняют задания, отражающие функциональные зависимости трёх различных ситуаций, для которых они определяют область определения, множество значений, задают формулу и строят графики.

Область определения и множество значений функции. Учащиеся выполняют задания на нахождение области определения и множества значений функции, заданной графически.

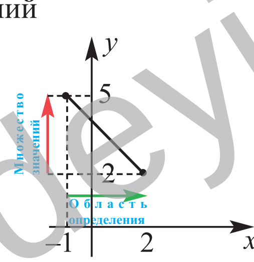
Для того, чтобы яснее увидеть область определения и множество значений функций рекомендуется строить их графики. Это показано на следующих примерах.



1) Найдём область определения и множество значений функции $y = 2 + x$, $x \geq 0$. Область опережения функции все действительные числа не меньше 0, т.е. множество $[0; +\infty)$.

Как видно по графику, множество значений функции промежуток $[2; +\infty)$.

2) Найдём область определения и множество значений функции $y = 4 - x$, $-1 \leq x \leq 2$.



Графиком данной функции является отрезок прямой $y = 4 - x$, $-1 \leq x \leq 2$.

Область определения: $[-1; 2]$.

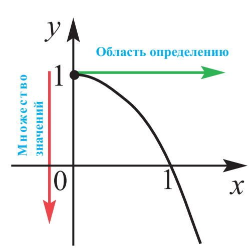
При $x = -1$ $y = 5$, при $x = 2$ $y = 2$

Так,как $-1 \leq x \leq 2$, то $1 \geq -x \geq -2$ и

$4+1 \geq 4-x \geq 4-2$ $5 \geq 4-x \geq 2$ т.е. $2 \leq y \leq 5$

По графику видно, что множество значений есть отрезок [2;5].

3) Найдём область определения и множество значений функции $y = 1 - x^2$, $x \geq 0$.



Область определения функции $x \geq 0$, т.е. так как $[0; +\infty)$, то график функции должен быть построен только для этих значений.

По графику функции видно, что множество значений функции промежуток $(-\infty; 1]$. Действительно, для любых значений *x*, взятых из промежутка $[0; +\infty)$, имеем $x^2 \geq 0$. Отсюда $-x^2 \leq 0$, $1 - x^2 \leq 1$, т.е. $y \leq 1$.

Область определения и множество значений некоторых функций

До сведения учащихся доводится, что область определения заданной функции может быть ограничена. Ограничение может меняться в зависимости от ситуации. Например, область определения функции $y = 2x - 1$ может быть ограничена как $x \geq 2$ или $-1 \leq x \leq 2$. Однако в общем случае аргумент может принимать любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$. Между тем, существуют функции, неопределённые для некоторых значений аргумента, т.е. эти значения не принадлежат области определения. Тогда необходимо определить эти значения аналитически, согласно заданной формуле.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.4. в) **Решение**: область определения - значения x, удовлетворяющие условию $2 - x \geq 0$, т.е. значения $x \leq 2$: $D(h) = (-\infty; 2]$. Для $2 - x \geq 0$ имеем $\sqrt{2-x} \geq 0$, т.е. $h(x) \geq 0$. Значит, множеством значений для заданной функции является промежуток $[0; +\infty)$.

У.6. Решение: так как график функции $y = \sqrt{x^2 - mx + 8}$ проходит через точку М (2; 2), то $2 = \sqrt{2^2 - m \cdot 2 + 8}$. Отсюда $m=4$. Тогда получаем формулу $y = \sqrt{x^2 - 4x + 8}$,которую можно записать в виде $y = \sqrt{(x-2)^2 + 4}$. Так как $(x - 2)^2 + 4 \geq 4 > 0$, то имеем, что функция определена для любых значений x, т.е. $D(y) = (-\infty; +\infty)$
С другой стороны $\sqrt{(x-2)^2+4} \geq \sqrt{4} = 2$, т.е. $y \geq 2$. Другими словами, множеством значений функции является промежуток $[2;+\infty)$.

Пример: Найдём область определения и множество значений функции $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Решение: аргументы удовлетворяющие равенству $x^2 - 1 = 0$ не могут принадлежать области определения функции, т.е. $x \neq -1$ и $x \neq 1$.

Область определения: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

Теперь найдём множество значений функции $\dfrac{1}{x^2 - 1} = y$.Так как $x^2 = \dfrac{1}{y} + 1$, и $x^2 \geq 0$ то $\dfrac{1}{y} + 1 \geq 0$. Решая данное неравенство получаем, что множеством значений данной функции является $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

! Если функция задана графиком, то можно найти область определения и множество значений функции спроецировать её точки на оси x и y. При этом особое внимание следует уделять конечным точкам.

Рабочий лис № 3

Имя _____ Фамилия______ Дата________

1) Найдите область определения функции.

а) $y = x^2 - 7x + 10$ б) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ в) $y = x^2 + x^{-2}$

г) $y = \frac{x+4}{x-2}$ д) $f(x) = \frac{3x - 9}{x^2 - x - 2}$ е) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

ж) $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$ з) $y = \frac{\sqrt{3x - x^2}}{\sqrt{x-1}}$ и) $y = \sqrt{\frac{3x - x^2}{x-1}}$

2) Найдите множество значений функции.

а) $y = 4 - x^2$ б) $y = \sqrt{16 - x^2}$

в) $y = \sqrt{16 + x^2}$ г) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Урок 4, 5. Учебник стр. 14-19. Свойства функций. Чётная функция, нечётная функция. 2 час.

Содержательный стандарт

2.2. Знает понятие функции, строит математические модели реальных проблем <u>и решает их, при помощи свойств функций</u>.
2.2.2. Знает понятие графика функции, <u>устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций</u> и умеет преобразовывать графики.

Навыки формирующиеся у учащегося

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *определяет нули функции*
- *определяет промежутки возрастания и убывания функции*
- *определяет экстремумы функции*
- *определяет чётность и нечётность функции*

Математический словарь

- нули функции
- возрастание и убывание функции
- экстремумы функции
- максимумы и минимумы функции
- чётная функция, нечётная функция
- симметричность графика функции

Определение нулей функции

Обсуждаются точки пересечения с осями y и x какой-либо функции. Говоря о нулях функции f имеют ввиду координаты точек $(a;\,0)$ графика, т.е. значения аргументов обращающих в нуль значения функции. С этой темой учащиеся знакомы с прошлого года. В частности, этому отводилось большое внимание при исследовании свойств квадратичной функции. По графику можно увидеть, что функция может иметь один и более нулей, а может не иметь их вообще. Их количество зависит от количества корней уравнения, когда функция приравнивается к "0".

$f(x)=3x^2+x-10$

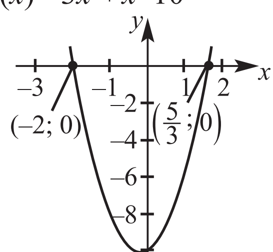
$3x^2+x-10=0$

$(3x-5)(x+2)=0$

$3x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{3}$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$f(x)=3x^2+x-10$



Можно сказать, что нулями функции $f(x)=3x^2+x-10$ являются точки пересечения с осью x $(\frac{5}{3};\,0)$ и $(-2;0)$.

Объяснение проводится на нескольких примерах.

а) $g(x)=\sqrt{10-x^2}$

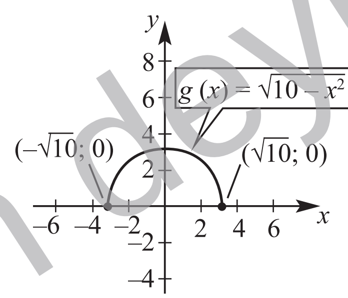
$\sqrt{10-x^2}=0$

$10-x^2=0$

$x^2=10$

$x=\pm\sqrt{10}$

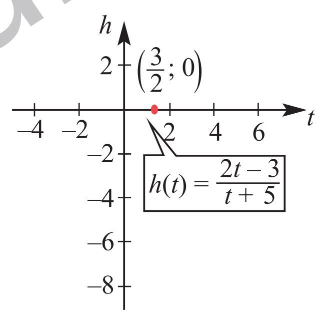
точки $(\sqrt{10};\,0)$ и $(-\sqrt{10};\,0)$ графика находятся на оси x .



б) $h(t)=\dfrac{2t-3}{t+5} \qquad t\neq-5$

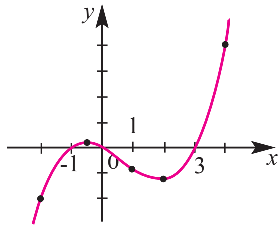
$\dfrac{2t-3}{t+5}=0 \qquad 2t-3=0 \qquad t=\dfrac{3}{2}$

точка $(\frac{3}{2};\,0)$ является точкой пересечения с осью x.



в) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$
$x(x^2 - 2x - 3) = x(x - 3)(x + 1)$
точки $x = 0$, $x = 3$, $x = -1$ являются нулями функции.



x	$p(x)$
-2	-10
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
0	0
1	-4
2	-6
3	0
4	20

График функции можно построить схематично зная точки пересечения с осями координат и несколько дополнительных точек. Также учащимся рекомендуется самостоятельно строить графики различных функций при помощи граф-калькулятора.

Нули функции делят область определения на несколько промежутков, в которых функция сохраняет свой знак. Учащиеся самостоятельно определяют промежутки знакопостоянства функции по графику.

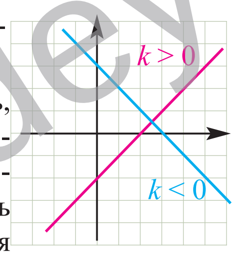
• Определение промежутков возрастания и убывания функций.

Упражнения по возрастанию и убыванию функций выполняются с обсуждением на примерах по графику.

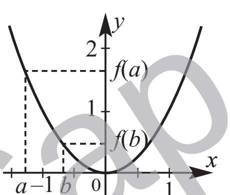
Возрастающая и убывающая функция. Функция, на заданном интервале является возрастающей, если при любом $x_2 > x_1$ взятых из этого интервала значения функции удовлетворяют условию $f(x_2) > f(x_1)$. Если для аргументов x_1 и x_2 из заданного промежутка из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $f(x)$ является убывающей функцией.

Выполняются задания, в которых по графику определяется возрастание и убывание линейных и квадратичных функций.

Как влияет угловой коэффициент k на возрастание и убывание линейной функции $y = kx + b$?

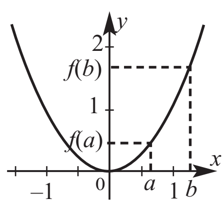


Учащиеся при помощи графиков должны демонстрировать, что при $k > 0$ функция является возрастающей, т.е.при возрастании значений аргумента x значения функции также возрастают, при $k < 0$ - убывают. Для того, чтобы установить возрастание или убывание функции, учащимся рекомендуется в направлении возрастания значений x оставлять след пальцем, как и для того, чтобы показать изменения значений y.



$f(b) < f(a)$

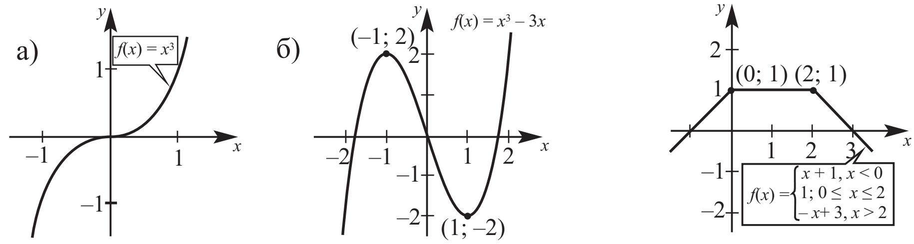
При $x < 0$ функция убывающая



$f(b) > f(a)$

При $x > 0$ функция возрастающая

Обсуждение возрастания и убывания проводится для трёх функций, как показано ниже.



а) на промежутке $(-\infty; +\infty)$ при возрастании значений x значения y возрастают. Т.е. функция всюду возрастающая

б) на графике данной функции есть точки “перехода” $(-1; 2)$ и $(1; -2)$. Исследуем как “ведёт себя функция” на промежутке, образованном этими точками. До первой точки $(-1; 2)$, на интервале $(-\infty; -1)$ функция возрастает, на интервале между первой и второй точками убывает, на интервале $(1; +\infty)$ от второй точки $(-1; 1)$ возрастает.

в) эта функция отличается от других. Здесь можно наблюдать как промежутки возрастания и убывания, так и промежуток в котором значение функции остаётся постоянным.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.6. Функция $y = f(x)$ определена и убывает на промежутке $(-\infty;+\infty)$. Расположите значения в порядке возрастания : а) $f(0), f(-4), f(2)$

Решение: сначала расположим в порядке возрастания аргументы: $-4 < 0 < 2$. По условию функция убывает, т.е. большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента: $f(-4) > f(0) > f(2)$. Тогда $f(2) < f(0) < f(-4)$

• Определение максимума и минимума функции.

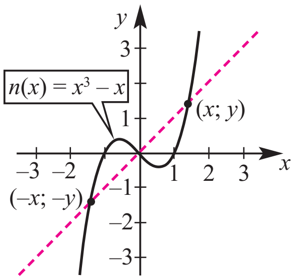
Учащиеся понимают, что точки перехода, являются точками максимума и минимума. Если в точке перехода функция с возрастания переходит на убывание, то она является точкой максимума, в противном случае, при переходе от убывания к возрастанию, точка перехода является точкой минимума.

• Определение чётности и нечётности функции.

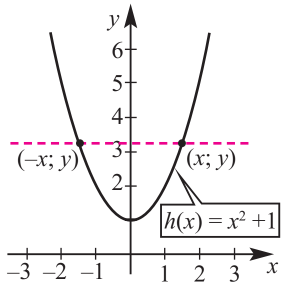
Как определить является ли функция чётной или нечётной, в учебнике объясняется как графически, так и аналитически.

График чётной функции симметричен относительно оси y.

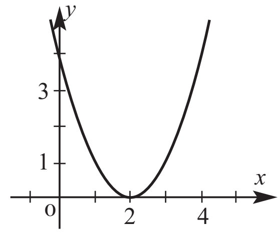
График нечётной функции симметричен относительно начала координат.



Симметрична относительно начала координат. Функция нечётная.

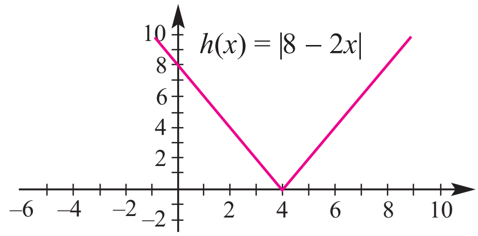


Симметрична относительно оси *y*. Функция чётная.



Не симметрична ни относительно оси *y*, ни относительно начала координат. Функция ни чётная и ни нечётная

По графику видно, что функция $h(x) = |8 - 2x|$ ни чётная и ни нечётная. Это можно проверить и аналитическим способом.



$f(-x) = |8 - 2(-x)| = |8 + 2x|$

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq f(x)$

Учащиеся понимают, что $f(x) \equiv 0$ является одновременно и чётной и нечётной функцией. Так как график функции $f(x) \equiv 0$ симметричен как относительно начала координат, так и относительно оси y.

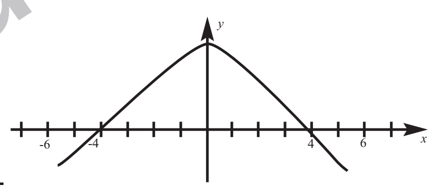
В случае $f(x) = x^{2k}$ функция удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$ и является чётной функцией, в случае $f(x) = x^{2k+1}$ функция удовлетворяет условию $f(-x) = -f(x)$ и должна восприниматься как нечётная функция.

Обратите внимание! Если в формуле функции присутствуют члены как чётной так и нечетной степеней, или в формуле как имеется как минимум один член нечетной степени и постоянный член, то функция является не чётной и ни нечётной.

График чётной функции симметричен относительно оси y. Это объясняется на примере схематично изображённых парабол $y = x^2 - 4$ и $y = -x^2 + 3$. Если чётная функция слева от оси симметрии возрастает(убывает), то справа от оси симметрии она наоборот убывает(возрастает). Получив данный результат выполняется упражнение У.8 из учебника.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.8 Решение представляется в виде какого-либо графика чётной на области определения [–6; 6] функции, которая возрастает на промежутке [–6; 0]. В частном случае, при $f(4)=0$, приходим к результату $f(-4) = 0$ (причину этого объясняют сами учащиеся). Принимая во внимание и это условие, уточняется эскиз графика. После чего нужно снова начертить график. По графику исследуются решения неравенства $f(x) > 0$. Как видно, при $-4<x<4$ функция $f(x) > 0$.



Рабочий лист №4

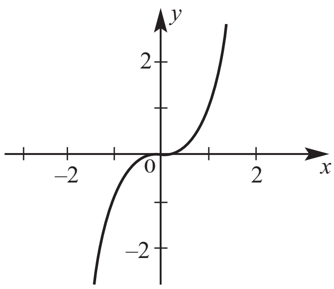
Имя _____ Фамилия______ Дата________

Функции заданы графически и аналитически.

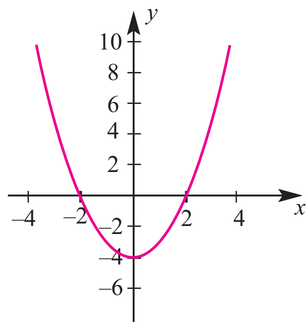
а) Исследуйте чётность и нечётность функций.

б) Определите аналитически, что для чётной функции выполняется условие $f(-x) = f(x)$, для нечётной функции $f(-x) = -f(x)$, а для ни чётной и ни нечётной функции условие $f(x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$:

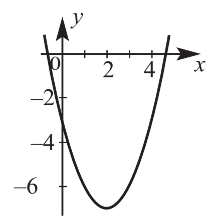
1) $f(x) = x^3$



2) $f(x) = x^2 - 4$



3) $f(x) = x^2 - 4x - 3$



Определите аналитически являются ли следующие функции чётными, нечётными или ни чётными и ни нечётными:

1) $f(x) = -x^5$

2) $f(x) = x^3 + 1$

3) $f(x) = x^{-2}$

4) $f(x) = -3x - 7$

5) $f(x) \equiv 0$

6) $f(x) = 6x^4 - 7x^2$

7) $f(x) = 2x^3 - 5x$

8) $f(x) = x(x^3 + 2x)$

9) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

Урок 6. Учебник стр. 20, 21. Кусочно-заданная функция.

Содержательный стандарт

2.2. 2.2. Знает понятие функции, строит математические модели реальных проблем и решает их, при помощи свойств функций.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

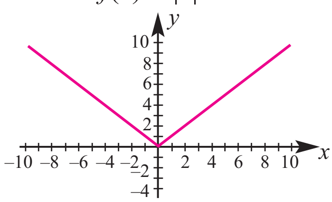
- *вычисляет значения кусочно-заданной функции;*
- *записывает формулу кусочно-заданной функции и строит её график;*
- *строит график функции целой части;*
- *при помощи кусочно-заданной функции моделирует задачи реальной ситуации.*

Математический словарь

- *кусочно-заданная функция*
- *функция целой части, ступенчатый график*

Учащиеся знакомятся с графиком функции $f(x) = |x|$. Рассматриваются несколько графиков модульных функций.

$f(x) = |x|$



$f(x) = |x - 5|$

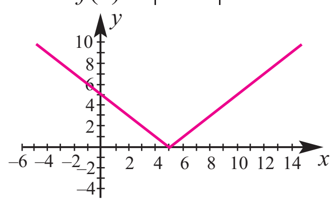


График функции $f(x) = |x|$ на двух различных областях определения состоит из двух графиков линейных функций $f_1(x) = -x;\ x<0$ и $f_2(x) = x;\ x \geq 0$

На самом деле, функция $f(x) = |x|$ в общем виде записывается так

$$f(x) = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ x; & x \geq 0 \end{cases}$$

Модульная функция является одним из примеров кусочно-заданной функции.

Кусочно-заданной функцией называется функция, заданная различными формулами на различных областях определения.

✔ Исследовать кусочно-заданную функцию можно при помощи примеров, представленных в учебнике или при помощи следующих примеров.

Фирма по передержке домашних животных занимается обслуживанием животных в течении определённого времени. Стоимость предоставленных услуг определена следующим образом:

1. 1 час или менее 1 часа - 5 манат
2. более 1 часа до 2 часов - 12,50 манат
3. более 2 часов - постоянно 13 манат и 3 маната за каждый следующий час

Ситуация, в представленной задаче, задаётся функцией аналитически, таблицей значений и графически.

Представим цену услуг предлагаемых фирмой графически.

записывает формулу кусочно-заданной функции

Зададим функцию стоимости услуг фирмы аналитически.

$$y = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ x = 0 \\ 5 \ \text{ при } \ 0 < x \le 1 \\ 12{,}5 \ \text{ при } \ 1 < x \le 2 \\ 13 + 3(x-2) \ \text{ при } \ x > 2 \end{cases}$$

вычисляет значения кусочно-заданной функции

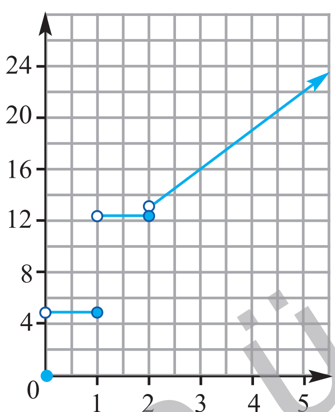
Зададим таблицу значений, отражающую условия фирмы.
Для кусочно-заданной функции вычислим три значения для каждой функции из каждого промежутка (области определения).

Получим следующую таблицу стоимости услуг, предоставляемых фирмой.

Время (в часах)	Стоимость услуги (в манатах)
0	0
0,25	5,00
0,50	5,00
1,00	5,00
1,25	12,50
1,50	12,50
2,00	12,50
2,50	14,50
3,00	16,00
4,00	19,00

строит график кусочно-заданной функции.

Построим график кусочно-заданной функции услуг фирмы.



Точки, координаты которых заданы в таблице отметим на координатной плоскости. Для точек принадлежащих области определения ($\le$) используем закрашенный кружочек, для точек, которые не принадлежат области определения - выколотый (пустой) кружочек.
Например, точка (1; 5) закрашена, а точка (1; 12,50) выколота(не закрашена).
Конечная часть графика является лучом,так как изменение через два часа задаётся такой же зависимостью - 3 маната за час.
Область определения функции $x \ge 0$.
График разрывается в точках $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

Учащиеся понимают, что кусочно-заданная функция может одновременно быть задана и линейной и квадратичной и другими различными функциями.

Например, построим таблицу значений и график функции $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$

$f(x) = x^2$

x	$f(x)$
–2	4
–2	1
0	0
1	1
2	4

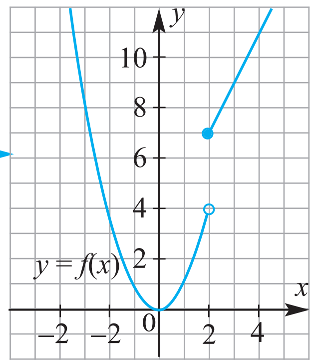
$f(x) = 2x + 3$

x	$f(x)$
2	7
3	9
4	11
5	13
6	15

Из формулы функции видно, что графиком с одной стороны является парабола, ветви которой направлены вверх и луч, направленный слева направо , с другой стороны. Изменения графика происходит в значении $x = 2$ аргумента: зависимость, заданная квадратичной функцией превращается в линейную функцию.

график функции f:

Значения точек из таблицы располагаются на координатной плоскости. Точка (2; 7) закрашена, так как она принадлежит графику функции $f(x) = 2x + 3$, точка (2; 4) не закрашена, так как она не принадлежит графику.



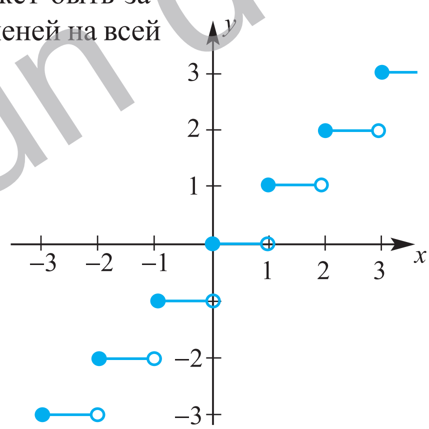
Кусочно-заданная функция может состоять из постоянных функций, например, $y = 2$, $y = 3$ и т.д. В этом случае график функции является ступенчатым.

Объясняется функция целой части.

Функция целой части записывается следующим образом $f(x) = [x]$.

Функция целой части аналитически может быть задана как показано ниже и количество ступеней на всей действительной оси бесконечно.

$$[x] = \begin{cases} \vdots \\ -2 & -2 \leq x < -1 \\ -1 & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2 & 2 \leq x < 3 \\ \vdots \end{cases}$$



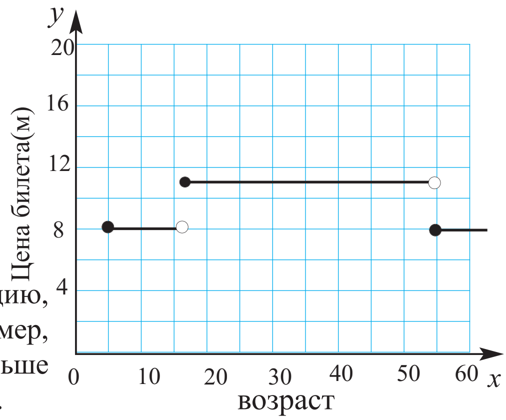
• *при помощи кусочно-заданной функции моделирует задачи реальной ситуации*

Особое внимание надо обратить на вид начальной точки(закрашена или не закрашена). В зависимости от ситуации они могут менять свой вид.

При помощи кусочно-заданной функции можно смоделировать различные жизненные ситуации.

Например, следующая функция показывает зависимость возраста человека и цены билета на концерт.

$$p(x) = \begin{cases} 8 \text{ если } 5 \le x < 16 \\ 11 \text{ если } 16 \le x < 55 \\ 8 \text{ если } x \ge 55 \end{cases}$$



Учащиеся словесно объясняют функцию, принадлежащую каждой части. Например, цена билета для зрителя в возрасте меньше 16 и больше 5 лет, составляет 8 манат.

! Почему точка (16; 8) показана в виде не закрашенного кружочка? Потому, что для человека, которому уже исполнилось 16 лет, билет будет стоить не 8 манат, а 11 манат. Поэтому эта точка не принадлежит графику.

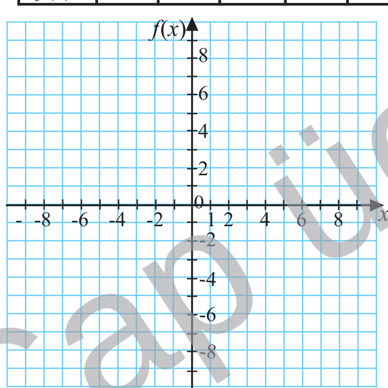
Рабочий лист № 5

Имя _____ Фамилия______ Дата________

Заполните таблицу значений кусочно-заданной функции и постройте её график.

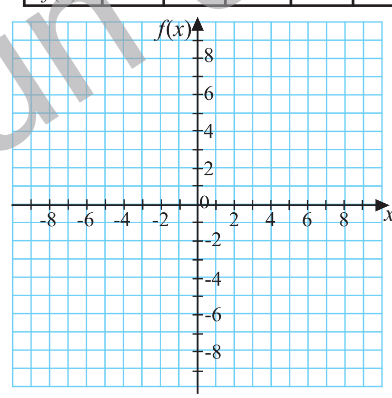
$$f(x) = \begin{cases} -2x - 9; \ x < -3 \\ \frac{1}{3}x - 4; \ x \ge -3 \end{cases}$$

x					
$f(x)$					
x					
$f(x)$					



$$f(x) = \begin{cases} -2x; \ x \le 2 \\ -(x-2)^2 + 6; \ x > 2 \end{cases}$$

x					
$f(x)$					
x					
$f(x)$					



Урок 7. Учебник стр. 22. Степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Содержательный стандарт

2.2.5. Знает определение и свойства степенной функции и строит её график.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

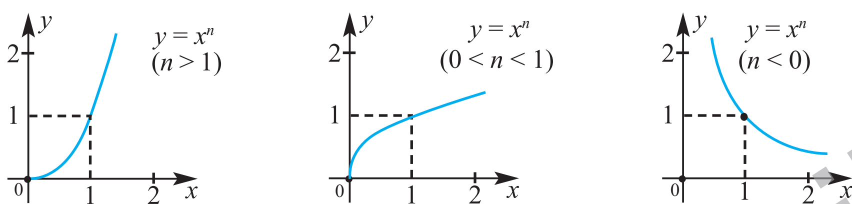
Рабочие листы

- *Строит графики степенной функции с чётной и нечётной степенью.*
- *Применяет свойства степенной функции с четной и нечётной степени.*

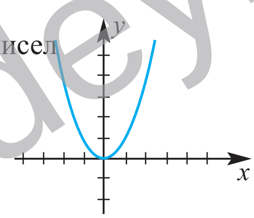
Математический словарь

- *парабола n-ой степени*

Внимание учащихся направляется на общий вид степенной функции. Рассматривается степенная функция вида $y = x^n$ $(n \in N)$. Однако, если позволяет уровень класса и количество часов, можно рассмотреть функции более общего вида для $n > 1$, $0 < n < 1$, $n < 0$. В этом случае, в зависимости от значений n (здесь $n \in$ Q), графики функций будут иметь следующий вид.

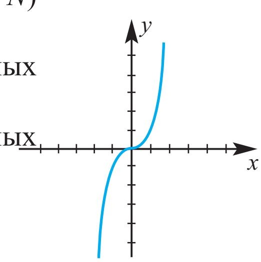


При $n = 2k$ удобнее свойства функции $y = x^n$ $n \in$ N представлять при помощи уже знакомой учащимся функции $y = x^2$.



Область определения: R, множество всех действительных чисел
Множество значений: $[0; +\infty)$
Убывает на интервале: $(-\infty; 0]$
Возрастает на интервале: $[0; +\infty)$
Функция чётная
принимает минимальное значение при $x = 0$: $y_{min} = 0$

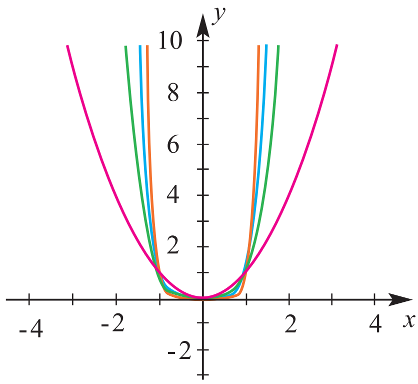
Свойства функции с нечётной степенью $y = x^n$ $(n \in N)$ можно представить на примере функции $y = x^3$.



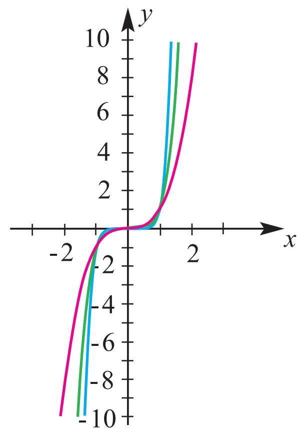
Область определения: R, множество всех действительных чисел
Множество значений: R, множество всех действительных чисел
Возрастающая
Нечётная функция
Максимумов и минимумов нет.

Рекомендуется построить несколько степенных функций с чётной и нечётной степенью схематично по нескольким точкам или при помощи графкалькулятора.

Чётная степень $y = x^n$ $n \in$ N



Нечётная степень $y = x^n$ $n \in$ N



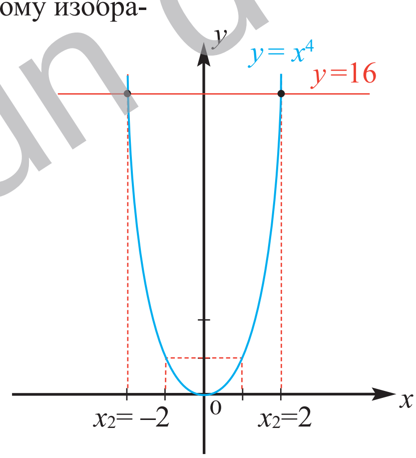
Задания, связанные со степенной функцией, вновь будут рассмотрены при изучении сложной функции, классификации функций, действий над функциями и преобразования функций.

! Учащиеся могут путать степенную функцию $y = x^n$ с функцией $y = a^x$. Надо обратить внимание учащихся на то, что у первой функции аргументом является основание, а у второй - показатель степени. А также надо обратить внимание на различие графиков.

До сведения учащихся доводится, что построение графика и изучение свойств степенной функции понадобится при вычислении корней n-ой степени и при решении уравнения $x^n = a$. Так уравнение нечётной степени имеет корни при всех действительных значениях a, а для чётной степени не имеет действительных корней при $a < 0$.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.5 Решение: в одной системе координат построим графики функций $y = x^4$ и y =16. По схематичному изображению графиков,выслушиваются мнения о точках пересечения. Найдём абсциссы точек пересечения, решив уравнение $x^4=16$: $x=\pm\sqrt[4]{16}$, $x_1=-2$ и $x_2=2$. По графику видно, что значения функции $y = x^4$ для аргументов на промежутке (–2; 2) соответствуют ординатам меньше 16. Т.е.решением неравенства $x^4 < 16$ является промежуток (–2; 2), а значения $x < -2$ или $x > 2$ удовлетворяют неравенству $x^4 > 16$.

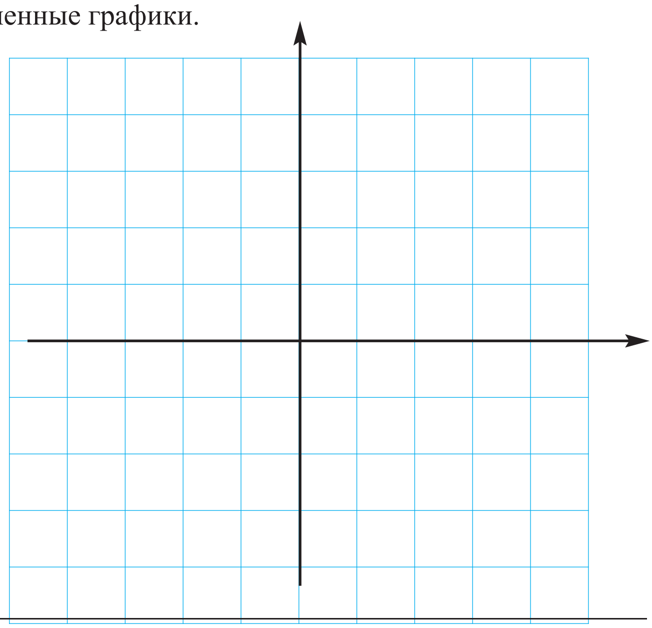


Рабочий лист № 6

Имя _____ Фамилия______ Дата________

Заполните таблицу значений для функций $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ и постройте их графики. Сравните полученные графики.

x	$y=x$	$y=x^3$	$y=x^5$
–1,5			
–1			
–0,5			
0			
0,5			
1			
1,5			



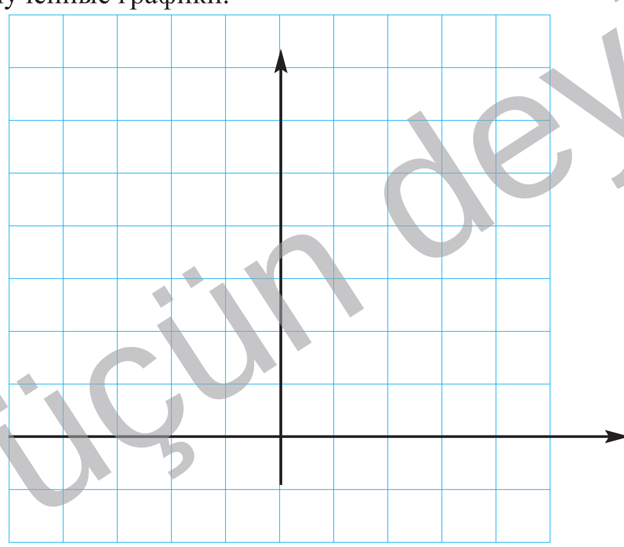
Сравнение графиков____

____

____

Заполните таблицу значений для функций $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ и постройте графики. Сравните полученные графики.

x	$y=x^2$	$y=x^4$	$y=x^6$
–1,5			
–1			
–0,5			
0			
0,5			
1			
1,5			



Сравнение графиков____

____

____

Урок 8. Учебник стр. 23, 24.   Классификация функций

Содержательный стандарт

2.2.1.Знает определение числовой функции и способы её задания, понимает понятия области определения и множества значений функции.
2.2.2. Знает понятие графика функции, устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций и <u>умеет преобразовывать графики</u>.

Навыки формирующиеся у учащегося

Дополнительные ресурсы

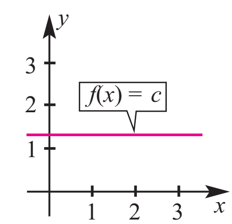
Рабочие листы

- *Строит график основной функции из семейства функций (начальной функции) и показывает её свойства.*
- *Определяет семество к которой принадлежит функция, показывает свойства.*
- *Моделирует функцию реальной жизненной ситуации и представляет свойства, соответствующие семейству.*

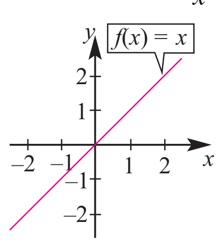
Математический словарь

- *семейство функций*
- *основная функция*
- *асимптота*

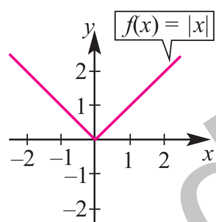
С учащимися обсуждается следующий вопрос:Какие функции мы изучили? Перечисляются названия и общий вид функций последовательно записывается на доске. 1. Линейная функция, $y = kx + b$; 2. Постоянная функция: $y = c$; 3. Квадратичная функция $y = x^2$; 4. Модульная функция $y = |x|$; 5. Степенная функция $y = x^n$; 6. Рациональная функция $y = \dfrac{1}{x}$;7. Кусочно=заданная функция $y = [x]$.



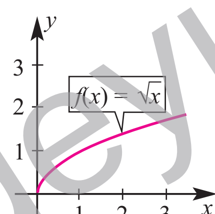
Постоянная функция



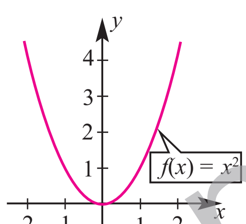
Тождественная функция



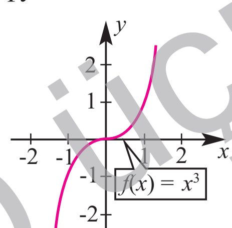
Модульная функция



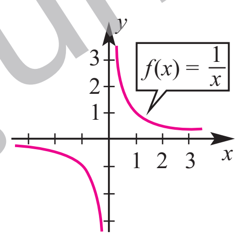
Функция квадратного корня



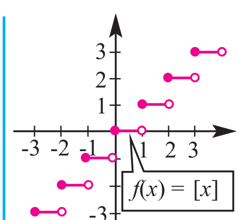
Квадратичная функция



Кубическая функция

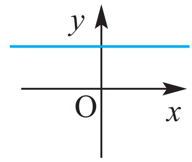
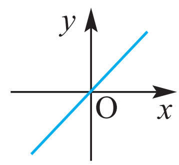
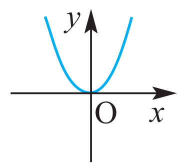
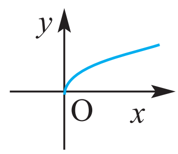
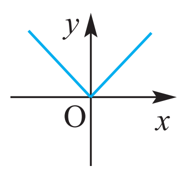
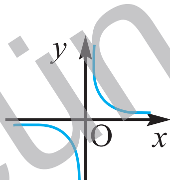
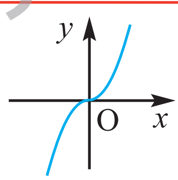


Рациональная функция



Функция целой части

Рекомендуется в качестве домашнего задания составить таблицу для наиболее часто встречающихся функций, как показано ниже.

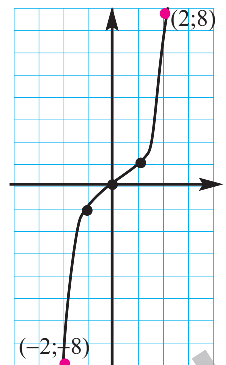
Название функции	**Основная функция**	**График**	**Свойства**
Постоянная функция	$f(x) = c$		Об.опр.: $(-\infty; +\infty)$ Мн.зн.: $\{c\}$
Тождественная функция	$f(x) = x$		Об.опр.: $(-\infty; +\infty)$ Мн.зн.: $(-\infty; +\infty)$ Нули: $x = 0$ Возрастающая функция Экстремумов нет
Квадратичная функция	$f(x) = x^2$		Об.опр.: $(-\infty; +\infty)$ Мн.зн.: $[0; +\infty)$ Нули: $x = 0$ $(-\infty; 0]$ ↓ $[0; +\infty)$ ↑ (0; 0) точка минимума
Функция квадратного корня	$f(x) = \sqrt{x}$		Об.опр.: $[0; +\infty)$ Мн.зн.: $[0; +\infty)$ Нули: $x = 0$ $[0; +\infty)$ ↑ Экстремумов нет
Модульная функция	$f(x) = \|x\|$		Об.опр.: $(-\infty; +\infty)$ Мн.зн.: $[0; +\infty)$ Нули: $x = 0$ $(-\infty; 0]$ ↓, $[0; +\infty)$ ↑ (0; 0)- точка минимума
Рациональная функция	$f(x) = \frac{1}{x}$		Об.опр.:$(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ Мн.зн.: $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$ Нулей нет $(-\infty; 0)$ ↓, $(0; +\infty)$ ↓ Экстремумов нет
Кубическая функция	$f(x) = x^3$		Об.опр.: $(-\infty; +\infty)$ Мн.зн.: $(-\infty; +\infty)$ Нули: $x = 0$ Функция возрастающая Экстремумов нет

До сведения учащихся доводится, что функции, принадлежащие одному семейству получаются преобразованием основной функции . На этих уроках особое внимание уделяется формированию умения записывать формулу, соответствующую заданной ситуации и определять для неё основную функцию, определять по графику к какому семейству относится функция, построению графика по таблице значений.

Строит график основной функции из семейства функций (начальной функции) и показывает её свойства.

Для формирования навыков важно после обсуждения в классе обучающие задания из учебника рекомендуются в качестве домашнего задания, как и таблицу из методического пособия учителя. Задания У1 и У2 также служат для формирования этих навыков, а также играют важную роль для формирования навыков:

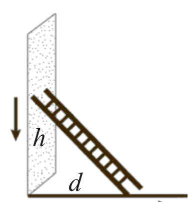
- *Моделирует функцию реальной жизненной ситуации и представляет свойства, соответствующие семейству.*



Решение некоторых заданий из учебника

У.2 Данное задание выполняется следующим образом. Точки располагаются на координатной плоскости.
в) в этом пункте к точкам (–1; –1), (0; 0), (1; 1) добавлены точки (–2; –8) и (2; 8). В этом случае, соединив точки можно с лёгкостью увидеть график кубической параболы. Учащиеся могут определить точки по координатам. Числам –1, –2 и 2 соответствуют кубы –1, –8, 8. В центре внимания учащихся остаются этапы, по которым определяются к какому семейству принадлежит функция по заданным точкам. Если учащийся может определить основную функцию по паре координат точек, то можно оценить знания учащегося как достаточно хорошие. Однако, важно рассматривать умение учащихся отмечать координаты точек и строить графики в соответствии с развитием навыков учащихся и формированием пространственного представления.

Классификация функций, умение определять основную функцию поможет ещё лучше понять на следующих уроках преобразования графиков, а также поможет применить навыки для решения задач в реальной жизненной ситуации.



У.5 Решение: а) По теореме Пифагора $h^2+d^2 = 3^2$, отсюда получаем $h = \sqrt{9 - d^2}$.
б) В соответствие с реальной ситуацией области определения функции $0 \le d \le 3$, находится по условию из множества значений $0 \le h \le 3$.

Урок 9-11. Учебник стр. 25-31. Преобразование графиков. 3 часа.

Содержательный стандарт

2.2.1.Знает определение числовой функции и способы её задания, понимает понятия области определения и множества значений функции. 2.2.2. Знает понятие графика функции, устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций и умеет преобразовывать графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

- *представляет параллельный перенос графиков функций графически, словесно и аналитической формулой;*
- *представляет отражение функций графически, словесно и аналитической формулой;*
- *представляет сжатие и растяжение графиков функций графически, словесно и аналитической формулой.*

Дополнительные ресурсы

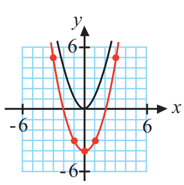
Рабочие листы

Математический словарь

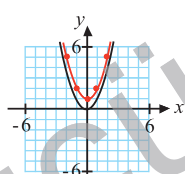
- *параллельный перенос графиков*
- *отражение графиков*
- *сжатие и растяжение графиков*

1-ый час параллельный перенос. Умея определять основную функцию для семейства функций, учащиеся выполняют задания, где преобразования над графиками описываются словесно. Эти задания охватывают умения учащихся заданную аналитической формулой функцию описать словами и представить в виде графика или наоборот, функцию, заданную графиком описать словами и выразить аналитической формулой.

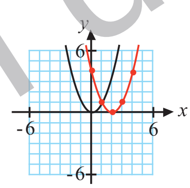
Преобразования графиков, особенно параллельный перенос, растяжение и сжатие было рассмотрено в 9 классе на примере квадратичной функции. Поэтому, объяснение урока и первые задания, рекомендуется выполнять над квадратичной функцией. Обсуждение знаний о параллельном переносе проводится при помощи основной функции $y = x^2$. Для примера можно использовать следующие графики. Учащимся отводится время для того, чтобы начертить в тетрадь график, соответствующий каждому примеру.



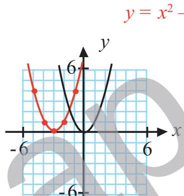
$y = x^2 - 4$



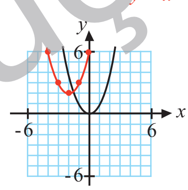
$y = x^2 + 1$



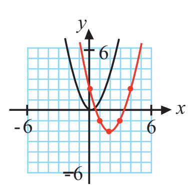
$y = (x - 2)^2$



$y = (x + 3)^2$



$y = (x + 2)^2 + 2$



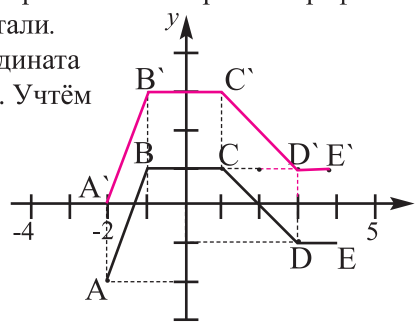
$y = (x - 2)^2 - 2$

Учащиеся уделяют особое внимание представлению каждой параболы с помощью параболы $y = x^2$ и значениям координаты вершины параболы при сдвиге её по горизонтали и вертикали. Внимание! Чтобы легче запомнить: при движении влево к значению x прибавляем, при движении вправо от значения x- вычитаем. При движении вверх к значению функции(или y) прибавляем, при движении вниз от значения функции(или y) вычитаем. Это верно при параллельном переносе для любой функции. Учащиеся понимают, что при параллельном переносе все точки функции меняют положение на одинаковую единицу. На графике основной функции отмечают несколько точек, для которых выполняется параллельный перенос на одинаковую единицу и получают новое положение графика.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.6 а) $g(x) = f(x)+2$

Решение: график функции $f(x)$ получают при параллельном переносе графика функции $g(x)$ на 2 единицы вверх по горизонтали. При этом абсцисса остаётся неизменной, а ордината увеличивается на 2 единицы: $(x; y)\rightarrow(x; y + 2)$. Учтём это для точек, отмеченных на графике.

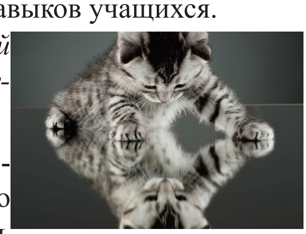


A(–2; –2)→A`(–2; 0)
B(–1; 1)→B`(–1; 3)
C(1; 1)→C`(1; 3)
D(3; –1)→D`(3; 1)
E(4;–1)→E`(4; 1)

Последовательно соединяя точки, полученные при параллельном переносе, получаем график функции $y(x) = f(x) + 2$.

В окружающем мире, природе, дизайне зданий и улиц наблюдается большое количество функций их преобразований. Было бы полезно провести презентацию или мероприятие на темы “Мы видим функции...” или “Функции в природе”, где учащиеся при помощи фотографий или рисунков отобразили такого рода ситуации. Такого вида мероприятия играют важную роль в формировании творческого мышления и развития социальных и коммуникационных навыков учащихся.

Представляет отражение графиков функций графически, словесно и аналитической формулой

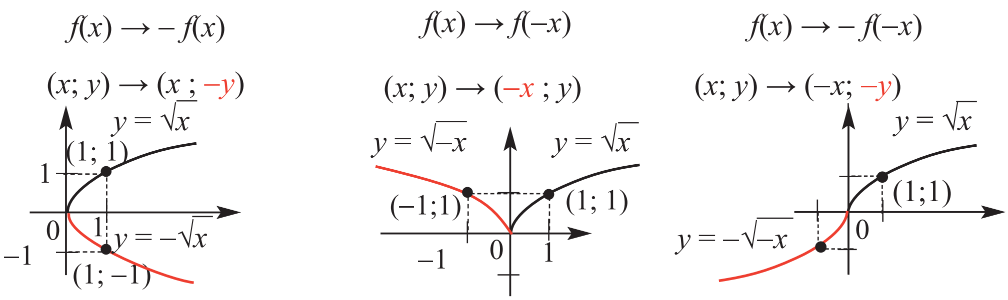


Самым хорошим примером для демонстрации отражения графиков функций является функция квадратного корня $y = \sqrt{x}$, которая также позволяет смоделировать многие физические события. Учащиеся проводят обсуждения по данному вопросу и приводят соответствующие примеры.

Выше представлен самый популярный пример функции квадратного корня - движение тела брошенного вверх: Если в формуле $h = -4{,}9t^2 + h_0$ задать значения h, то зависимость времени от высоты (время, за которое тело падает на землю), выражается функцией квадратного корня.

Учащиеся представляют примеры, моделирующие отображение функции в реальной жизненной ситуации.

В каждом из случаев особое внимание уделяется изменениям координат при отражении: относительно осей x или y, а также начала координат. Новое расположение графика определяется новыми координатами соответствующих точек.

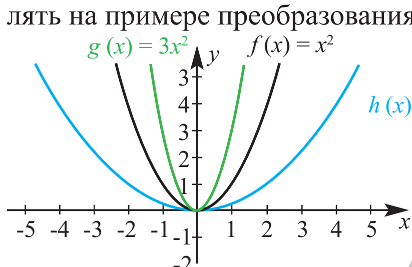


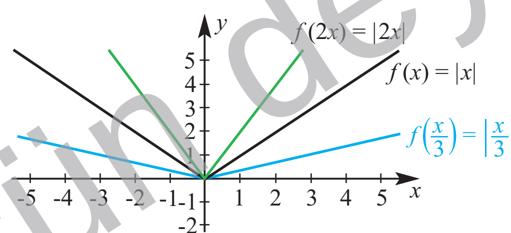
Учащимся предлагается ответить на следующие вопросы.

1) Что произойдет с чётной функцией, если её отобразить относительно оси y?
2) Что произойдет с нечётной функцией, если её отобразить относительно оси y?
3) Как бы вы представили отражение чётной функции относительно оси x?
4) Как бы вы представили отражение нечётной функции относительно оси x?

• *представляет сжатие и растяжение функций графически, словесно и аналитической формулой.*

Удобно преобразования графиков функции при растяжении и сжатии представлять на примере преобразования квадратичной и модульной функций.





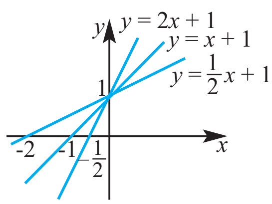
Объяснение темы в учебнике исследуется совместно с учащимися. Ученикам даётся время, чтобы они смогли определить новые координаты выбранной точки, а также новое расположение её на плоскости, после преобразования. Основное внимание обращается на то, как связаны растяжение и сжатие по вертикали и горизонтали, и формула функции. Сжатие графика функции F(x) к оси y в k раз означает возрастание значений основной функции в k раз быстрее. При изменении вида $y = 2f(x)$ координаты точки (1;2) станут равны (1;4), то есть удалится от оси x. При $0 < k < 1$ график будет сжат к оси x.

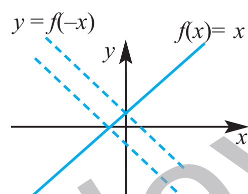
Рекомендуется создать слайд или плакат выражающий в общем виде преобразование графиков функций.

Преобразование функции $f(x)$

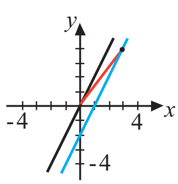
Новая функция	Преобразование словами	Изменение координат
$h(x) = f(x) + c$	сдвиг на c единиц по вертикали вверх	$(x; y) \rightarrow (x; y + c)$
$h(x) = f(x) - c$	сдвиг на c единиц по вертикали вниз	$(x; y) \rightarrow (x; y - c)$
$h(x) = f(x + c)$	сдвиг на c единиц влево по горизонтали	$(x; y) \rightarrow (x - c; y)$
$h(x) = f(x - c)$	сдвиг на c единиц вправо по горизонтали	$(x; y) \rightarrow (x + c; y)$
$h(x) = -f(x)$	отображение относительно оси x	$(x; y) \rightarrow (x; -y)$
$h(x) = f(-x)$	отображение относительно оси y	$(x; y) \rightarrow (-x; y)$
$h(x) = cf(x)$	вертикальное растяжение или сжатие в c раз при $c > 1$; $0 < c < 1$	$(x; y) \rightarrow (x; cy)$
$h(x) = f(cx)$	горизонтальное растяжение или сжатие в c раз при $c > 1$; $0 < c < 1$	$(x; y) \rightarrow (cx; y)$

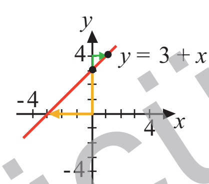
Рекомендуется рассматривать растяжение и сжатие на примере линейной функции. Отсюда ясно видно приближение и удаление от осей.

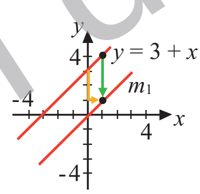




Также на примере линейной функции необходимо проводить исследование параллельного переноса и отображения. Например, $f(x) = 2(x - 3) + 4$







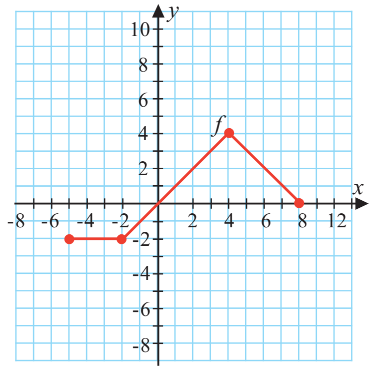
$$m(x) = x \rightarrow h(x) = 2x \rightarrow g(x) = 2(x - 3) \rightarrow f(x) = 2(x - 3) + 4$$

? Решение некоторых заданий из учебника

У.26 Решение: а) растягивая график функции $f(x)=\sqrt{x}$ по оси абсцисс в 2 раза имеем, $(x; y) \rightarrow (x; 2y)$. Тогда $g(x) = 2f(x)$, т.е.получаем график функции $g(x)=2\sqrt{x}$.

Рабочий лист № 7

Имя _____ Фамилия______
Дата________



1) Выполните преобразование заданного графика и изобразите новый график.

$y = f(x - 2) + 3$

$y = f(-x)$

$y = 2f(x + 1)$

2) Запишите основную функцию и преобразования. Постройте график.

$f(x) = -\sqrt{x - 1} + 2$

Основная функция_______
Преобразования ___________

$f(x) = |x - 1| + 2$

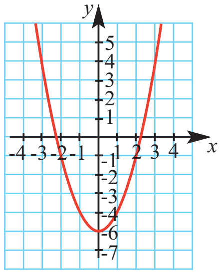
Основная функция_______
Преобразования ___________

Рабочий лист № 8

Имя _____ Фамилия______ Дата________

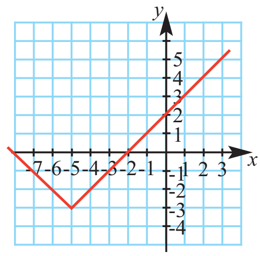
Запишите формулу функции, определив какие преобразования были проведены над основной функцией.

а)



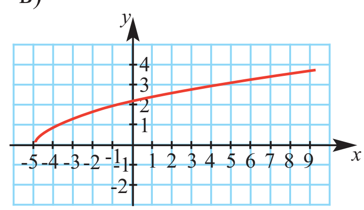
____

б)



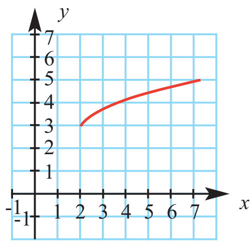
____

в)



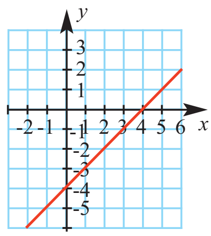
____

г)



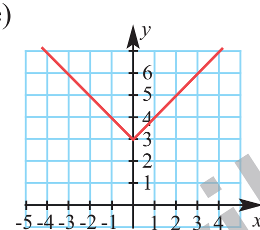
____

д)



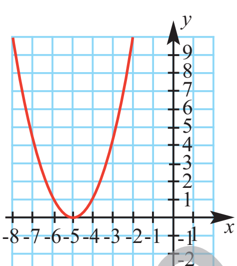
____

е)



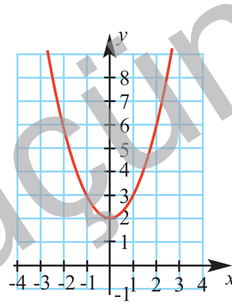
____

ж)



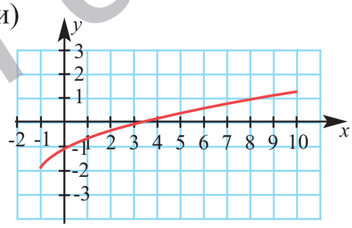
____

з)



____

и)



____

Урок 12. Учебник стр. 32, 33. Действия над функциями

Содержательный стандарт

2.2.1.Знает определение числовой функции и способы её задания, понимает понятия области определения и множества значений функции.
2.2.2. Знает понятие графика функции, устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций и умеет преобразовывать графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *Записывает новую функцию, выполняя действия над данной функцией.*
- *Определяет свойства новой функции.*

Математический словарь

- *сложение, вычитание, умножение и деление функций*

При решении проблем реальных жизненных ситуаций и математических проблем, часто приходится выполнять действия над функциями.
Над двумя заданными функциями можно выполнять арифметические действия. При этом получается новая функция. Областью определения функции, полученной в результате действий над функциями $f(x)$ и $g(x)$ является множество действительных чисел, в которых определена каждая из функций. Другими словами, область определения новой функции, является пересечением областей определения функций $f(x)$ и $g(x)$: $D = D(f) \cap D(g)$. Отношение функций определено для всех значений аргументов множества D и значений знаменателя отличных от нуля.

? Решение некоторых заданий из учебника

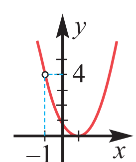
У2. г) $f(x) = x^2 - 1$ и $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

Зная, что $D(f) = (-\infty; +\infty)$ и $D(g) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, тогда сумма, разность и произведение функций f и g определены на множестве пересечения $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

$(f+g)(x) = x^2 - 1 + \dfrac{x-1}{x+1}$, $\quad (f-g)(x) = x^2 - 1 - \dfrac{x-1}{x+1}$,

$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 1)\cdot \dfrac{x-1}{x+1} = (x-1)^2$.

! Здесь еще раз обращается внимание, что $x \neq -1$. На изображении графика функции $(f \cdot g)(x)$ это отмечено удалением из параболы точки $(-1; 4)$.



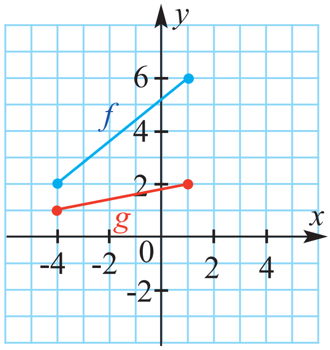
Отношение $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ также не определенно в точке при $g(x) = 0$, т.е. при $x = 1$. $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = (x^2 - 1) : \dfrac{x-1}{x+1} = (x^2 - 1)\cdot\dfrac{x+1}{x-1} = (x+1)^2$

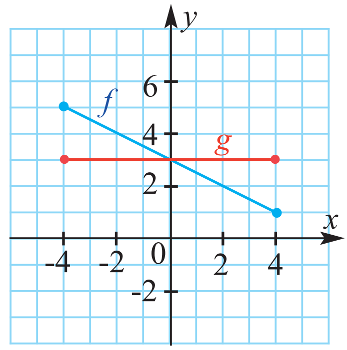
Здесь $x \neq -1$ и $x \neq 1$.

Рабочий лист № 9

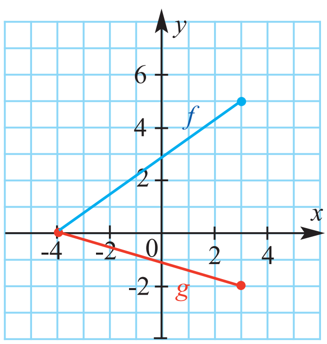
Имя _____ Фамилия______ Дата________

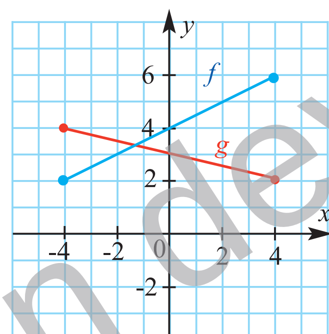
По графикам функции f и g постройте графики функций $f + g$.





По графикам функции f и g постройте графики функций $f - g$.





Урок 13,14. Учебник стр. 34-36. Сложная функция. 2 часа.

Содержательный стандарт

2.2.1.Знает определение числовой функции и способы её задания, понимает понятия области определения и множества значений функции. 2.2.2. Знает понятие графика функции, устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций и умеет преобразовывать графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *записывает композицию двух заданных функций;*
- *записывает формулу сложной функции для заданной функции;*
- *вычисляет значения сложной функции.*

Математический словарь

- *сложная функция*
- *композиция функций*

Выполняя действия над функциями получаем новую функцию. Ещё одним из путей получения новой функции является построение композиций(сложной функции) функции. В реальной жизненной ситуации, при решении математических проблем очень широко применяется сложная функция. Например, наполнение бассейна водой за единицу времени зависит от объёма воды, поступающей в бассейн и его размеров. Пусть, объём воды поступающий в бассейн можно найти по формуле $V = 0{,}5t$. Здесь V объём воды в м^3, t *- время в минутах.* Размеры бассейна 20м × 5м × 2м. Рашад ждёт, когда наполнится бассейн и планирует войти в него, когда уровень воды составит 1,5 м глубины. Через сколько времени,после того как бассейн начнёт наполняться, Рашад сможет войти в бассейн? Запишем объём поступающей воды как $V = 20 \times 5 \times d$, т.е. $V = 100d$. Из формулы $V = 0{,}5t$ получаем, что $t = 2V = 200d$, т.е. при значении $d = 1{,}5$, $t = 200 \cdot 1{,}5 = 300$ мин. А это значит, что если бассейн будет наполняться с данной скоростью Рашад сможет искупаться в бассейне через 5 часов. Как видно, события в жизни зависят друг от друга.

Записи $(f \circ g)(x)$ и $(g \circ f)(x)$ объясняются на примере двух функций. Из двух функций, можно получить сложную функцию тогда и только тогда, когда множество значения первой функции входит в область определения второй функции. Область определения композиции $f \circ g$ является подмножеством области определения функции g , множество значений композиции $f \circ g$ является подмножеством множества значений функции f. Самый простой пример сложной функции зависимость между единицами измерения. Например, если 1доллар = 1,60 манат; 1 евро = 1,20 доллара, то для того, чтобы узнать скольким евро равен 1 манат воспользуемся зависимостью между евро и долларом. Запишем зависимость маната от доллара $m(d)$ и евро от доллара $a(d)$.

$d = 1{,}60m, \quad m = \frac{5}{8}d, \quad d = \frac{5}{6}a, \quad m = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{6} a = \frac{25}{48} a$ или записать в виде функции зависимость между манатом и евро в виде $m(a) = \frac{25}{48} a$

Решение некоторых заданий из учебника

У.6 в) даны функции $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2 + 2$.
Зная, что $D(f) = [1;+\infty)$, $E(f) = [0; +\infty)$, $D(g) = (-\infty;+\infty)$, $E(g) = [2; +\infty)$ получим, что $E(f) \subset D(g)$, значит можно построить композицию
$g(f(x)) : g(f(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 2 = x + 1$.
Эта функция определена на промежутке $[1; +\infty)$. Так как $E(g) \subset D(f)$, то можно построить композицию
$f(g(x))$: $f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2 - 1} = \sqrt{x^2 + 1}$. Эта функция определена на всей числовой оси.

Рабочий лист № 10

Имя _____ Фамилия______ Дата________

Для функций $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = 3x$ и $h(x) = x^2 + 1$, вычислите следующие значения.

1. $f(g(-3))$
2. $f(h(7))$
3. $f(h(-4))$
4. $h(f(9))$
5. $g(f(0))$
6. $h(g(-4))$
7. $f(g(h(2)))$
8. $h(g(f(3)))$
9. $g(f(h(-2)))$

Для заданных функций запишите формулу сложной функции.

а) Дано: $f(x) = 2x - 5$ və $g(x) = x + 2$
Найдите: $(f \circ g)(x)$

б) Дано: $f(x) = x^2 + 7$ və $g(x) = x - 3$
Найдите: $(f \circ g)(x)$

в) Дано: $f(x) = 4x + 3$ və $g(x) = x^2$
Найдите : $(f \circ g)(x)$

г) Дано: $f(x) = x - 1$ və $g(x) = x^2 + 2x - 8$
Найдите : $(g \circ f)(x)$

Урок 15-17. Учебник стр. 37-42. Обратная функция. Обобщающие задания

Содержательный стандарт

2.2.1.Знает определение числовой функции и способы её задания, понимает понятия области определения и множества значений функции.
2.2.2. Знает понятие графика функции, устанавливает периодичность, чётность и нечётность, монотонность функций и умеет преобразовывать графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *записывает функцию f^{-1} обратную для функции* ***f****, при помощи взаимно обратных действий*
- *устанавливает является ли функция обратной по графику и значениям таблицы*
- *определяет являются ли взаимно обратными две заданные функции по формуле*
- *определяет область определения обратной функции*
- *строит график обратной функции*

Математический словарь

- *обратимая функция*
- *обратная функция*
- *взаимно обратные функции*

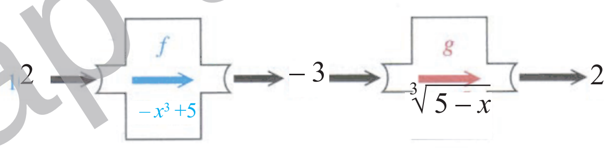
Запись формулы функции f^{-1} обратной для функции f. Обсуждается, какие действия, среди четырёх арифметических действий, можно назвать взаимнообратным. Сложение и вычитание, умножение и деление можно назвать взаимно обратными действиями. Для определения алгебраической функции, обратной для заданной можно используются взаимно обратные действия. Например, функция $f^{-1}(x) = \frac{x}{4}$ является взаимно обратной для функции $f(x) = 4x$. Рассмотрим другой пример: в функции $f(x) = 3x + 2$ переменная умножается на 3 и складывается с 2.

$$x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{+2} 3x+2$$

для обращения функции $f(x)$ в x надо заданные действия выполнить в обратном порядке.

$$x \xrightarrow{-2} x-2 \xrightarrow{:3} (x-2)/3$$

Выполняя обратные действия для функции f можно аналитически получить формулу обратной функции. Например, для того, чтобы найти функцию, обратную для функции $f(x) = 5 - x^3$ в заданной функции f все действия преобразуются в обратные "видимые действия надо преобразовать обратным образом". Надо "работу" по возведению в куб x, умножения на –1 и сложением с 5, заменить на вычитание 5 и нахождения кубического корня $f^{-1}(x) = g(x) = \sqrt[3]{5-x}$.



Область определения и множество значений взаимно обратных функций также являются взаимно обратными. Т.е. область определения функции f является множеством значений обратной функции g и наоборот.

Например, если для функции $f(x) = 4x$ $f(3) = 12$, то для функции, обратной данной $g(12) = 3$. На самом деле, при $x = 12$ значение функции $g(x) = \frac{1}{4}x$ равно 3.

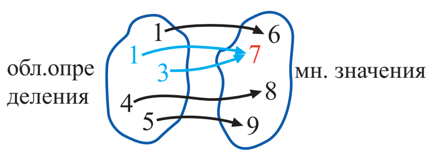
Определение являются ли две заданные функции взаимно обратными.

Проверить являются ли функции $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$ взаимно обратными можно следующим образом. Для этого надо показать, что $\boldsymbol{f(f^{-1}(x)) = x}$ **и** $\boldsymbol{f^{-1}(f(x)) = x}$. $f(\frac{1}{2}(x + 1)) = 2(\frac{1}{2}(x + 1)) - 1 = x + 1 - 1 = x$

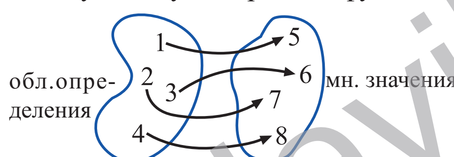
Записать для функции $f(x) = 2x - 1$ обратную функцию можно изменив в формуле $y = 2x - 1$ зависимость y от x на зависимость x на y. тогда это записывается в виде $x = \frac{1}{2}(y + 1)$. Обычно аргумент обозначается через x, а функция через y. Поэтому обратная функция записывается в виде $y = \frac{1}{2}(x + 1)$.

Условие существования функции, обратной для функции f .

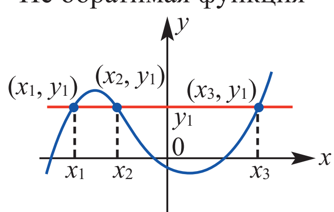
Для существования функции обратной функции f нужно, чтобы каждому значению из области определения соответствовало одно значение из множества значений. Функции такого рода называются обратимыми. В противном случае, т.е. если одному значению из области определения соответствует несколько значений из множества значений, (например, как для функции $y = x^2$), то эта функция необратима и для неё не существует обратной функции. Протестировать является ли функция обратимой можно, при помощи горизонтальной линии. Если горизонтальная прямая пересечёт график в более, чем одной точке,то эта функция необратима и для неё не существует обратной функции.



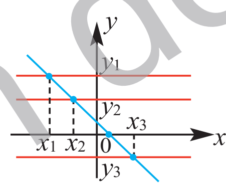
Не обратимая функция



Обратимая функция



Не обратимая функция

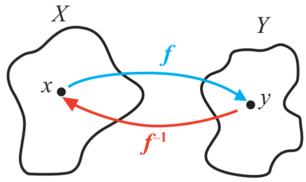


Обратимая функция

Обобщив всё сказанное, можно утверждать, что функция обратима тогда и только тогда, если она строго возрастает или убывает на области определения. Например, функции $f(x) = -x$, $f(x) = x^3$ и $g(x) = \sqrt{x}$ обратимые функции.

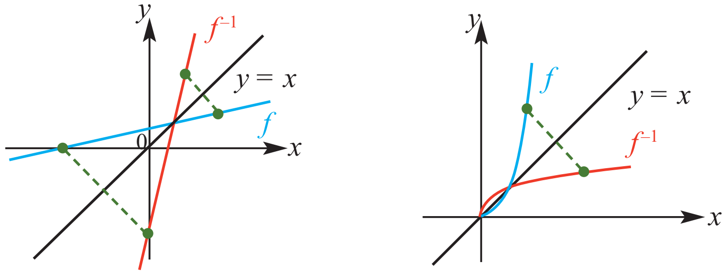
Тема обратные функции охватывает такие навыки как: определение обратной функции для функции заданной формулой, нахождение области определения и множества значений обратной функции для функции, заданной множеством точек, определение существования функции, обратной для функции заданной графически, а также широкий спектр знаний как по алгебре, так и по различным темам, связанным с функциями.

График, область определения и множество значений функции и функции обратной данной



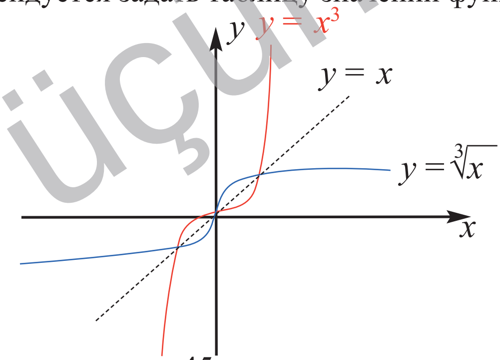
$f = \{(-2;2), (-1;1), (0;0), (1;3), (2;5)\}$. $\quad g = \{(2;-2); (1;-1); (0;0); (3;1); (5;2)\}$.
Как видно из схематичного представления, область определения и множество значений для функции и функции, обратной для данной, меняются местами. Значит, их графики, также должны быть противоположны. Графики взаимно обратных функций зеркально-симметричны относительно оси $y = x$.

Если задан график функции f, то график обратной функции можно получить преобразовав его относительно прямой $y = x$.

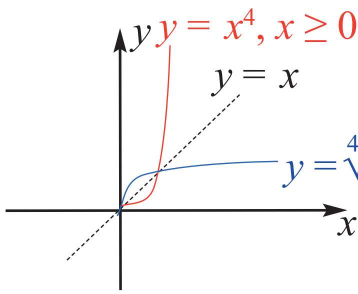


? Решение некоторых заданий из учебника

У.9 Решение: а) как областью определения, так и множеством значений функции $f(x) = x^3$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$. При любых $x_1 < x_2$ значения $x_1^3 < x_2^3$ и функция является возрастающей. В $y = x^3$ выразим x через y. Получим $x = \sqrt[3]{y}$. Поменяв местами x и y, обратную функцию можно записать в виде $y = \sqrt[3]{x}$. Отобразив кубическую параболу $y = x^3$ симметрично относительно прямой $y = x$, получим график функции $y = \sqrt[3]{x}$. Область определения функции $y = \sqrt[3]{x}$ $D(f) = (-\infty; +\infty)$, множество значений $E(f) = (-\infty; +\infty)$. Рекомендуется задать таблицу значений функции $y = \sqrt[3]{x}$ и построить её график.



б) Для функции $y = x^4$, $x \geq 0$ $D(f) = [0; +\infty)$; $E(f) = [0; +\infty)$, $0 \leq x_1 < x_2$, при $x_1^4 < x_2^4$ функция является возрастающей. Значит для неё существует обратная функция и эта обратная функция возрастающая. В равенстве $x = \sqrt[4]{y}$ поменяв местами x и y, получим:
$y = \sqrt[4]{x}$ $D(\sqrt[4]{x}) = [0; +\infty)$, $E(\sqrt[4]{x}) = [0; +\infty)$
Графики функций $y = x^4$, $x \geq 0$ и $y = \sqrt[4]{x}$ симметричны относительно прямой $y = x$.



Обобщающие задания, также как и задания предусмотренные для суммативного оценивания предназначены для самооценивания.

У.7.Дано: $f(x) = x \cdot f(x-1)+2$. Найдите $f(2)$

Решение: в заданном отношении запишем последовательно значения $x=0$; $x=1$; $x=2$, принимая их во внимание на каждом следующем шаге.

При $x=0$, $f(0) = 0 \cdot f(-1) + 2=0 + 2 = 2$

При $x=1$, $f(1) = 1 \cdot f(0) + 2=1 \cdot 2 + 2 = 4$

При $x=2$, $f(2) = 2 \cdot f(1) + 2=2 \cdot 4 + 2 = 10$

У.13. а)Область определения для $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ находится из условия $x - 1 \neq 0$.

Отсюда получаем, что функция не определена при $x \neq 1$. $D(f) = (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$

б) В формуле $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$, запишем $x = t - 4$.

$f(t - 4)=\dfrac{t-4+2}{t-4-1} = \dfrac{t-2}{t-5}$. Отсюда получим $f(x-4) = \dfrac{x-2}{x-5}$

Чтобы найти x удовлетворяющие отношению $f(x-4) < 0$ надо решить неравенство $\dfrac{x-2}{x-5} < 0$. Применив метод интервалов, получим, что множеством решения неравенства является промежуток (2; 5).

Рабочий лист № 11

Имя _____ Фамилия______ Дата________

Для следующих функций запишите обратные функции.

1) $h(x) = \sqrt[3]{x} - 3$ 2) $g(x) = \frac{1}{x} - 2$ 3) $g(x) = -4x + 1$

Установите являются ли следующие функции взаимно обратными функциями.

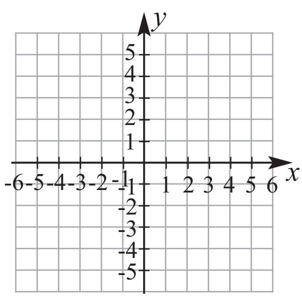
1) $f(n) = \frac{-16 + n}{4}$
$g(n) = 4n + 16$

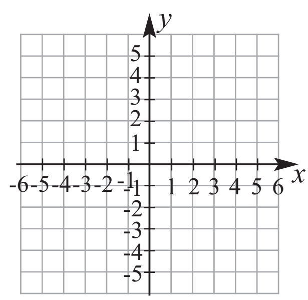
2) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$
$g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

3) $f(n) = \sqrt[3]{n - 3}$
$g(n) = 3 + n^3$

Для следующих функций найдите обратные функции и постройте их графики.

1) $f(x) = -1 - \frac{1}{5}x$ 2) $g(x) = \frac{1}{x - 1}$

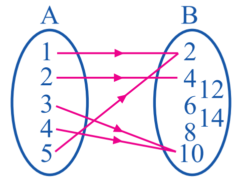




Функции.Таблица критериев суммативного оценивания

N	Критерий	Примечание
1	Определяет является или нет зависимость функцией	
2	Определяет свойства функции (область определения и множество значений, нули функции, промежутки возрастания и убывания, чётность или нечётность)	
3	Записывает формулу кусочно-заданной функции. , строит её график и находит значения	
4	Строит графики степенной функции с чётной и нечётной степенью	
5	Представляет графически, аналитически или описывает словесно преобразование функции из основной функции	
6	По таблице значений, графику заданной функции определяет существование обратной функции и аналитически находит формулу	
7	Записывает новую функцию, выполняя действия над функциями	
8	Записывает формулу заданной сложной функции и находит её значение	

Урок 18. Функции. Задания для суммативного оценивания



1) Можно ли зависимость, заданную графом для множеств A и B назвать функцией? Обоснуйте своё мнение.

2) Какое утверждение является областью определения функции $f(x) = -\sqrt{-4x+5}$?

a) при всех действительных значениях x

b) множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условию $x \leq -1{,}25$

c) множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условию $x \geq 1{,}25$

d) множество всех действительных чисел, удовлетворяющих условию $x \leq 1{,}25$

3) Напишите основные функции, соответствующую следующим функциям. Запишите соответствующие преобразования словами.

а) $f(x) = 4x-1$ б) $h(x) = 2(x-4)^2 + 3$ в) $g(x) = |x-2| + 4$ г) $m(x)=\sqrt{x+2} - 1$

4) Какая функция выражает преобразование функции $y = x^3$ симметрично относительно оси x и смещением вниз на 4 единицы?

а) $f(x) = -(x-4)^3$ б) $f(x) = -x^3 - 4$ в) $f(x) = -x^3 + 4$ г) $f(x) = -(x+4)^3$

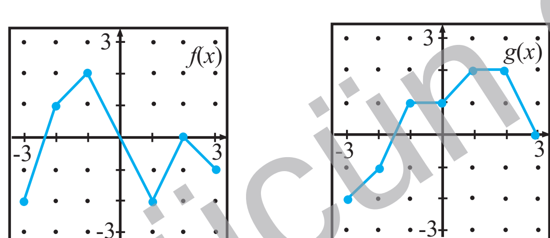
5) Запишите область определения следующих функций в виде промежутков.

а) $f(x) = \sqrt{x-3}$ б) $f(x) = -x^2 - 3$ в) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

6) На каком промежутке функция $y = -0{,}5(x+3)^2 + 4{,}5$ возрастает?

а) $(4{,}5; \infty)$ б) $(-3; 4{,}5)$ в) $[-3; +\infty)$ г) $(-\infty; -3]$

7) По заданному графику найдите значение сложной функции.

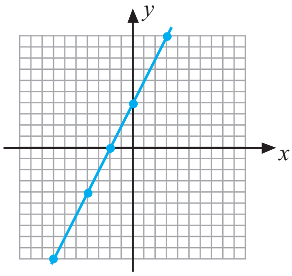


а) $(f \circ g)(1)$ б) $(f \circ f)(1)$ в) $(g \circ f)(1)$ г) $(g \circ g)(0)$

8) Для функций $f(x) = x^2 - 3$ и $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ решите неравенство $f(g(x)) \leq 0$.

9) Дан график функции $y = 2x + 4$.

а) Постройте график обратной функции.



б) Запишите преобразование координат $(x; y) \rightarrow (y; x)$

$(-7; -10) \rightarrow$

$(-4; 4) \rightarrow$

$(-2; 0) \rightarrow$

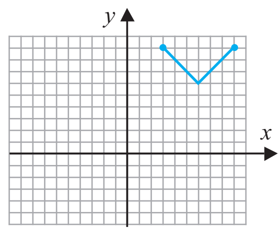
$(0; 4) \rightarrow$

$(3; 10) \rightarrow$

в) Найдите формулу обратной функции алгебраическим способом.

10) Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Постройте график функции $g(x) = 2 \cdot f(x+4) + 1$

11) Запишите новые координаты трёх точек, при отражении графика функции относительно оси x.



12) Постройте график кусочно-заданной функции.

$$f(x) = \begin{cases} 3, \text{ если } -1 \leq x < 2 \\ 5, \text{ если } 2 \leq x < 4 \\ 8, \text{ если } 4 \leq x < 9 \\ 10, \text{ если } 9 \leq x < 12 \end{cases}$$

13) Для функций $f(x) = 4x + 6$ и $g(x) = x - 9$ найдите формулу $(f \circ g)(x)$?

а) $4x - 54$ б) $4x - 3$ в) $4x - 30$ г) $4x^2 - 30x - 54$

14) Точка $N(-2;1)$ расположена на графике функции $f(x) = x^3 - x + m$. Найдите $f(-1)$.

15) Исследуйте функцию на чётность и нечётность $f(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$.

16) Если $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x + 2$, то найдите :

а) $f(0)$ б) $f(1)$ в) $f(x)$

2. Точка, прямая и плоскость в пространстве

Таблица планирования

Содержательный стандарт	№ урока	Тема	Кол-во часов	Стр. учебника
3.1.2. Решает задачи на взаимное расположение прямых и взаимное расположение плоскостей в пространстве. 3.1.3. Знает как определить угол между прямой и плоскостью и угол между двумя плоскостями в пространстве и применяет при решении задач. 3.1.4. Применяет теорему о трёх перпендикулярах и обратную теорему.	19	Точка, прямая и плоскость в пространстве.	1	44-45
	20	Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	1	46-47
	21-23	Параллельность прямой и плоскости. Перпендикулярность прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.	3	48-51
	24	Теорема о трёх перпендикулярах	1	52-53
	25-26	Угол между двумя плоскостями. Двугранный угол. Перпендикулярные плоскости.	2	54-58
	27-29	Параллельные плоскости. Проекции. Решение задач.Обобщающие задания.	3	59-65
	30	Прямая и плоскость в пространстве. Задания для суммативного оценивания.	1	
	Всего		12	

Урок 19. Учебник стр. 44-45. Точка, прямая и плоскость в пространстве

Содержательный стандарт

3.1.2. Решает задачи на взаимное расположение прямых и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Математический словарь: пространство, плоскость, точка, прямая, компланарные точки, коллинеарные точки.

Навыки, формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

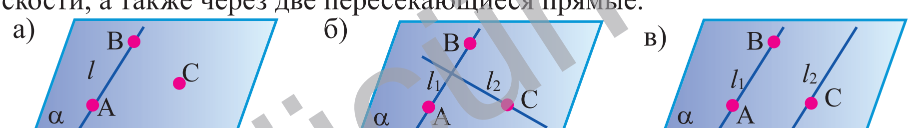
Рабочие листы

- *моделирует понятия точки, прямой и плоскости в реальной ситуации;*
- *представляет понятие плоскости при помощи доказательства соответствующих теорем и решая задачи геометрически;*
- *графически представляет взаимное расположение прямых.*

Приводятся примеры моделей точки, прямой и плоскости в пространстве. Моделью точки в пространстве является мяч брошенный вверх(теннис, волейбольный мяч и.т.д.), птица в небе, самолёт и т.д. Относительно земли их можно принять за точку. Моделью точки на плоскости является крупица песка на столе (соли, сахарного песка и т.д.), утки, плавающие в озере, звезда на небе. Моделью прямых на плоскости может являться трубопровод, линии электропередач. Рёбра пространственных фигур являются моделями прямых линий. Грани пространственных фигур являются моделями плоскостей. Вид здания с различных сторон является моделью плоскости. .

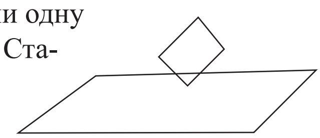
Представление пространства формируется на наглядных примерах. Модели для урока всегда можно создать из подручных вещей в классе. Например, карандаш модель прямой линии, поверхность классной доски, стены, пола и потолка могут быть использованы в качестве модели плоскости.

Учащиеся понимаю, что для существования плоскости необходимо три точки, не лежащие на одной прямой.Желательно, чтобы учащиеся сами, на примерах, объясняли смысл аксиом. Например, если дверь закреплена в двух “точках”(петлями) она свободно поворачивается, т.е. открывается и закрывается, но если её закрепить третьей “точкой” (закрыть на крючок), то дверь не будет крутиться, т.е.дверь “находится” на плоскости стены. Таким образом исследуется результат - плоскость можно провести через прямую и точку не принадлежащую плоскости, а также через две пересекающиеся прямые.



Точки, расположенные на одной прямой называются коллинеарными .
Точки, расположенные на одной плоскости, называются компланарными.

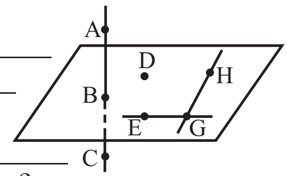
Два параллелограмма, вырезанные из картона, можно расположить в двух разных плоскостях так, чтобы они имели одну общую точку (вершина одного из параллелограммов). Ставится следующий вопрос:



«Может ли эта модель являться примером того, что эти плоскости имеют одну и только одну общую точку?»
Учащиеся понимают, в заданной модели не представлена прямая, которая проходит через общие точки плоскостей.

Точка, прямая и плоскость в пространстве геометрически может быть рассмотрена на пространственной фигуре или как в следующем задании.

1) Обозначьте плоскость тремя буквами _______
2) В какой точке прямая AC пересекает плоскость? ______
3) В какой точке пересекаются прямые HG и GE? _____
4) Запишите три коллинеарные точки: _______
5) Покажите точки, не расположенные на плоскости: ______
6) Можно ли точки H, D, E и B назвать компланарными? ______
7) Изобразите и отметьте
а) плоскость ABC б) плоскость α
8) Прямую PR, пересекающую плоскость ABC в точке M
в) Точку M не принадлежащую плоскости α
г) Неколлинеарные точки L, P, T

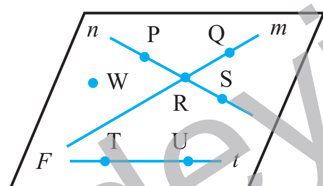


Оценивание навыков доказывать простейшие геометрические понятия

Запишите соответствующие буквы соответствующие доказательствам и геометрически изобразите один из примеров.

Выполните задание по рисунку.

а) Запишите 4 различных вариантов обозначения плоскости на рисунке.
б) Запишите обозначения трёх неколлинеарных точек
в) Запишите три коллинеарные точки



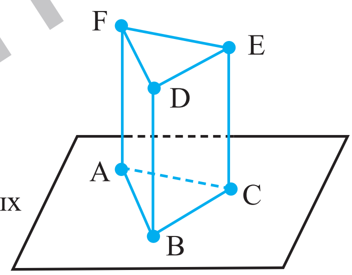
Выполните задание по рисунку.

а) Сколько плоскостей на рисунке?

б) Запишите как обозначены плоскости.

в) Запишите обозначение трёх точек, компланарных точке B.

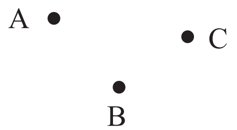
г) Каким плоскостям принадлежит точка B.



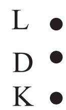
Рабочий лист №1

Имя ________ Фамилия___________ Дата________________

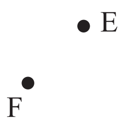
1) Возьмите в кружок ответ “да” или “нет”, соответствующий вопросу “Через данные точки можно провести одну и только одну плоскость”. Обоснуйте мнение при помощи геометрически изображений.

а)


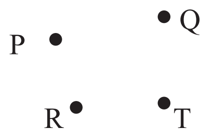
да нет

б)


да нет

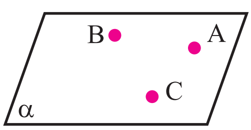
в)


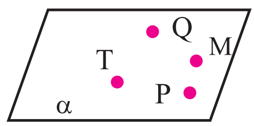
да нет

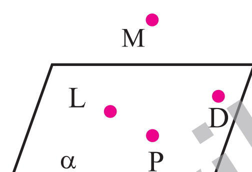
г)


да нет

2) Выберите один из ответов “да” или “нет” при ответе на вопрос “Являются или нет данные точки компланарными? Ответ обоснуйте и запишите.

а) да нет


б) да нет


в) да нет


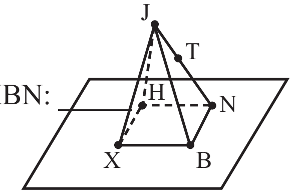
____

____

3) Изобразите следующее. Обозначьте.
а) точки R, S, T, E компланарные плоскости α
б) на плоскости α коллинеарные точки A, B, C, D

4) Выполните по рисунку.

а) Сколько плоскостей на рисунке? _____
б) На какой плоскости расположена точка H ? ______
в) Запишите три коллинеарные точки: ______
г) Запишите две точки, не принадлежащие плоскости XBN: ______
д) Запишите 4 компланарные точки: _______
е) запишите прямую, если точка J
не расположена на этой прямой ______
ж) Запишите три неколлинеарные точки ______



Урок 20. Учебник стр. 46, 47. Взаимное расположение прямых и взаимное расположение плоскостей в пространстве

Содержательный стандарт

3.1.2. Решает задачи на взаимное расположение прямых и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

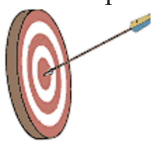
Навыки, формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

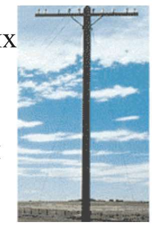
Рабочие листы

- *выражает словами и изображает геометрические свойства взаимного расположения прямых в пространстве;*
- *выражает словами и изображает геометрические свойства взаимного расположения плоскостей в пространстве;*

В пространстве моделирует взаимное расположение прямых и прямых и плоскостей в пространстве на примере реальных ситуаций.

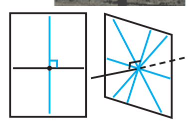


Модель прямой, которая пересекает плоскость.



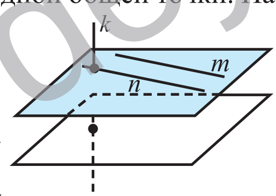
Модель взаимного расположения прямых и прямых и плоскостей в пространстве.

Учащиеся понимают, что на плоскости через заданную точку прямой можно провести один перпендикуляр, в пространстве же из одной точки можно провести бесконечно много перпендикуляров.



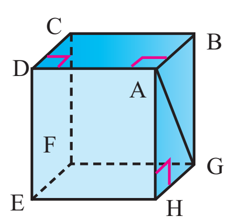
Определение каждой теоремы из учебника, её геометрическое представление и доказательство обсуждается с учащимися в классе, поле чего рекомендуется повторить в качестве домашнего задания. Также очень важно, чтобы учащиеся демонстрировали понимание теоремы на прикладных примерках.

В пространстве прямые могут быть параллельными, пересекаться, совпадать или скрещиваться. У параллельных прямых нет ни одной общей точки, у пересекающихся - одна общая точка и совпадающих прямых более одной общей точки. На рисунке прямые m и n параллельные, m и k - скрещивающиеся, n и k - пересекающиеся прямые. Параллельные прямые расположены в одной плоскости. Однако скрещивающиеся прямые расположены в разных плоскостях. Эта задача обязательно должна быть рассмотрена на модели.



Для этого наиболее соответствует модель куба. Рёбра куба являются отрезками параллельных, пересекающихся и скрещивающихся прямых. Особое внимание уделяется умению учащихся **изображать** скрещивающиеся прямые. Можно попросить учащихся показать следующее:

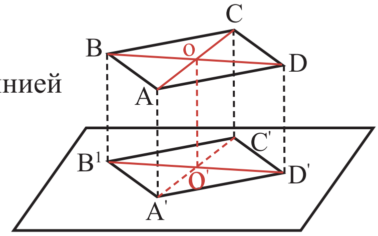
а) прямую(ые) параллельную CD и содержащую точку A;
б) прямую(ые) скрещивающуюся с CD и содержащую точку A;
c) прямую(ые) перпендикулярную CD и содержащую точку A.



Решение некоторых заданий из учебника

У.12 Решение: так как AA`|| BB`|| DD`|| CC`, то четырёхугольник ACC`A` является трапецией и OO` средняя линия.

$OO` = \frac{AA`+CC`}{2} = \frac{3+7}{2} = 5$



С другой стороны OO` также является средней линией трапеции BDD`B` г.

Так как $OO` = \frac{BB`+DD`}{2}$, то $5 = \frac{4 + DD`}{2}$.

Отсюда DD`= 6 см

Рабочий лист №2

Имя_________ Фамилия____________ Дата__________________

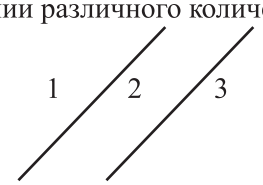
1) **Умения объяснять простые геометрические понятия.** Запишите пропущенные слова.

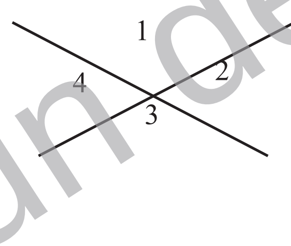
Прямая линия состоит их __________ точек.
a) двух b) трёх c) бесконечного множества d) одной

Пересечением двух прямых является __________.
a) точка b) отрезок c) луч d) плоскость

Пересечением прямой и плоскости является ___________________________ .
a) отрезок b) луч c) плоскость d) точка

2) При различных расположениях прямые могут разбивать плоскость на различное количество частей. Например, две параллельные прямые разбивают плоскость на три части, две пересекающиеся прямые - на четыре части. Принимая это во внимание предлагается заполнить таблицу, которая отображает информацию о наибольшем количестве частей, образующихся при различном расположении различного количества прямых.





Количество прямых на плоскости	0	1	2	3	4
Наибольшее количество частей, на которые разбивается плоскость					

Запишите правило по которому меняется количество частей.

Урок 21-23. Учебник стр. 48-51. Параллельность прямой и плоскости. Перпендикулярность прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

Содержательный стандарт

3.1.2. Решает задачи на взаимное расположение прямых и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Умение формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *геометрически изображает угол между прямой и плоскостью*

Математический словарь

- проекция

На 1 уроке доказывается теорема о признаке параллельности прямой и плоскости и обсуждаются полученные результаты.
Упражнение У2.создаёт условие для более глубокого изучения темы и обсуждается вместе со всем классом.
Все учащиеся должны чётко представлять как могут располагаться прямая и плоскость, формулировать теорему и представлять смысл на соответствующих моделях.

Учащиеся должны продемонстрировать умение строить различные углы между прямой и плоскостью. В этот момент надо обратить особое внимание на умение строить проекцию. Ученики должны понимать, что решение многих задач на нахождение угла между прямой и плоскостью сводится к задачам на построение и решение прямоугольного треугольника .

Можно рассмотреть следующий пример:
Пусть на плоскости задана прямая. Существует ли прямая, не принадлежащая плоскости и перпендикулярно пересекающая заданную прямую?
Учащиеся должны понять, что таких прямых бесконечно много. Возможно ли, что для построенной прямой существует не одна, а две перпендикулярные пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости?
Возможность таких случаев иллюстрируется на различных моделях..

Учащиеся должны уметь геометрически записывать и объяснять устно взаимное расположение прямой и плоскости следующим образом:
- длина перпендикуляра от заданной точки до плоскости короче длины наклонной, проведённой из этой точки;
- расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, проведённого из этой точки до плоскости;
- расстояние от точки, взятой на прямой параллельной плоскости, равно расстоянию от этой точки до плоскости.

На 2-ом уроке изучается перпендикулярность прямой и плоскости. Доказательство теоремы о признаке перпендикулярности прямой и плоскости представлено в учебнике. Проводится поэтапное обсуждение доказательства теоремы.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.9 Решение:

Дано:

$AD \perp \alpha$

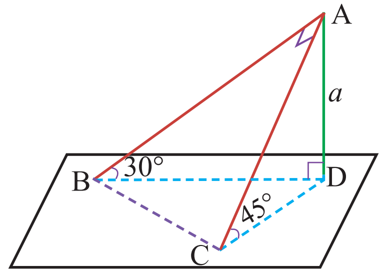
$\angle ABD = 30°$

$\angle ACD = 45°$

$\angle BAC = 90°$

$AD = a$

Найдите: $BC = ?$



Решение

Так ка в ΔABD длина катета, лежащего напротив угла 30° равна *a,* то гипотенуза будет $2a$:$AB = 2a$

Так как в ΔACD острый угол равен 45° , то длины катетов равны:

$CD = AD = a$. Отсюда $AC = \sqrt{2}a$

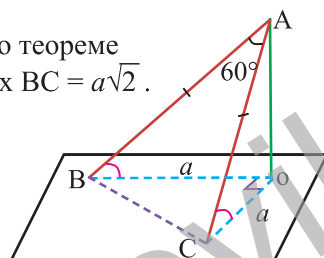
Из ΔBAC $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 2a^2} = a\sqrt{6}$

У.10 Так как *a* является проекциями наклонных, то по теореме Пифагора расстояние между основаниями наклонных $BC = a\sqrt{2}$.

По условию ΔABC равносторонний треугольник:

$AB = AC = BC = a\sqrt{2}$

Из ΔAOB получаем $\cos\angle ABO = \dfrac{BO}{AB} = \dfrac{a}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Тогда угол между наклонной и проекцией равен 45° .

У.11 б)

Дано:

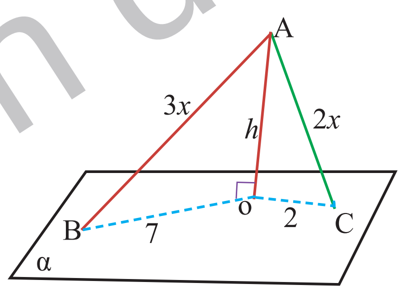
$AO \perp \alpha$

$AC:AB=2:3$

$OC = 2$ см

$OB = 7$ см

Найдите: AC и AB



Решение: обозначим $AC=2x$; $AB=3x$; $AO=h$.

По теореме Пифагора ΔAOC $h^2=4x^2-4$,

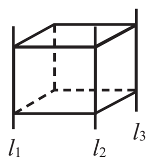
Из ΔAOB получаем $h^2=9x^2-49$. Отсюда находим $9x^2-49=4x^2-4$, $5x^2=45$, $x=\pm3$. С геометрической точки зрения $x=3$. Значит, $AC=2\cdot3=6$ см; $AB=3\cdot3=9$ см.

Рабочий лист № 3

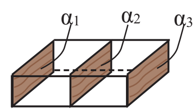
Имя ________ Фамилия___________ Дата______________

По заданному рисунку определите какие из данных высказываний верны, а какие нет. Перечертите рисунок в тетрадь и запишите ответ.

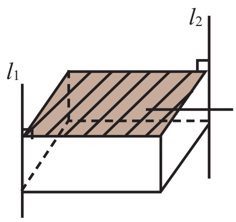
1. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.



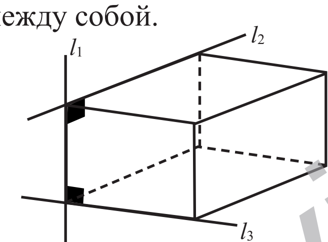
2. Если две плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.



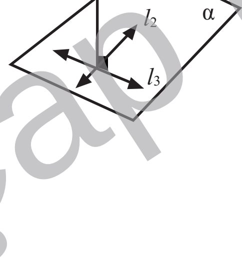
3. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны между собой.



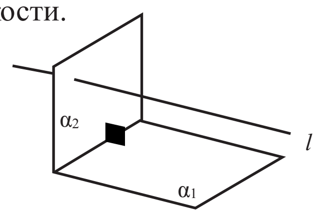
4. Если две прямые перпендикулярны одной и тоже прямой, то они параллельны между собой.



5. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, расположенным на плоскости, то прямая перпендикулярна этой плоскости.



6. Если прямая параллельна одной из двух перпендикулярных плоскостей,то она параллельна и другой плоскости.



Урок 24. Учебник стр. 52, 53. Теорема о трёх перпендикулярах. 1 час

Содержательный стандарт

3.1.4. Применяет теорему о трёх перпендикулярах и обратную теорему.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

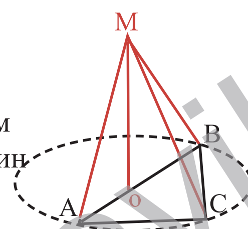
- *в пространстве находит расстояние от заданной точки до вершин и сторон многоугольника, расположенного на плоскости.*

Каждый учащийся должен уметь при помощи реальных предметов моделировать, формулировать и представлять геометрически теорему о трёх перпендикулярах.

Определённая часть урока отводится формированию понятия расстояния от точки до плоскости. Сначала выполняются задания, в которых надо найти расстояние от точки до прямой и между двумя параллельными прямыми.

? Решение некоторых заданий из учебника.

У.3 Решение: В ΔABC $\angle C=90°$
$AC=6$ и $BC=8$,тогда по теореме Пифагора $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$
Для ΔABC центр описанной окружности O является
середина гипотенузы AB: $AO= OB=5$
Произвольная точка на перпендикуляре, восстановленном
из точки O находится на одинаковом расстоянии от вершин
треугольника. По условию $MA=MB=MC=13$
Из ΔAOM находим
$MO = \sqrt{MA^2 – AO^2} = \sqrt{13^2 – 5^2} = 12$ см.



Урок 25-26. Учебник стр. 54-58. Угол между двумя плоскостями. Двугранные углы. Перпендикулярные плоскости. 2 часа

Содержательны стандарт

3.1.2. Решает задачи на взаимное расположение прямых и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Навыки, формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

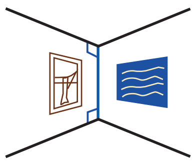
- *моделирует взаимное расположение плоскостей в реальной ситуации*
- *выражает словами и доказывает теорему о перпендикулярности плоскостей, моделирует в реальной ситуации*

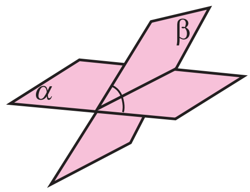
● *геометрически представляет двугранный угол как угол между двумя плоско-стями,определяет меру соответствующего линейного угла.*

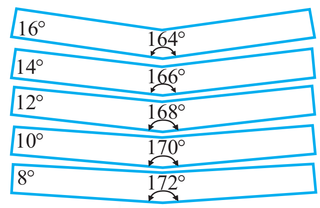
Математический словарь

- двугранный угол
- линейный угол

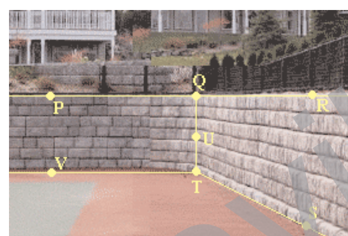
Особое внимание уделяется реальным моделям двугранного угла и умению изоб-разить их геометрически. Взаимное расположение плоскостей зависит от меры соответствующего линейного угла.Учащиеся демонстрируют изменение угла между двумя плоскостями от 0° до 180° на примере модели (двух листов). Надо уделить внимание, чтобы задание было выполнено каждым учащимся.







Коробка а рисунке может является моделью вза-имного расположения плоскостей. Учащиеся должны показать на примере модели коробки перпендикулярные плоскости.



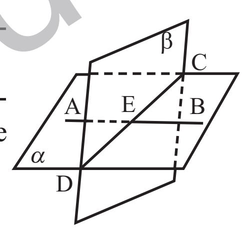
Данный рисунок также может являться моделью взаимного расположения плоскостей.

Учащиеся должны представить перпендикуляр-ность плоскостей STV, PQT, RQT.

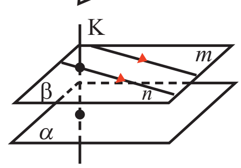
Ученики должны уметь геометрически представлять плоскости, в соответствии с заданным условием.

Например, учащиеся могут геометрически изобразить усло-вия, заданные ниже.

1) плоскости α и β пересекаются по прямой CD. E точка пе-ресечения прямых AB иCD. Точки A,B,C,D,E компланарные и расположены на плоскости α.



Учащиеся обсуждают, что некоторые утверждения спра-ведливы всегда, некоторые иногда, а некоторые никогда. Например, учащиеся доказывают, что утверждение “две пересекающиеся прямые расположены в разных плоско-стях” справедливо иногда изображая геометрическими. Прямые *n* и *k* пересекаются, однако расположены в раз-ных плоскостях на рисунке.

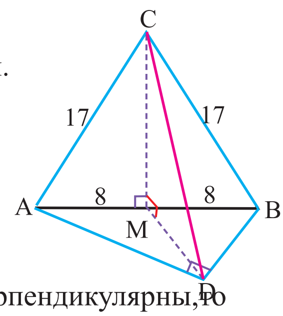


Учащимся рекомендуется создать презентацию о прямой и плоскости, а также о перпендикулярности плоскостей . (Рабочий лист №4)

? Решение некоторых заданий из учебника

У16. Равнобедренные треугольники ABC и ABD с общим основанием AB расположены в перпендикулярных плоскостях. Найдите CD, если AB = 16 см, AC = BC = 17 см и $AD \perp CD$.

Решение: высота, проведённая из вершины равнобедренного треугольника является также медианой.



Так как $CM \perp AB$, то AM = MB = 8 см.

Из ΔACM по теореме Пифагора

$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ см

ΔADB равнобедренный прямоугольный треугольник и

$DM = \dfrac{AB}{2} = 8$ см. Так как плоскости треугольников перпендикулярны, то ясно, что $CM \perp MD$. Из ΔCMD по теореме Пифагора имеем:

$CD = \sqrt{CM^2 + MD^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ см.

Урок 27-29. Учебник стр. 59-65. Параллельные плоскости. Проекция. Решение задач. Обобщающие задания. 3 часа

Содержательный стандарт

3.1.2. Решает задачи на взаимное расположение прямых и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

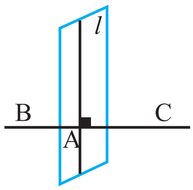
- *объясняет параллельность плоскостей на примере реальных жизненных ситуаций, моделирует при помощи реальных предметов*
- *высказывания о перпендикулярности выражает словами и доказывает теорему изображая их геометрически, моделирует на примере реальных ситуаций*

Надо рассмотреть случаи, где отрезок прямой или проецируемый на плоскость отрезок пересекает плоскость или не пересекает плоскость (представляя на модели). В кабинете необходимо развесить плакаты, с изображением отрезка и ортогональных проекций некоторых фигур .

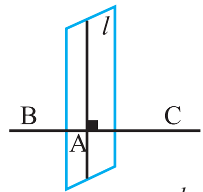
Рабочий лист № 4

Имя ________ Фамилия___________ Дата________________

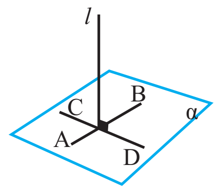
1. Из точки вне плоскости до этой плоскости можно провести один и только один перпендикуляр.



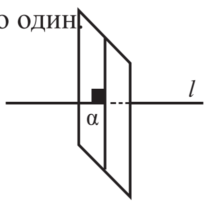
2. От точки на прямой существует одна и только одна плоскость перпендикулярная данной прямой.



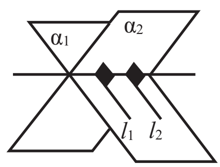
3. Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых на плоскости, то она перпендикулярна самой плоскости.



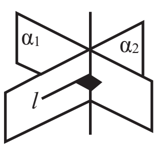
4. Через заданную точку и заданную прямую можно провести перпендикулярную плоскость и притом только один.



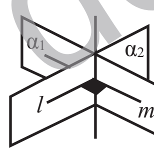
5. Если две прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они расположены в одной плоскости.



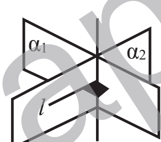
6. Две плоскости перпендикулярны друг другу тогда или только тогда, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости .



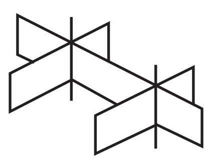
7. Если прямая перпендикулярна плоскости, любая прямая, проходящая через точку пересечения прямой с плоскостью и перпендикулярная заданной прямой лежит в плоскости.



8. Если прямая перпендикулярна плоскости, то любая плоскость, проходящая через эту прямую также перпендикулярна данной плоскости.



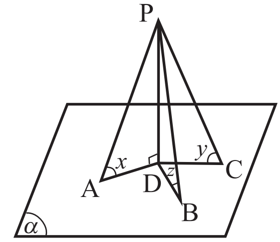
9. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения также параллельны.



Рабочий лист № 5

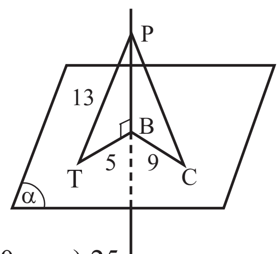
Имя ________ Фамилия___________ Дата________________

Известно, что PD⊥α $\angle PAD = x$, $\angle PCD = y$, $\angle PBD = z$ и $x < z < y$. Зная, что PA = 10 см и PC = 6 см какому целому числу может равняться длина PB?



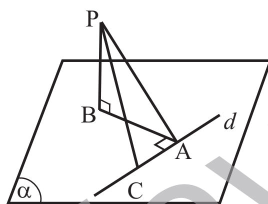
A

Найдите PC по рисунку.

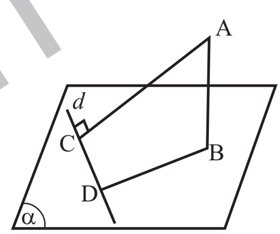


а) 15 б) 16 в) 18 г) 20 д) 25

PB ⊥ α
BA ⊥ d
PB = 12 см
BA = 16 см
AC = 4 см
$S_{\Delta PAC}$ = ?

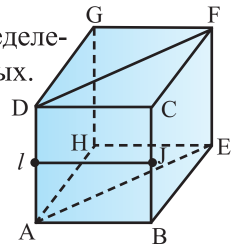


AB ⊥ α
AC ⊥ d
AC = 6 см
AB = $2\sqrt{3}$ см
CD = 3 см
BD = ?



В качестве малого проекта можно начертить план улицы, на которой вы живёте в пространстве как взаимное расположение плоскостей и создать из картона трёхмерный макет. Это служит формированию практических навыков, таких как конструирование, чтение карт, а также развития пространственного мышления, когнитивности и умения мыслить.

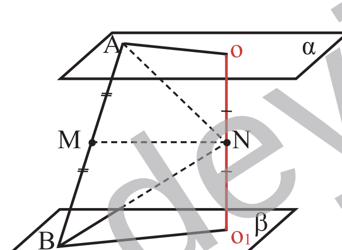
Деятельность класса заключается в обсуждении теорем, определений и геометрического представления параллельности прямых. Для проверки правильности понимания теорем и определения о параллельности плоскостей, можно выполнить следующие задания(с обсуждением). Объявляется следующее-некоторые из следующих высказываний истины, некоторые - ложные.а) Если высказывание верно, то обоснуйте на примере(в виде рисунка). б) Если высказывание ложно, то обоснуйте на примере (в виде рисунка).



- если две плоскости перпендикулярны друг другу, то прямая параллельная одной из плоскостей, перпендикулярна другой.
- две плоскости, параллельные одной прямой параллельны между собой.
- две прямые перпендикулярные одной и той же прямой параллельны.
- если две прямые не пересекаются, то они параллельны.
- две плоскости перпендикулярные одной и той же плоскости параллельны.
- две прямые, параллельные одной и той же плоскости параллельны между собой.

У.10 Решение:

Дано: $\alpha \| \beta$ $OO_1 \perp \alpha$ $OO_1=4$ см
$AB=6$ см; $AO=O_1B=3$ см;
$AM=MB$; $ON=NO_1$
Найдите: $MN=?$



Решение

По условию $ON=NO_1=2$ $AM=MB=3$
Из ΔAON $AN=\sqrt{AO^2+ON^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
Из ΔBON $BN=\sqrt{BO^2+O_1N^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
Значит, ΔANB равнобедренный. Поэтому $NM \perp AB$.
$MN=\sqrt{AN^2-AM^2}=\sqrt{(\sqrt{13})^2-2^2}=3$ см.

! Обсуждается формула нахождения площади ортогональной проекции $S_n = S_ф \cdot \cos \varphi$. Для применения этой формулы надо правильно определить угол φ.

У 5. (стр. 64) Решение: сначала запишем формулу нахождения площади равностороннего треугольника со стороной a: $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Затем, при помощи формулы $S_n = S_ф \cdot \cos \varphi$ для заданного значения φ угла вычислим площадь ортогональной проекции

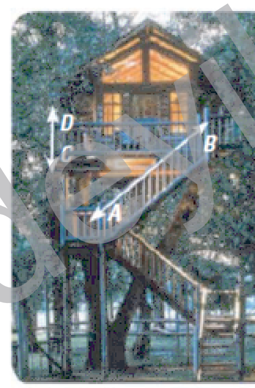
При $\varphi = 30^o$ $S_n=\frac{3a^2}{8}$ при $\varphi = 45^o$ $S_n=\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$ при $\varphi = 60^o$ $S_n=\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

Точка, прямая и плоскость в пространстве. Таблица критериев суммативного оценивания

N	Критерий	Примечание
1	Формулирует утверждения для определения плоскости и изображает их геометрически	
2	Формулирует взаимное расположение точек и прямых, изображает их геометрически и решает задачи	
3	Формулирует взаимное расположение прямой и плоскости, изображает их геометрически и решает задачи	
4	Формулирует определение и теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости и представляет их геометрически. Применяет при решении задач.	
5	Применяет теорему и утверждения о перпендикулярности двух плоскостей при решении задач	
6	Применяет теорему и утверждения о параллельности двух плоскостей при решении задач	
7	Изображает ортогональную проекцию фигуры и решает задания	

Урок 30. Точка, прямая и плоскость в пространстве.

Задания для суммативного оценивания



1) По рисунку установите какое утверждение верно, а какое ложно.
- пол деревянного дома параллелен земле.
- перила конструкции лестницы вдоль линий AB и CD являются скрещивающимися прямыми.
- все вертикальные трубы конструкции лестницы перпендикулярны как земле, так и плоскости пола.

2) Изобразите следующее.

а) Три прямые расположены в одной плоскости и пересекаются в одной точке.

б) Точки A,B,C,D,E расположены в плоскости α и являются компланарными точками. Прямая AD пересекается с прямой CE в точке B. Прямые MA и ME пересекают плоскость α. Прямая MB перпендикулярна плоскости α.

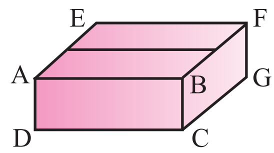
3) Оба утверждения имеют неточности. Определите их и запишите верное утверждение.

а) Через три любые точки можно провести одну плоскость.

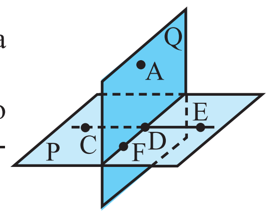
б) Если две плоскости пересекаются, то их пересечение плоскость.

4) Отметьте три неколлинеарные точки M, K,L. Соедините точки M и K и на этом отрезке отметьте точку P. Соедините точку P с точкой L.

5) Выполните задания по рисунку.
- запишите плоскости, содержащие точку B.
- запишите прямую по которой пересекаются плоскости BAD и FGC
- запишите две пары скрещивающихся прямых
- запишите две параллельные плоскости и перпендикулярную им прямую .



6) Запишите следующие высказывания по изображении на рисунке:
- через две точки можно провести одну и только одну прямую
- через три точки, не лежащие на одной прямой можно провести только одну плоскость.



7) Дано:

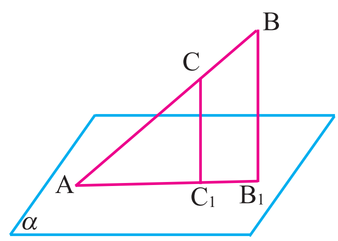
$A \in \alpha$

$C \in AB$

$BB_1 \parallel CC_1$

$AC : CB = 2:3$

$BB_1 = 15$ см



Найдите: CC_1=?

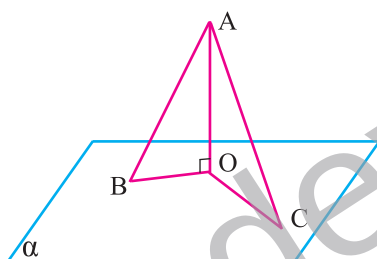
8) Дано:

$AO \perp \alpha$

$AB = 10$ см

$BO = 6$ см

$CO = 15$ см



Найдите: AC=?

9) Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Из вершины прямого угла к плоскости треугольника восстановлен перпендикуляр длиной 1 см. Найдите расстояние от вершины перпендикуляра до гипотенузы.

10) Внутри двугранного угла на расстоянии 3 см от каждой грани взята точка, которая удалена от его ребра на расстояние 6 см. Найдите линейный угол двугранного угла.

11) Концы отрезка не пересекающего плоскость удалены от неё на расстояние 15 см и 7 см. Найдите расстоянии от середины отрезка до плоскости.

3. Тригонометрические функции произвольного угла

Таблица планирования

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
1.2.3 Знает основные тригонометрические тождества и применяет их при упрощении тригонометрических выражений. 2.1.1. Знает определение радианной меры угла и тригонометрический функций произвольного угла, применяет их при решении задач. 2.1.2.Знает и применяет формулы приведение для тригонометрических функций. 2.1.3. Знает и применяет формулы сложения и их следствия для тригонометрических функций.	31,32	Угол поворота. Радианная и градусная мера угла.	2	67-71
	33-35	Длина дуги. Площадь сектора. Линейная скорость. Угловая скорость.	3	72-75
	36-38	Тригонометрические функции. Тригонометрические функции произвольного угла.	3	76-82
	39, 40	Единичная окружность и тригонометрические функции произвольного угла	2	83-85
	41, 42	Формулы приведения.	2	86-89
	43, 44	Тригонометрические тождества	2	90-92
	45-47	Формулы сложения	3	93-96
	48-50	Следствие из формул сложения	3	97-101
	51-53	Преобразование тригонометрических выражений.Обобщающие задания.	3	102-105
	54	Тригонометрические функции произвольного угла. Задания для суммативного оценивания.	1	
		Всего	24	

Урок 31,32. Учебник стр. 67-71. Угол поворота. Радианная и градусная мера угла. 2 часа

Содержательный стандарт

2.1.1. Знает определение радианной меры угла и тригонометрических функций произвольного угла, применяет их при решении задач.

Навыки формирующиеся у учащегося

- *моделирует угол как поворот луча из его начала.*
- *знает, что один полный оборот равен 2π или 360° и представляет геометрически и аналитически положительные и отрицательные меры любых углов.*
- *понимает радианное измерение угла.*
- *применяет связь между градусной и радианной мерой угла.*

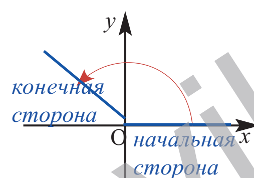
Математический словарь

- угол поворота
- конечная сторона угла
- положительный и отрицательный угол
- градус, радиан
- дуга
- сектор

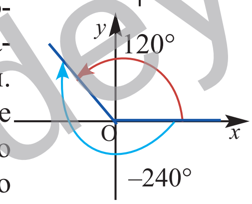
Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

1-й час. Определение угла поворота объясняется словесно, геометрически и на примере реальных ситуаций, как угол поворота луча вокруг его начальной точки. Важно, чтобы каждый учащийся в классе был привлечён для моделирования угла поворота. Ученики должны представлять, что одна сторона угла поворота остаётся постоянной -луч в направлении оси x, другая - является лучом, который поворачивается вокруг начала координат, в направлении по часовой стрелке или против часовой стрелки и моделировать это.

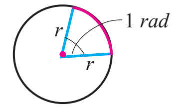


Геометрически уделяется внимание углам, конечные стороны которого совпадают друг с другом. Учащийся должен представлять геометрически, что конечная сторона положительного угла поворота 120° и конечная сторона отрицательного угла поворота –240°совпадают друг с другом. Абсолютной значение суммы этих углов равно 360°. Также даётся объяснение, что для угла, конечная сторона которого образует острый угол, существует бесконечное количество углов поворота, которые совпадают с ним. Например, для угла 45° существует бесконечно много углов, которые совпадают с ним.



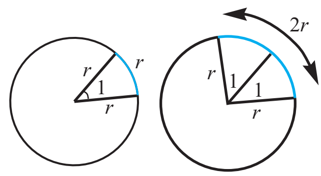
Уделяется внимание определению, в какой четверти расположена конечная сторона угла в зависимости от знака. Для примера, представлено геометрически в какой четверти расположены конечные стороны углов –75°, 114°, –240° .
Например, угол –75° расположен в 4 четверти.
Углы 0, ±90, ±180, ±270, ±360° являются граничными углами. Учащиеся должны понимать, что конечная сторона угла 380° расположена в 1 четверти и совпадает с углом 20°. На примерах представляются углы более 360° и расположенные во 2 четверти. Например, учащиеся должны дать ответ на вопрос принадлежит ли этой четверти угол, расположенный между 450°-540°.

2-ой час. Даётся объяснение радианной меры угла.Конечная сторона угла при вращении описывает дугу. Объясняется соответствие между длиной дуги, описываемой конечной стороной угла , измерения угла. Углом 1 радиан принято считать центральный угол, конечная сторона которого при вращении по окружности радиуса r описывает дугу, длина которой равна радиусу r.



Значит, если при повороте длина описанной дуги равна 2 радиусам, то этот угол равен 2 радианам.

По определению радиана, если центральный угол α соответствует длине дуги окружности l радиуса r, то $\frac{l}{r} = \alpha$.



Например, если радиус окружности равен 8 см, а длина дуги окружности равна 16 см, то соответствующий центральный угол равен 2 радианам. В учебнике даются примеры и задания, в которых зная радиус и длину дуги, надо найти радианную меру угла. Динамическую модель положительных и отрицательных углов поворота можно посмотреть по адресу https://www.geogebra.org/m/nC98H4NH в интернете.

Объясняется связь между радианной и градусной мерой угла. Даётся объяснение, что радианная мера целого оборота равна 2π радиан. Если длина окружности равна $2\pi r$, длина дуги соответствующая 1 радиану равна r , а значит окружность $2\pi r/r = 2\pi$ радиан.

2π радиан = 360°
π радиан = 180°
1 радиан ≈ 57°
180° = π радиан
$1° = \frac{\pi}{180}$ радиан

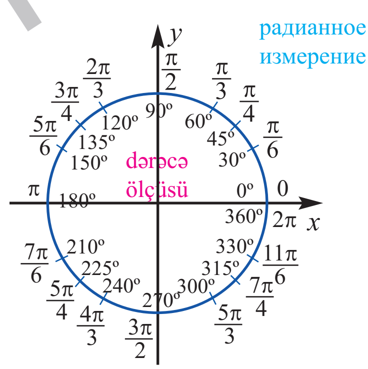
Ключевые знания:
для преобразования градусов в радианы умножаем на $\frac{\pi}{180}$.
для преобразования радиан в градусы умножаем на $\frac{180}{\pi}$.

То, что π рад=180º и запоминается, и при помощи этого равенства, зная, что радианная мера угла является частью π, можно легко перевести радианы в градусы.

Например, $\frac{\pi}{6} = 30°$, $\frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{3} = 60°$ и т.д.

Углы, соответствующие определённому повороту, выражаются в радианах. Например, исследуются градусные и радианные меры поворотов на 1/4 , половину, 3/4 , целый оборот. Ученикам в качестве домашнего задания задают выразить в градусах и радианах углы,имеющие большие измерения. Это задание важно для формирования умения приблизительно(визуально) определять меру угла.

Рекомендуется для формативного оценивания использовать рабочие листы.



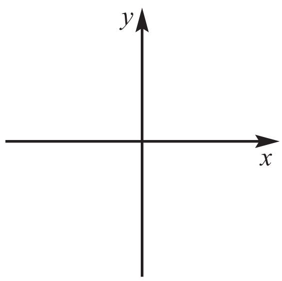
Для более полного представления радианной меры учащиеся должны изобразить этот угол и приблизительно установить радианную меру. Например, начертить углы 1,5 радиан, 3 радиана и т. д. Учащиеся зная, что 180°≈3,14 радиан могут приблизительно изобразить эти углы. Учащиеся понимают, что в отличии от градусной меры, радианная мера выражается маленькими числами и полный оборот равен приблизительно 6.

Рабочий лист № 1

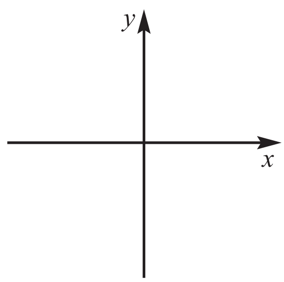
Имя _________ Фамилия______ Дата__________

1) Изобразите углы поворота.

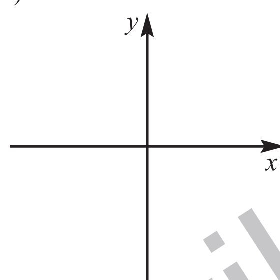
1) –10º



2) –175º



3) 290º



Определите в какой четверти расположена конечная сторона угла.

1) −75° 2) −110° 3) −264° 4) 654°

Определите углы конечные стороны которых совпадают друг с другом и имеют градусную меру от 0° до 360° .

1) 420° 2) −310° 3) 550° 4) –460° 5) 470° 6) −175°

Выразите углы, заданные в градусах в радианах, а заданные в радианах в градусах.

1) $-\frac{7\pi}{6}$ 2) $-\frac{5\pi}{6}$ 3) –45° 4) 225° 5) 15° 6) $\frac{5\pi}{3}$

Запишите один положительный и один отрицательный угол, конечные стороны которого совпадают с углом:

1) 120° 2) 380° 3) –410° 4) –45° 5) $-\frac{\pi}{3}$ 6) $\frac{11\pi}{6}$

Урок 33-35. Учебник стр. 72-75. Длина дуги. Площадь сектора. Линейная скорость. Угловая скорость. 3 часа

Содержательный стандарт

2.1.1. Знает определение радианной меры угла и тригонометрических функций произвольного угла, применяет их при решении задач.

Навыки формирующиеся у учащегося

- *применяет формулу вычисления длины дуги при решении задач*
- *применяет формулу вычисления площади сектора при решении задач*

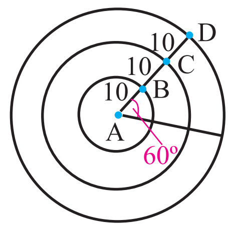
Математический словарь

- длина дуги
- площадь сектора
- линейная скорость
- угловая скорость

Дополнительные материалы

Рабочие листы

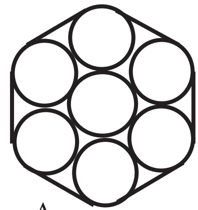
1-ый час.Длина дуги. Для того, чтобы учащиеся сами вывели формулу вычисления длины дуги им предлагается ответить на вопрос: " Что вы понимаете когда говорят длина дуги?Какими инструментами можно измерить длину дуги - линейкой или транспортиром? Как бы вы измерили длину дуги, при помощи линейки? Как бы вы измерили длину дуги при помощи транспортира?". Учащиеся должны понять, что дуга окружности часть длины окружности. Если окружность 360°, то длина дуги,соответствующая заданному центральному углу находится как часть длины окружности ($2\pi r$),т.е. длина дуги $0 < l < 2\pi r$. Например, длина дуги 60° равна $\frac{1}{6}$ (60°/360°) части длины окружности, т.е. $\frac{1}{6} \cdot 2\pi r$. Если радиус окружности равен 12 см, то 60°длина дуги будет $\frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 12 = 4\pi$ см. Для нахождения длины дуги $x°$ окружности радиуса r используется формула $l = \frac{x°}{360°} \cdot 2\pi r = \frac{\pi x° r}{180°}$. На примере концентрических окружностей можно увидеть, что центральный угол остаётся неизменным, но при изменении радиуса меняется длина дуги. Длины дуг, соответствующих одному центральному углу, пропорциональны длинам радиусов. Подумайте, чему равен коэффициент пропорциональности?



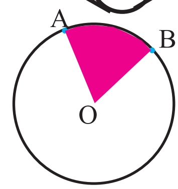
В выражении $\frac{\pi x°}{180°}$ x градусная мера угла и она изменяется, $\frac{\pi}{180}$ постоянная величина, т.е.коэффициент пропорциональности. Здесь ещё раз можно увидеть связь между радианами и градусами. Если длине дуги l окружности радиуса r соответствует центральный угол α радиан, то $\frac{l}{r} = \alpha$. Отсюда получаем формулу для вычисления длины дуги $l = \alpha \cdot r$.

Обсуждается решение следующей задачи, связанные с вычислением длины дуги. Металлическая конструкция состоит из 7 кругов, диаметр каждого их которых равен 1,8 см. На рисунке представлено поперечное сечение конструкции.

По внешней части конструкция опоясана пластиковым ремнём. Чтобы скрепить концы ремня дополнительно было использовано 2,5 см материала. Найдите длину ремня.



2-ой час. Площадь сектора. Также как и длина дуги площадь сектора находится как часть. Как же можно найти площадь сектора? Учащимся предоставляется время для обсуждения. площадь сектора можно найти как часть площади круга.



$$S = \frac{x^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

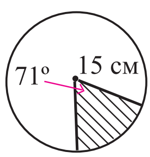
Если ввести обозначение $\frac{\pi x^\circ}{180^\circ} = \alpha$ и приняв во внимание радианную меру угла , получим формулу вычисления площади сектора через радианы.

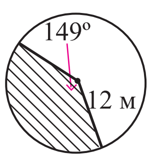
$$S = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

Рекомендуется при нахождении длины дуги и площади сектора определённые задания выполнять с помощью транспортира и циркуля для более точных измерений. Например, для нахождения длины дуги(площадь сектора), соответствующую центральному углу 40° радиусом 5 см ученики должны выполнять в следующей последовательности.

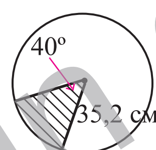
1. При помощи циркуля начертить окружность радиусом 5 см.
2. При помощи транспортира построить центральный угол 40°.
3. Соответствующая дуга отмечается и обозначается тремя точками.
4. Применяется формула вычисления длины дуги $l = \alpha r$ (или площади сектора).

✔ По данным на рисунке найдите длину дуги.

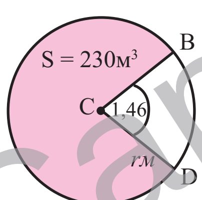




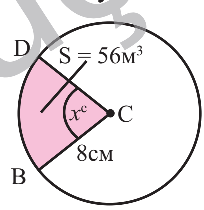
По данным на рисунке найдите площадь сектора.



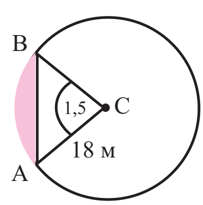
По данным на рисунке найдите радиус.

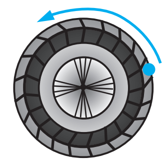


По данным на рисунке найдите центральный угол



По данным на рисунке найдите площадь сектора





3-й час. Линейная скорость. Угловая скорость. Нахождение линейной и угловой скорости является прикладным заданием для вычисления длины дуги и значения угла поворота. Поэтому, при изучение этой темы можно провести интеграцию как с другими предметами(физика), так и внутрипредметной.

линейная скорость = $\dfrac{\text{путь}}{\text{время}}$ угловая скорость = $\dfrac{\text{угол поворота}}{\text{время}}$

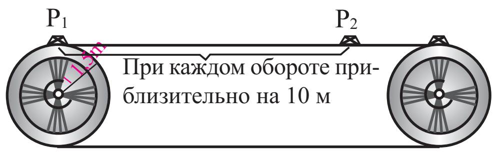
$v_x = \dfrac{\alpha r}{t}$ $\omega = \dfrac{\alpha}{t}$

Здесь, угол поворота α (в радианах) за время t.

Между линейной и угловой скоростью существует следующая связь:

линейная скорость = $r \cdot$ угловая скорость $v_x = r \cdot \omega$

Эту связь можно представить на модели производственного конвейера. Предположим,что диаметр каждого диска, отвечающего за прокрутку конвейера равен 1,5 м. Тогда длина окружности диска равна $C = 2\pi r \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5 \approx 10$ м. Это говорит о том, что при одном полном обороте диска тело P совершает перемещение на приблизительно 10 м.



Рекомендуется решении заданий из учебника при помощи схематичных рисунков.

? Решение некоторых заданий из учебника

У. 6. Решение: а) При R= 40 см, длина колеса равна $2\pi \cdot 40 = 80\pi$ см $=0{,}8\pi$ м. На расстоянии 100 м колёса автомобиля совершают 100: $(0{,}8\pi)$ полных оборотов. Каждый полный оборот равен 2π радиан,тогда угол, образованный за 100: $(0{,}8\pi)$ оборотов равен 100: $(0{,}8\pi)\cdot 2\pi=250$ радиан.

У.**16.**Решение.По условию скорость велосипедиста 30 $\dfrac{км}{час}$. Эту скорость можно выразить в $\dfrac{м}{мин}$ как 30 $\dfrac{км}{час}$ = 500 $\dfrac{м}{мин}$

Так как 65 см = 0,65 м за один оборот путь составит $\pi \cdot 0{,}65 \approx 2{,}04$ м. На расстоянии 500 м колесо сделает 500 : 2,04 ≈ 245 полных оборотов.

У 20. Установка для распыления воды может распылять воду на расстоянии R=400 м. Площадь полива имеет форму сектора. По формуле площади сектора и в соответствии с условием задачи $\dfrac{\alpha R^2}{2} = 120\,000$. Отсюда

$\alpha = 2 \cdot 120000 : 160000 = 1{,}5$ радиан $\approx 86°$, т.е. для распыления воды на этой площади установка должна поворачиваться на угол приблизительно равный 86° .

Урок 36-38. Учебник стр. 76-82. Тригонометрические функции. Тригонометрические функции произвольного угла.

Содержательный стандарт

2.1.1. Знает определение радианной меры угла и тригонометрических функций произвольного угла, применяет их при решении задач.

Навыки формирующиеся у учащихся

- *представляет определение тригонометрических функций при помощи произвольного угла поворота;*
- *определяет знак тригонометрических отношений в различных четвертях*

Математический словарь

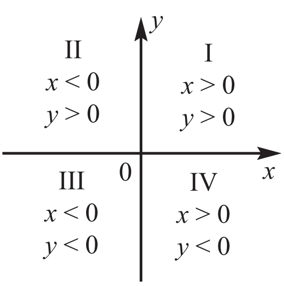
- секанс
- косеканс

Дополнительные ресурсы

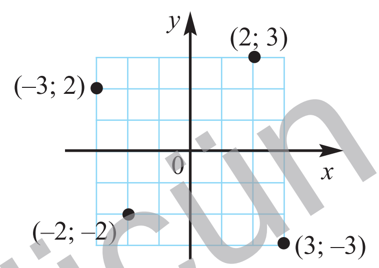
Рабочие листы

1-ый час. Навыки на которые следует обратить особое внимание на этом уроке:
• знает определение тригонометрических функций при повороте на окружности произвольного радиуса;
• определяет знак тригонометрических функций по четвертям;
• определяет знак тригонометрической функции заданного угла поворота;
• понимает,что значения тригонометрических отношений является действительным числом;
• оценивает интервал изменения тригонометрических отношений.

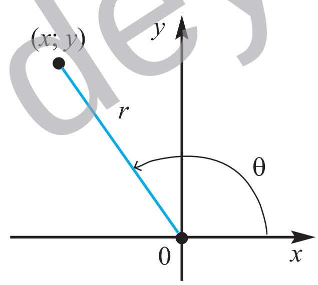
До недавнего времени определение тригонометрических функций было дано для острого или тупого углов. Сейчас надо ввести определение тригонометрических функций для любой точки на плоскости. Учащимся представляют на примерах знаки координат и координаты точек на координатной плоскости, а также углы поворота.



Знаки координат на координатной плоскости



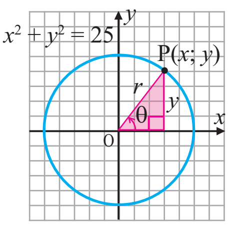
Координаты точек на координатной плоскости

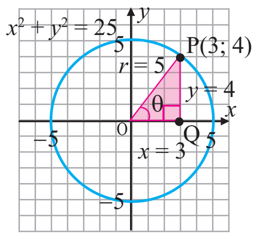


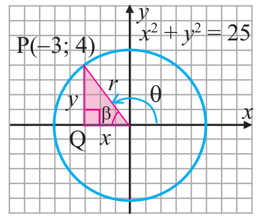
Угол поворота

Объясняет при помощи прямоугольного треугольника тригонометрические отношения произвольного угла.

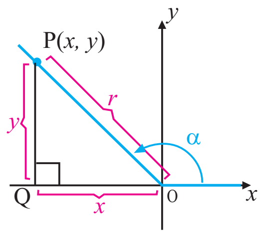
Для произвольного угла поворота определяет расстояние(или радиус) от любой точки с координатами x и y, принадлежащей конечной стороне угла поворота до начала координат, рассматривая все случаи прямоугольных треугольников, которые образует конечная сторона угла поворота.







Для определения шести тригонометрических функций,обозначим координаты точки, лежащей на конечной стороне угла поворота α через ($x;y$). Расстояние от начала координат до точки P обозначим через r и найдём по формуле расстояния между двумя точками (O(0;0) və P($x;y$)) .



$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

и так как r выражает расстояние, то это значение всегда положительно.

Определим 6 тригонометрических функций из прямоугольного треугольника POQ

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad x \neq 0$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \qquad \sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

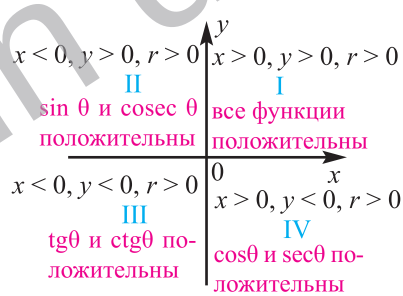
$$y \neq 0 \qquad\qquad x \neq 0 \qquad\qquad y \neq 0$$

! Особо отмечается, что значение тригонометрических функций не зависит от расположения точки на конечной стороне угла поворота.

2-ой час. Знаки тригонометрических функций по четвертям и интервал изменения значений тригонометрических функций.

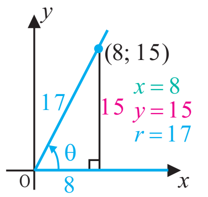
Определяются знаки тригонометрических функций в различных четвертях и проводится следующее обобщение.

четверть в которой расположен угол θ	sin θ	cos θ	tg θ	ctg θ	sec θ	cosec θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	–	–	–	–	+
III	–	–	+	+	–	–
IV	–	+	–	–	+	–



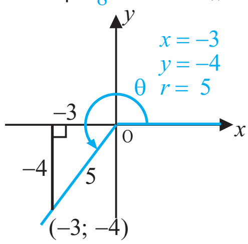
Далее исследуется интервал изменения значений функций. Определяются значения функций на границах и значения в различных четвертях угла поворота.

Определяются значения 6 тригонометрических функций в различных четвертях, в зависимости от угла поворота.



$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{15}{17}$ $\quad\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{8}{17}$ $\quad\text{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{15}{8}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{r}{y} = \dfrac{17}{15}$ $\quad\sec\theta = \dfrac{r}{x} = \dfrac{17}{8}$ $\quad\text{ctg}\,\theta = \dfrac{x}{y} = \dfrac{8}{15}$

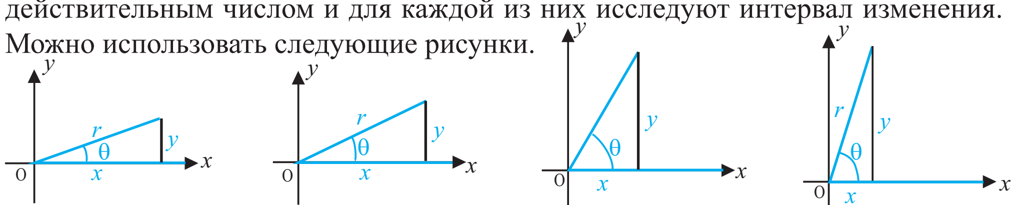


$\sin\theta = \dfrac{-4}{5} = -\dfrac{4}{5}$ $\quad\cos\theta = \dfrac{-3}{5} = -\dfrac{3}{5}$ $\quad\text{tg}\,\theta = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$

$\text{cosec}\,\theta = \dfrac{5}{-4} = -\dfrac{5}{4}$ $\quad\sec\theta = \dfrac{5}{-3} = -\dfrac{5}{3}$ $\quad\text{ctg}\,\theta = \dfrac{-3}{-4} = \dfrac{3}{4}$

Выслушиваются мнения учащихся о полученных значениях вычисленных отношений и тригонометрических функциях. Какие из них получают значения больше 1, а какие меньше 1?

Учащиеся должны понять, что значения тригонометрических функций является действительным числом и для каждой из них исследуют интервал изменения. Можно использовать следующие рисунки.

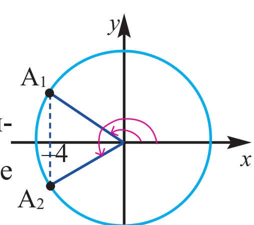


Как видно, значение угла θ увеличивается от 0°до 90°. При этом r остаётся неизменным, y увеличивается, но при этом иногда не может быть больше r и удовлетворяет условию $y \le r$.

Значит,выполняется условие $\dfrac{y}{r} \le 1$.Таки же образом можно показать, что для угла IV четверти $\dfrac{y}{r} \ge -1$. Отсюда получает результат, что значения функции синуса $-1 \le \sin\theta \le 1$налогичным образом можно написать, что для функции косинуса $-1 \le \cos\theta \le 1$.

Функции тангенса и котангенса могут получать любые действительные значения $-\infty < \text{tg}\theta < +\infty$ $\quad -\infty < \text{ctg}\theta < +\infty$. Значения функций секанс и косеканс, являющихся обратными для функций синуса и косинуса равны $\text{cosec}\,\theta \ge 1$ və ya $\text{cosec}\,\theta \le -1$, $\sec\theta \ge 1$ или $\theta \le -1$.

? Решение некоторых заданий из учебника



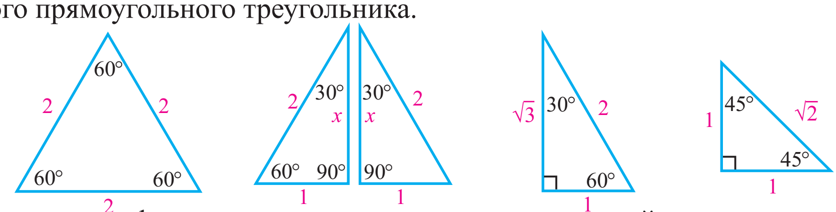
У 7. г) Представьте косинус $-\dfrac{4}{5}$ как угол поворота .

Решение: на листе бумаги в клетку примем 1 клетку за единицу и начертим окружность радиусом 5 с центром в начале координат. Из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ получаем $x = -4$, $R = 5$. Получим $y = \pm 3$.На окружности отметим точки $A_1(-4;\,3)$ и $A_2(-4;\,-3)$ и на рисунке отметим соответствующие углы поворота.

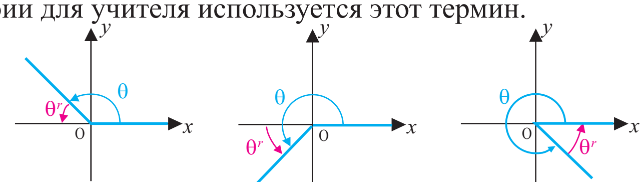
3-й час. Определение тригонометрической функции произвольного угла по острого углу

До настоящего времени мы могли находить значения тригонометрических функций по острому углу прямоугольного треугольника. Можно ли найти значение тригонометрических функций произвольного угла по острому углу?

Сначала повторим возможность нахождения значений тригонометрических функций для частного случая углов 30° и 60° на равностороннем треугольнике. Значения тригонометрических функций для угла 45° удобнее находить из равнобедренного прямоугольного треугольника.

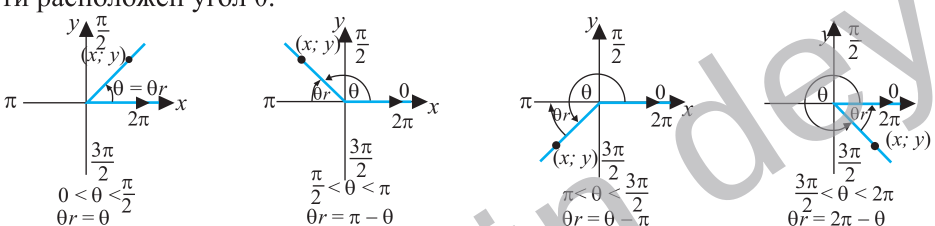


Тригонометрические функции произвольного угла можно найти при помощи тригонометрических функций острого угла. Говоря о соответствующем остром угле имеется ввиду угол между прямой содерящий оси x и конечной стороной угла поворота. Этот угол называется угол ***referens и*** целесообразно для определения этого понятия целесообразно использовать этот термин. Поэтому в методическом пособии для учителя используется этот термин.

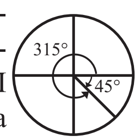


! Здесь особое внимание обращается на то, что угол referens является углом между прямой содерящий оси x и конечной стороной угла поворота.

Угол referens находится различным образом в зависимости от того, в какой четверти расположен угол θ.



Рекомендуется выполнять задания в которых необходимо находить угол referens как в градусах, так и в радианах. Острые углы, соответствующие отрицательным углам, находятся при совпадении конечной стороны угла с положительным углом. Например, углу –210° соответствует угол конечная сторона которого совпадает с углом –210° + 360° = 120°. Соответствующий острый угол 180° – 120° = 60°. Так как угол –210 ° является углом II четверти, то примем во внимание знак функции. Конечная сторона угла –45° совпадает с углом 315°. Этому углу соответствует острый угол 360° – 315° = 45°. Например, cos 60º= $\frac{1}{2}$ и так как косинус во II четверти принимает отрицательные значения, то cos(–240º)=– $\frac{1}{2}$. Так же на этом уроке объясняется, что значения тригонометрических функций изменяются периодически.



Рабочий лист № 2

Имя _________ Фамилия______ Дата__________

1) Данные точки показывают показывают координаты конца конечной стороны угла поворота. Для каждой точки запишите 6 тригонометрических функций.

A) (3; 4)

$\sin\theta =$ $\operatorname{cosec}\theta =$
$\cos\theta =$ $\sec\theta =$
$\operatorname{tg}\theta =$ $\operatorname{ctg}\theta =$

B) (2; –2)

$\sin\theta =$ $\operatorname{cosec}\theta =$
$\cos\theta =$ $\sec\theta =$
$\operatorname{tg}\theta =$ $\operatorname{ctg}\theta =$

C) (–5; 12)

$\sin\theta =$ $\operatorname{cosec}\theta =$
$\cos\theta =$ $\sec\theta =$
$\operatorname{tg}\theta =$ $\operatorname{ctg}\theta =$

D) (–3; –4)

$\sin\theta =$ $\operatorname{cosec}\theta =$
$\cos\theta =$ $\sec\theta =$
$\operatorname{tg}\theta =$ $\operatorname{ctg}\theta =$

E) (1; –3)

$\sin\theta =$ $\operatorname{cosec}\theta =$
$\cos\theta =$ $\sec\theta =$
$\operatorname{tg}\theta =$ $\operatorname{ctg}\theta =$

F) (–2; 1)

$\sin\theta =$ $\operatorname{cosec}\theta =$
$\cos\theta =$ $\sec\theta =$
$\operatorname{tg}\theta =$ $\operatorname{ctg}\theta =$

2) Определите четверть которой принадлежит заданный угол, изобразите соответствующий острый угол и запишите значений тригонометрических функций.

а) 210° б) −210° в) 330°

Урок 39,40. Учебник стр. 83-85. Единичная окружность и тригонометрические функции произвольного угла. 2 часа

Содержательный стандарт

2.1.1. Знает определение радианной меры угла и тригонометрических функций произвольного угла, применяет их при решении задач..

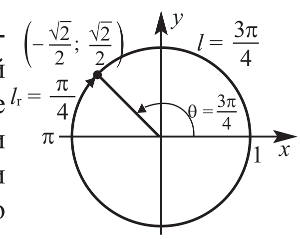
Навыки формирующиеся у учащегося

- *по единичной окружности выражает тригонометрические функции произвольного угла через координаты точек;*
- *определяет тригонометрические функции по координатам точки на единичной окружности;*
- *определяет тригонометрические функции по углу поворота на единичной окружности.*

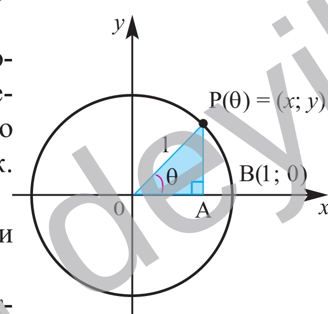
Математический словарь

- единичная окружность

Дополнительные ресурсы



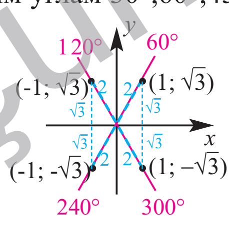
Очень удобно изображать угол поворота и соответствующий острый угол (referens) геометрически на единичной окружности и проще выражать тригонометрические функции действительными числами. Так как при $r = 1$ и угле в радианах, соответствующее значение длины дуги равно значению такого угла. Значит, тригонометрическую функцию любого угла можно выразить как функцию, зависящую от длины дуги.

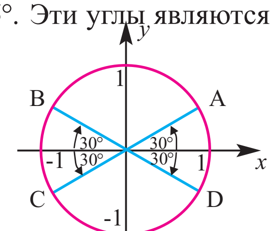


Единичная окружность задаёт связь между тригонометрической функцией и координатами точки. Ученики должны понять, что тригонометрическую функцию можно выразить через координаты точек. При $\cos\theta = x$, $\sin\theta = y$ можно написать

$P(x;y) = P(\cos, \sin\theta)$. Это справедливо для любой точки на единичной окружности.

На единичной окружности отмечаются точки, соответствующие наиболее часто используемым углам 30°,60°,45°. Эти углы являются наиболее часто используемыми referens углами. Учащиеся должны понимать, что любого угла существует 4 referens угла (для $0° < \theta < 360°$) и для для этих referens углов отмечаются значения координат и знак тригонометрической функции, соответствующий четверти. Повороты и соответствующие координаты отмечаются на единичной окружности и это даёт возможность учащимся наглядно представить наиболее часто используемые углы в интервале от 0° до 360°,

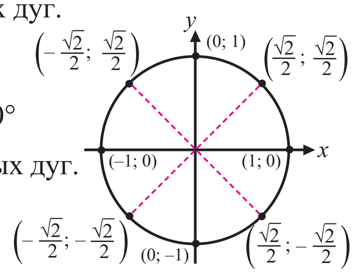




их наибольшее и наименьшее значение, периодичность, чётность и нечётность. Учащиеся могут выполнить работу по-разному в следующей последовательности. Например, разделив окружность на дуги по 45°.

1. Единичную окружность делят на 8 конгруэнтных дуг.

$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{4}$ и 2π

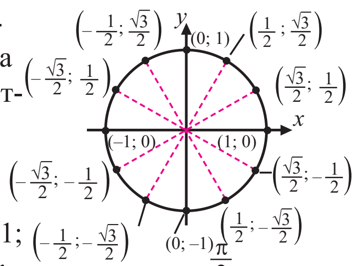


Или разделив единичную окружность на дуги по 30°

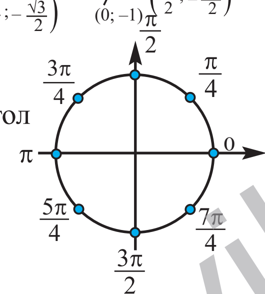
2. Единичную окружность делят на 12 конгруэнтных дуг.

$\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, π,

$\frac{7\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{11\pi}{6}$ и 2π

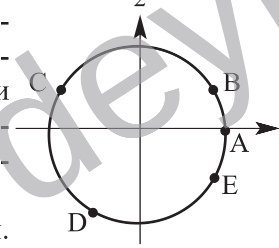


Координаты точки, соответствующей острому углу поворота учащиеся могут найти как тригонометрические отношения в прямоугольном треугольнике, а также следующим образом. Координаты точки, соответствующие углу 45° на единичной окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Также эта точка должна быть расположена на прямой $y = x$. В уравнении примем $y = x$. Получим $x^2 + x^2 = 1$; $2x^2 = 1$; $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как угол принадлежит I четверти, то x должно быть положительно.



Приняв во внимание значение $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получим $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и угол поворота $\frac{\pi}{4}$. Тогда координаты точки будут $(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$.

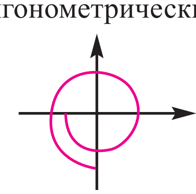
Для данной точки в общем возможны 4 симметричных преобразования, другими словами можно получить информацию о числовом значении тригонометрических функций для 4 точек. Из треугольников с углами 30°-30°-60°и при помощи симметричных преобразований для соответствующих углов поворота на единичной окружности отмечаются точки. Также выполняются задания на расположение(приблизительно) на окружности или для соответствующих заданных точек на интервале -2π до 2π определение приблизительного числового значения.



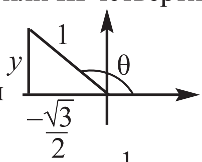
Точка A при движении в направлении против часовой стрелки приблизительно переходит в точку B → π/6,
C →5π/6 (π – π/6) , D → 4π/3 (3π/2 – π/6),
E → 11π/6 (2π – π/6).

Например,найдите значение других тригонометрических функций, если $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Сначала учащиеся должны изобразить геометрически интервал изменения угла.

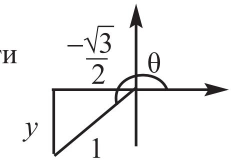


По условию $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ определяется какой четверти принадлежит угол поворота. Конечная сторона угла, в соответствии с областью изменения, принадлежит или II, или III четверти.

во II четверти 

$y = \frac{1}{2}$ $\quad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

в III четверти 

$y = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

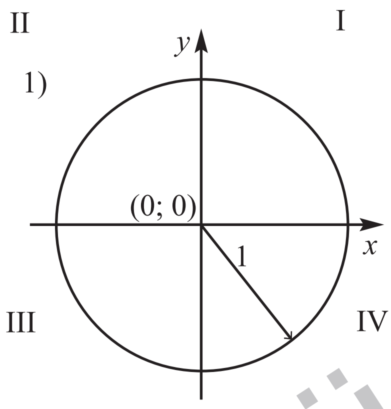
Рабочий лист № 3

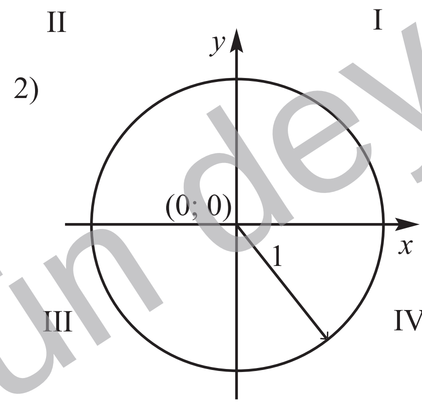
Имя _________ Фамилия______ Дата__________

1) Расположите числа на единичной окружности.

1) а) $\frac{\pi}{4}$ б) $\frac{3\pi}{2}$ в) $\frac{3\pi}{4}$ г) π д) $\frac{11\pi}{4}$

2) а) $\frac{\pi}{3}$ б) $\frac{5\pi}{6}$ в) $\frac{11\pi}{6}$ г) $\frac{13\pi}{6}$ д) $\frac{23\pi}{6}$





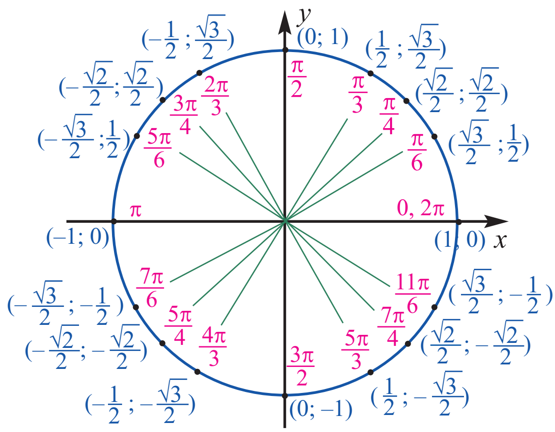
2) Запишите все углы, расположенные в интервале $[0; 2\pi)$ согласно условию.

а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad \alpha =$

б) $\operatorname{tg}\alpha = -1$ $\qquad \alpha =$

Рабочий лист № 4

Имя _________ Фамилия______ Дата__________



Для заданного угла определите значения шести тригонометрических функций по единичной окружности.

а) $\dfrac{9\pi}{4}$

sin θ = cosec θ =

cos θ = sec θ =

tg θ = ctg θ =

б) –480º

sin θ = cosec θ =

cos θ = sec θ =

tg θ = ctg θ =

в) $\dfrac{22\pi}{3}$

sin θ = cosec θ =

cos θ = sec θ =

tg θ = ctg θ =

г) $\dfrac{11\pi}{3}$

sin θ = cosec θ =

cos θ = sec θ =

tg θ = ctg θ =

д) $-\dfrac{19\pi}{6}$

sin θ = cosec θ =

cos θ = sec θ =

tg θ = ctg θ =

е) 600º

sin θ = cosec θ =

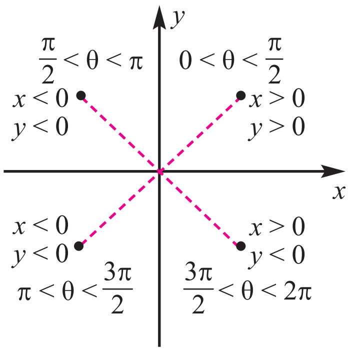
cos θ = sec θ =

tg θ = ctg θ =

На этом уроке проводится обобщение знаний, полученных до данного урока.

1. Определение тригонометрических функций.

2. Знаки тригонометрических функций в различных четвертях.



II четверть		I четверть	
sin α, cosec α	+	sin α, cosec α	+
cos α, sec α	–	cos α, sec α	+
tg α, ctg α	–	tg α, ctg α	+
III четверть		**IV четверть**	
sin α, cosec α	–	sin α, cosec α	–
cos α, sec α	–	cos α, sec α	+
tg α, ctg α	+	tg α, ctg α	–

3. В каком промежутке изменяется значение тригонометрических функций.

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ cosec$\theta \geq 1$ və ya cosec$\theta \leq -1$,

$-1 \leq \cos\theta \leq 1$ sec$\theta \geq 1$ və ya sec$\theta \leq -1$

$-\infty < \mathrm{tg}\theta < +\infty$ $-\infty < \mathrm{ctg}\theta < +\infty$

4. Соответствующие острые углы (referens угол)

для углов I четверти: α\` = α

для углов II четверти: α\` = 180 – α

для углов IIIчетверти: α\` = α – 180°

для углов IVчетверти:α\` = 360°– α

5. Алгоритм нахождения тригонометрических отношений произвольного угла

1-ый шаг. Определяется наименьший положительный угол, конечная сторона которого совпадает с заданным углом.
- если 0° < α < 360°, то переходим ко 2-му шагу.
- если α < 0°, то к значению угла α прибавляют 360° до тех пор, пока угол α не станет принадлежать промежутку 0° < α\` < 360°.
- если α > 360, от значения угла α отнимают 360° до тех пор, пока угол α не станет принадлежать промежутку 0° < α\` < 360°.

2-ой шаг. Для угла, найденного на 1-ом шаге определяется в какой четверти расположена конечная сторона угла.

3-ой шаг. Для угла, найденного на 1-ом шаге определяется referens угол.

4-ый шаг. Для referens угла определяются тригонометрические отношения.

5-ый шаг. Определяется знак тригонометрической функции, полученной на 2-ом шаге.

6-ой шаг. Записывается тригонометрические отношения, по значению, полученному на 4-ом шаге и знаку, определённому на 2-ом.

На данном этапе учащиеся могут провести самооценивание или учитель может провести формативное оценивание.

Урок 41-42. Учебник. 86-89. Формулы приведения. 2 часа

Содержательный стандарт

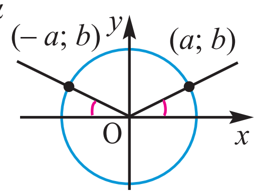
2.1.2.Знает и применяет формулы приведение для тригонометрических функций.

Навыки формирующиеся у учащихся

- *представляет получение формул приведений геометрически;*
- *представляет получение формул приведения алгебраически;*
- *применяет формулы приведения при решении задач.*

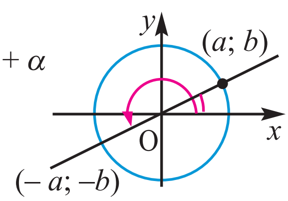
Учащиеся уже знают правила определения формул приведения для тригонометрических функций при помощи referens угла. Для заданного угла исследуется как изменится положение угла при добавлении к углу 180° или 360°, какие симметричные преобразования выполняются при этом. Прослеживаются как меняются координаты точки на конечной стороне угла при начальном и конечном расположении, выясняется симметричность. При этом можно использовать следующие схематичные изображения.

$180^o - \alpha$



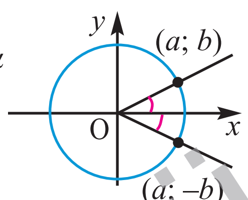
Симметрия относительно оси y : $(a;\ b) \to (-a;\ b)$, x меняет знак, y очтаётся неизменным.
То есть, синус остаётся неизменным, косинус меняет знак.

$180^o + \alpha$



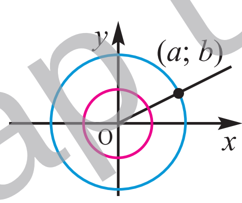
Симметрия относительно начала координат: $(a;\ b) \to (-a;\ -b)$.
Меняет знак как x, так и y. То есть, и синус ,и косинус меняет знак.

$360^o - \alpha$



Симметрия относительно оси x: $(a;\ b) \to (a;\ -b)$.
Косинус остаётся неизменным, синус меняет знак.

$360^o + \alpha$



Конечная сторона угла совпадает с заданным: $(a;\ b) \to (a;\ b)$.
Функции не меняют знак.

В результате обсуждения определяются следующие формулы. В процессе обсуждения учащимся даётся время, чтобы они делали соответствующие чертежи, наблюдали за изменением координат и отмечали формулы.

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$

Конечные стороны угол поворота $-\alpha$ и $360^\circ - \alpha$ совпадают. Поэтому
$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha$
$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
Учащиеся получают возможность формулы для дополняющих углов определить самостоятельно при помощи прямоугольного треугольника. Эту работу удобно выполнять в группах. Рекомендуется записывать формулы как в радианах, так и в градусах.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha$

$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$ $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ $\operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Если позволит количество часов и уровень класса, можно дополнительно обобщить формулы приведения и выполнить задания такого типа. Эти формулы можно увидеть из представленного выше.

$\sin(180^\circ(2k - 1) - \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(180^\circ(2k - 1) - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(180^\circ(2k - 1) + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(180^\circ(2k - 1) + \alpha) = -\cos\alpha$

Здесь k целое число и показывает справедливость формулы для нечётного периода.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.11. Приведите тригонометрические функции к углам от 0° до 90°.
Решение:
a) $\sin(-170^\circ) = -\sin 170^\circ = -\sin(170^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ$
d) $\operatorname{ctg} 320^\circ = \operatorname{ctg}(360^\circ - 40^\circ) = -\operatorname{ctg} 40^\circ$

✓ Учащиеся предлагается выполнить решение следующих заданий.

1) $\sin 390^\circ$
2) $\operatorname{tg}\frac{19\pi}{6}$
3) $\sec(-1290^\circ)$
4) $\cos\frac{27\pi}{4}$
5) $\operatorname{cosec}\frac{10\pi}{3}$
6) $\sec(-660^\circ)$

Урок 43-44. Учебник стр. 90-92. Тригонометрические тождества. 2 часа

Содержательный стандарт

1.2.3 Знает основные тригонометрические тождества и применяет их при упрощении тригонометрических выражений.

2.1.2.Знает и применяет формулы приведение для тригонометрических функций.

Навыки формирующиеся у учащихся

- *представляет геометрически получение основных тригонометрических тождеств;*
- *представляет алгебраически получение основных тригонометрических тождеств;*
- *применяет основные тригонометрические тождества при решении задач.*

Основные тригонометрические тождества разделяются по группам следующим образом.

Тождества содерящие обратные значения тригонометрических функций.

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Тождества тангенса и котангенса:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cos\alpha \neq 0$ $\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad \sin\alpha \neq 0$ $\quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Тождества Пифагора:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$ $\quad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha$

Тождества отрицательного угла:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$

Тождества дополняющего угла:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha$

Выполняются задания в которых необходимо доказывать тригонометрические выражения при помощи тригонометрических тождеств.

Задания в учебнике можно сгруппировать следующим образом.

1. Зная, что $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ найдите 5 тригонометрических функций.

2. Упростите выражение $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\alpha$ 3. Упростите выражение $\operatorname{tg}^2\alpha\sec\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}$

? Решение некоторых заданий из учебника

У.10. Решение: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{1-\cos^2\alpha} = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{25}{16}$

Задания такого типа учитель может составить сам. Основные тригонометрические тождества легко запомнить применяя их при доказательстве тождеств, и несложных заданий на упрощение выражений. Выполняя данные задания особое внимание надо уделять учащимся со слабым уровнем подготовки.

Рабочий лист № 5

Имя _________ Фамилия______ Дата__________

1) Запишите основные тождества.

а) $\mathrm{tg}\theta =$_________________ г)_____________________

б) $\mathrm{ctg}\theta =$________________ д) ____________________

в) ____________________ е) ____________________

2) Упростите выражения, при помощи основных тригонометрических тождеств.

а) $\mathrm{tg}^2\theta - \mathrm{tg}^2\theta \cdot \sin^2\theta$ б) $\sin^2\alpha \cdot \mathrm{cosec}^2\alpha - \sin^2\alpha$ в) $\cos^2\theta \cdot \sec^2\theta - \cos^2\theta$

г) $\cos^2\beta + \cos^2\beta \cdot \mathrm{tg}^2\beta$ д) $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha$ е) $\dfrac{\cos^2\theta - 1}{\sin^2\theta - 1}$

ж) $\mathrm{tg}^4\phi + 2\,\mathrm{tg}^2\phi + 1$ з) $1 - 2\cos^2\theta + \cos^4\theta$ и) $\sin^4 x - \cos^4 x + 2\cos^2 x$

3) Найдите значения остальных тригонометрических функций.

а) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < 90^\circ$ б) $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

в) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ г) $\mathrm{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Урок 45-47. Учебник стр. 93-96. Формулы сложения. 3 часа

Содержательный стандарт

2.1.3. Знает и применяет формулы сложения и их следствия для тригонометрических функций.

Навыки формирующиеся у учащихся

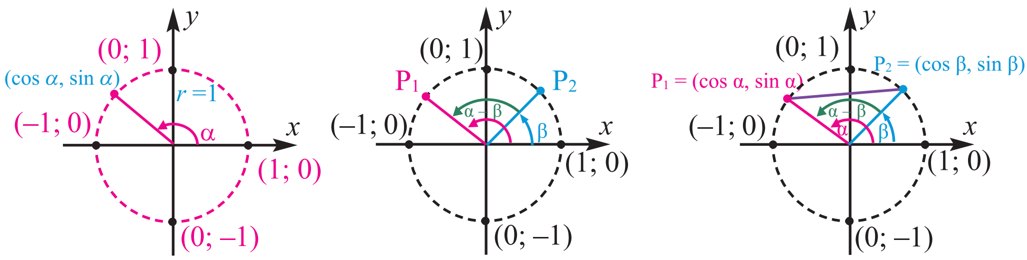
- *выполняет доказательство формул сложения;*
- *упрощает выражения, доказывает тождества применяя формулы сложения ;*
- *применяет формулы сложения при решении задач.*

Формулы сложения

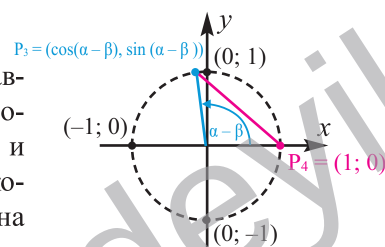
Сначала проводится доказательство тождества $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

Доказательство проводится по шагам, следующим образом:

1. На единичной окружности отмечается точка $P_1(\cos\alpha; \sin\alpha)$ координаты которой соответствуют углу α.
2. На единичной окружности изображается угол β, образованный конечной стороной угла α и углом $\alpha - \beta$. Отмечается соответствующая точка $P_2(\cos\beta; \sin\beta)$.



3. Точки P_1 и P_2 соединяются отрезком P_1P_2 .



4. Начальную сторону угла $\alpha - \beta$ повернём в направлении по часовой стрелке до возвращения угла поворота в стандартное положение(до оси x) и начертим новое положение угла. Начальные и конечные стороны угла соответствуют точкам на окружности с координатами

$P_3(\cos(\alpha - \beta); \sin(\alpha - \beta))$ и $P_4(1;0)$. Расстояние между точками P_1 и P_2 , т.е. длина отрезка P_1P_2 , а также расстояние между точками P_3 и P_4, т.е. длина отрезка P_3P_4 равны $P_1P_2 = P_3P_4$. Выразим это расстояние при помощи формулы расстояния между двумя точками и тригонометрических функций.

$$P_1P_2 = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2}$$

$$P_3P_4 = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2}$$

Из этих равенств с лёгкостью можно найти $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$.

? Решение некоторых заданий из учебника

У 5. а) для решения удобнее ввести обозначения $36^\circ + \alpha = x$, $24^\circ - \alpha = y$.

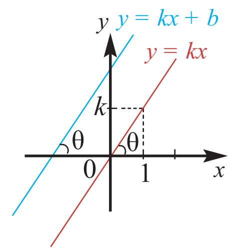
$\cos(36^\circ + \alpha)\cdot\cos(24^\circ - \alpha) - \sin(36^\circ + \alpha)\cdot\sin(24^\circ - \alpha) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y =$

$= \cos(x + y) = \cos(36^\circ + \alpha + 24^\circ - \alpha) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

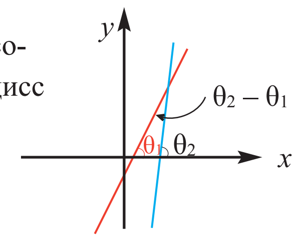
У.18. а) $\text{tg}(\alpha+\beta) = -1, \quad \text{tg}(2-\beta) = \dfrac{1}{2}$. Найдите $\text{tg}\,2\beta$.
Решение. примем $2\beta = (\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)$, тогда:

$$\text{tg}\,2\beta = \text{tg}\,((\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)) = \frac{\text{tg}\,(\alpha+\beta) - \text{tg}\,(\alpha-\beta)}{1 + \text{tg}\,(\alpha+\beta)\cdot\text{tg}\,(\alpha-\beta)} = \frac{-1-\frac{1}{2}}{1+(-1)\cdot\frac{1}{2}} = -3$$

У.20. Решение: Сначала надо показать, что угловой коэффициент k прямой $y = kx$ с положительным направлением оси абсцисс равен тангенсу угла θ : $\text{tg}\,\theta = k$.
При параллельном переносе графика функции $y = kx$ по вертикали на b единиц, указанный угол не меняется и в этом случае $k = \text{tg}\theta$.



Если угловые коэффициенты прямых k_1 и k_2 образуют соответственно с положительным направлением оси абсцисс углы θ_1 и θ_2 , то $k_1 = \text{tg}\theta_1$, $k_2 = \text{tg}\theta_2$. Тогда тангенс угла между прямыми $\theta_2 - \theta_1$ будет:



$$\text{tg}\,(\theta_2-\theta_1) = \frac{\text{tg}\theta_2 - \text{tg}\theta_1}{1+\text{tg}\theta_2 - \text{tg}\theta_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1\cdot k_2}.$$

а) острый угол между прямыми, угловые коэффициенты которых равны 2 и $\dfrac{1}{2}$

$$\text{tg}\,(\theta_2-\theta_1) = \frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$$ Отсюда $\theta_2 - \theta_1 \approx 37^\circ$.

Урок 48-50. Учебник стр. 97-101. Следствия из формул сложения. 3 часа

Содержательный стандарт

2.1.3. Знает и применяет формулы сложения и их следствия для тригонометрических функций.

Навыки формирующиеся у учащихся

- *обосновывает формулы преобразования суммы и разности* тригонометрических функций *в произведение;*
- *применяет формулы преобразования суммы и разности в произведение при решении задач;*
- *записывает формулы двойного и половинного аргумента при помощи формул сложения;*
- *применяет формулы двойного и половинного аргумента при решении задач.*

Внимание учащихся направлено на то, что до недавнего времени мы могли вычислить точные значения тригонометрических функций углов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. Используя формулы двойного и половинного аргумента можно найти ещё больше значений.

? Решение некоторых заданий из учебника

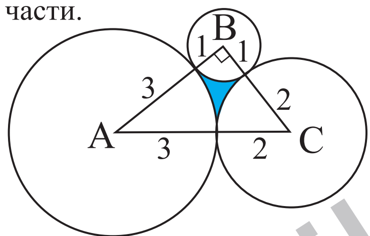
У 17. а) целесообразно найти значения выражения 2 sin 15º cos 15ºразличными способами. Сначала можно применить формулы двойного угла

$$2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin(2\cdot 15^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Можно применить формулу преобразования произведения в сумму:

$$2\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 2\cdot \frac{1}{2}[\sin(15^\circ + 15^\circ) + \sin(15^\circ - 15^\circ)] = \sin 30^\circ + \sin 0^\circ = \frac{1}{2}$$

У.29. Окружности радиусами 1; 2; 3 касаются внешним образом как показано на рисунке. Найдите площадь закрашенной части.



Решение: с лёгкостью можно увидеть, что, Δ ABC вершинами которого являются центры окружностей является прямоугольным и $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ кв.ед.

Для вычисления площади закрашенной части, надо от площади ΔABC отнять площади секторов соответствующих каждому кругу . Так как $\angle B = 90^\circ$, то площадь сектора данного круга равна $S_1 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}$. Для нахождения площади сектора, соответствующего центральному углу A сначала надо найти $\angle A$.

$\sin \angle A = \frac{3}{5} = 0{,}6$, тогда $\angle A \approx 37^\circ$

Площадь соответствующего сектора равна $S_2 \approx \frac{37^\circ \cdot \pi \cdot 3^2}{360^\circ} = \frac{37}{40}\pi$

$\angle C \approx 53^\circ$, тогда площадь сектора, соответствующего центральному углу C равна:

$$S_3 \approx \frac{53^\circ \cdot \pi \cdot 2^2}{360^\circ} = \frac{53}{90}\pi$$

Площадь закрашенной части равна

$$S = S_{ABC} - (S_1 + S_2 + S_3) \approx 6 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{37\pi}{40} + \frac{53\pi}{90}\right) \approx 0{,}46 \text{ кв. ед.}$$

Урок 51-53. Учебник стр. 102-105. Преобразование тригонометрических выражений. Обобщающие задания. 3 часа.

Предусмотрено выполнение заданий на применение основных тригонометрических тождеств, формул сложения, двойного и половинного угла, преобразования суммы и разности в произведение. Некоторые задания можно выполнить с обсуждением непосредственно в классе. Ещё больше заданий предусмотрено в качестве домашнего задания.

? Решение некоторых заданий из учебника

У 11. (стр. 103) вычислите значение выражения sin 18º cos 36º.

Решение: умножим и разделим на 2 cos 18º и применим формулу двойного угла.

$$\sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ = \frac{2\cos 18^\circ \cdot \sin 18^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ} = \frac{1}{4}$$

На уроках предназначенных для обобщающего повторения выполняются задания на выражение углов в градусах и радианах, определения угла поворота и тригонометрических функций для произвольного угла, соответствующего острому углу, определения тригонометрических функций на единичной окружности, применения основных тригонометрических тождеств, формул приведения и формул сложения, и следствия из них.

УД17. а) Найдите значение выражения $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$

Решение: приведём заданное выражение к общему знаменателю и применим формулу преобразования произведения в сумму.

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = \frac{1 - 4\sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 - 4\cdot\frac{1}{2}[\cos 70^\circ - 10^\circ) - \cos(70^\circ + 10^\circ)]}{2\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} =$$

$$= \frac{1 - 1 + 2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ} = \frac{2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ} = 1$$

У.20. а) $$\frac{6\cos 64^\circ}{\sqrt{3}\cos 34^\circ - \sin 34^\circ} = \frac{6\cos 64^\circ}{\mathrm{tg}\, 60^\circ \cdot \cos 34^\circ - \sin 34^\circ} =$$

$$= \frac{6\cos 64^\circ}{\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\cdot\cos 34^\circ - \sin 34^\circ} = \frac{6\cos 64^\circ}{\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos 34^\circ - \sin 34^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ}} =$$

$$= \frac{6\cos 64^\circ \cdot \cos 60^\circ}{\sin(60^\circ - 34^\circ)} = \frac{6\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 64^\circ}{\sin 26^\circ} = 3$$

Рабочий лист № 6

Имя _________ Фамилия______ Дата__________

Докажите тождества

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = -\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

Тригонометрические функции произвольного угла.
Критерии суммативного оценивания

N	Критерий	Примечание
1	Выполняет взаимное преобразование углов в градусах и в радианах.	
2	Геометрически представляет углы поворота.	
3	Определяет углы конечные стороны которых совпадают.	
4	Решает задания на нахождение длины дуги и площади сектора.	
5	Связывает нахождение линейной и угловой скорости с нахождением длины дуги и угла поворота.	
6	Связывает тригонометрические функции и их определение с координатами точки, расположенной на конечной стороне угла	
7	Определяет координаты точек,принадлежащей конечной стороне угла поворота в различных четвертях посредством прямоугольного треугольника.	
8	Определяет какой четверти принадлежит угол.	
9	Определяет тригонометрические функции, используя соответствующий острый угол.	
10	Задаёт связь между координатами точки на единичной окружности и тригонометрическими функциями угла поворота.	
11	Находит значение тригонометрических функций любого угла, используя острые углы- углы, расположенные в I четверти на единичной окружности.	
12	Применяет основные тригонометрические тождества при упрощении тригонометрических выражений.	
13	Применяет формулы сложения.	
14	Применяет формулу преобразования суммы тригонометрических функций двух углов в произведение.	
15	Применяет формулы двойного и половинного аргумента.	

Урок 54. Тригонометрические функции произвольного угла.
Задания для суммативного оценивания

1) Изобразите на разных координатных плоскостях углы поворота 60°; –60°; 300°; –405°.

2) а) Определите в какой четверти расположена конечная сторона угла поворота : а)172°; б) − 315°; в) $-\dfrac{5\pi}{6}$; г) –415° .

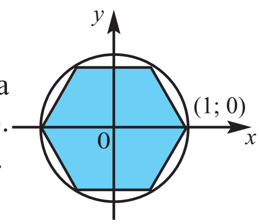
3) Выразите 105° в радианах.

4) Выразите $\dfrac{11\pi}{6}$ в градусах.

5) Выразите в радианах углы, конечные стороны которых совпадают с данными и принадлежат интервалу (0; 2π).

а) –60° б) $-\dfrac{7\pi}{5}$

6) В окружность вписан правильный шестиугольник.Одна из вершин шестиугольника имеет координаты (1; 0). Найдите координаты других вершин шестиугольника.



7) Выразите в градусах и в радианах центральный угол, соответствующий длине дуги 15 см, если радиус окружности равен 3 см.

8) Зная, что $\cos\dfrac{7\pi}{18} \approx 0{,}3420$ вычислите значение выражений $\sin\dfrac{\pi}{9}$ и $\sin\dfrac{8\pi}{9}$.

9) Докажите, что $2\cos x\cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y)$.

10) Приведите один контраргумент, чтобы доказать,что равенство $\cos 2x + \sin 2y = 2\sin(x+y)\cos(x-y)$ не является тождеством.

11) Покажите,что а) sin 16º = cos 74º б) tg 63º = ctg 27º.

12) Найдите значение выражения.

а) $\sin\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{4}$ б) $\cos\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{\pi}{4}$

13) Найдите площадь сектора, соответствующий центральному углу $\dfrac{\pi}{6}$ окружности, радиус которой равен 4 см.Какую часть окружности составляет данный сектор?

14) Тело движется по окружности. Один оборот оно совершает за 9 минут. Найдите на сколько градусов повернется тело за 1,5 минуты и какой путь оно проделает при этом. Изобразите схематичный рисунок. Радиус окружности R = 6 м.

15) Зная, что $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ найдите $\sin(\alpha-\beta)$.

4. Теоремы синусов и косинусов

Таблица планирования

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
3.1.1. Применяет теоремы синусов и косинусов при решении задач. 4.1.2. Посредством измерений и вычислений находит площадь и, сравнивая полученные результаты, определяет погрешность вычислений.	55-58	Теорема синусов. Теорема синусов и площадь треугольника. Решение задач при помощи теоремы синусов.	4	107-113
	59-62	Теорема косинусов. Обобщающие задания.	4	114-120
	63	Теоремы синусов и косинусов. Задания для суммативного оценивания.	1	
Всего			9	

Урок 55-58. Учебник стр. 107-113 Теорема синусов. Теорема синусов и площадь треугольника. Решение задач при помощи теоремы синусов.

Содержательный стандарт

3.1.1. Применяет теоремы синусов и косинусов при решении задач.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *представляет различные возможные случаи, в которых необходимо применение теоремы синусов(УСУ,УУС и ССУ);*
- *применяет теорему синусов;*
- *применяет теорему синусов при решении задач в реальных ситуациях.*
- *выполняет соответствующие измерения и приближённые вычисления при решении задач*

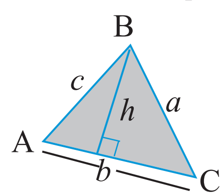
До сведения учащихся доводится, что до этого времени можно было при помощи теоремы Пифагора и тригонометричекмих отношений решать только прямоугольные треугольники. Однако во многих ситуациях необходимо найти расстояние или угол треугольника, который не является прямоугольным. В этом случае можно найти решение при помощи теоремы синусов .

$$\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}$$

Рекомендуется, перед тем как доказывать теорему синусов аналитически, исследовать её эксперементально, выполнив соответствующие измерения. Эту работу можно организовать в группах и выполнять в следующей последовательности.

Работа в группах. “Для произвольного треугольника отношение синуса углов и противолежащих стороны остаётся неизменным”. Убедитесь в этом проведя измерения.

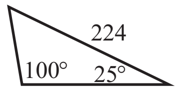
1. Начетрите произвольный треугольник. Обозначьте вершины как A, B, C и стороны как *a*, *b*, *c*. Из вершины B на сторону AC проведите высоту *h*.
2. Запишите тригонометрические отношения $\sin\angle A$ и $\sin\angle C$ из двух полученных прямоугольных треугольников.
3. Из полученных отношений найдите переменную *h*.
4. Запишите полученные равенства.
5. Разделите каждую из двух сторон равенства на *ac*.



6. Полученное равенство одна из частей теоремы синусов.
7. Запишите отношение для угла B.
8. Какие измерения участвуют в теореме синусов?

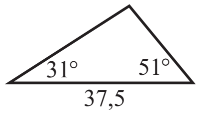
Если заданный треугольник не является прямоугольным, то для решения треугольников должно быть известно 3 элемента - обязательно додна сторона, и в качестве двух других элементов сторона или угол. Можно рассмотреть 5 случаев.

Два угла и одна из противолежащих сторон.



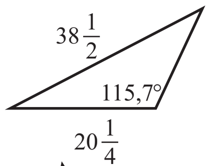
УУС

Два угла, прилежащих к одной стороне.



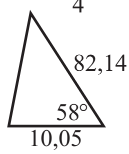
УСУ

Две стороны и угол, противолежащий к одной стороне.



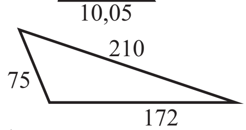
ССУ

Две стороны и угол между ними.



СУС

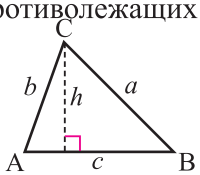
Три стороны

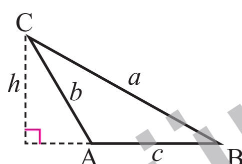


ССС

В последних двух случаях (СУС и ССС) треугольники решаются по теореме косинусов.
Особое внимание уделяется тому, чтобы каждый учащийся представлял теорему синусов словесно, аналитически и геометрически(в аккуратном виде).

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.



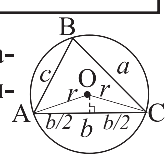


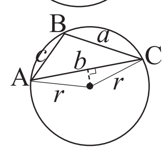
$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C}$$

остроугольный треугольник тупоугольный треугольник

! **Отношение сторон треугольника к синусам противолежащих углов постоянно и равно диаметру окружности описанной около треугольника.**

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R$$

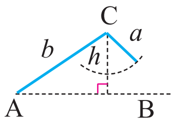




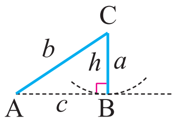
Доказательство теоремы выполняется вместе с заданием У.10.

Для треугольника рассматриваются все возможные случаи ССУ. Пусть в треугольнике ABC заданы стороны *a,b* и угол A. Если угол A острый возможны 5 случаев, если тупой возможны 3 случая.

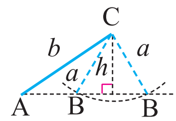
A острый угол



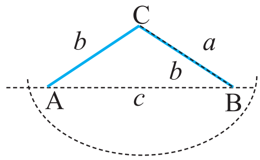
а) если $a < b$ и $a < h$ решений нет



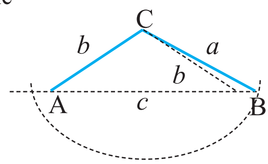
б) если $a < b$ *так как* $a = h$ существует одно решение



в) если $h < a < b$ существует два решения

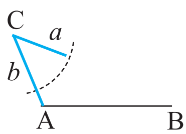


г) если $a = b$ существует одно решение

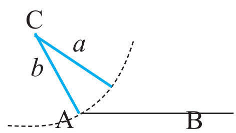


д) если $a > b$ существует одно решение

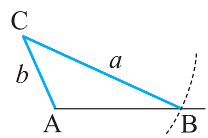
∠A тупой угол



а) если $a < b$ решений нет

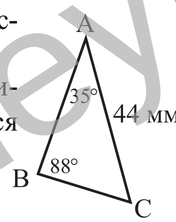


б) если $a = b$ решений нет



в) если $a > b$ *существует* одно решение

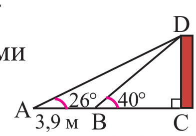
Надо вспомнить теоремы о конгуэнтности треугольников. Эти теоремы охватывают условия СУС, УСУ, ССС. Существование 0, 1 или 2 треугольников соответствующих случаю ССУ не даёт возможности доказать теорему о конгруэнтности. При применении теоремы синусов в случае ССУ могут возникнуть неопределённые случаи, когда заданный угол не соответствует противолежащей стороне. Если заданы три угла(случай УУУ), то это является условием подобия, но не конгруэнтности. Поэтому, решить треугольник невозможно. В этом случае существует бесконечное множество треугольников.



В учебнике представлено много задач на применение теоремы синусов. Надо проследить за тем, на каком уровне каждый учащийся выполняет различные задания.

1. По рисунку треугольника с заданными размерами.

2. По словесному описанию, требующего изобразить треугольник. В ΔABC $\angle A = 57°$, $\angle B = 73°$ и $AB = 24$ см. Найдите длину AC.



3. Определяет количество решений, в соответствии с заданными размерами. В Δ ABC $\angle A = 123°$, $a = 23$ см и $b = 12$ см.

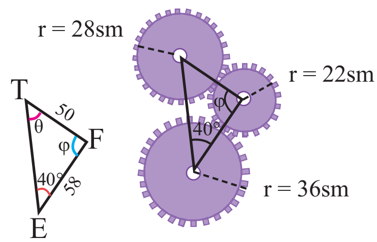
4. Задания соответствующие реальной ситуации. Определение высоты.

5. Задания на вычисления площади треугольников. Площадь треугольников находится при помощи различных формул -по стороне и высоте, проведённой к этой стороне, формулы Герона, по двум сторонам и синусу угла между ними.

? Решение некоторых заданий из учебника

D.21. По данным на рисунке, для конструкции зубчатого колеса, найдите угол θ.

Решение: сначала из ΔETF по теореме синусов найдём угол θ.



$\dfrac{58}{\sin\theta}=\dfrac{50}{\sin 40°}$ $\quad \sin\theta=\dfrac{58\cdot\sin 40°}{50}\approx 0{,}7456$

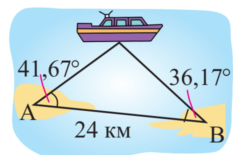
Отсюда (так как по данным EF<ET, то угол θ не может являться тупым углом). Тогда $\theta\approx 48°$

$\theta\approx 180°-(40°+48°)=92°$

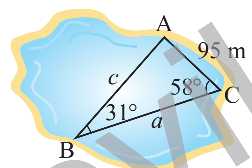
Рабочий лист № 1

Имя ____ Фамилия ______ Дата ________

1) Объект А наблюдается с корабля под углом 41°57′, объект В под углом 36°17′. Найдите, приблизительно, расстояние от объекта А до корабля.



2) Результаты измерения, выполненные на озере отмечены на плане. По плану найдите, приблизительно, расстояния *a* и *c*.



3) По каким данным можно определить, что треугольник не существует, существует один или два треугольника?

1) $a = 10$, $c = 4$ и $\angle C = 148°$

3) $b = 2$, $c = 8$ и $\angle C = 120°$

2) $a = 2{,}4$, $b = 3{,}1$ и $\angle A = 24°$

4) $c = 10$, $a = 6$ и $\angle A = 28°$

4) Не применяя теорему синусов, объясните почему треугольник, удовлетворяющий условию $A = 112°$, $b = 12$ см, $a = 8$ см не существует.

Урок 59-62. Учебник стр. 114-118 Теорема косинусов. Обобщающие задания. 4 часа

Содержательный стандарт

3.1.1. Применяет теоремы синусов и косинусов при решении задач.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

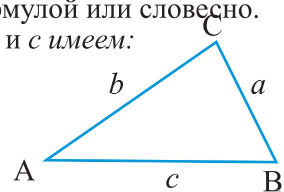
- *представляет возможные случаи применения теоремы косинусов(СУС и ССС);*
- *применяет теорему косинусов;*
- *при помощи теоремы косинусов решает задачи на реальную ситуацию.*

Выполняется исследовательское задание из учебника. Учащиеся в тетради изображают прямоугольный, остроугольный и тупоугольный треугольники(обозначив их одинаково) и измеряет их стороны. После чего проверяют, какой треугольник удовлетворяет следующим условиям. Такого рода имперический подход позволяет ещё лучше понять сущность данного понятия.

- $a^2 + b^2 = c^2$
- $a^2 + b^2 > c^2$
- $a^2 + b^2 < c^2$

Учащиеся понимают, что теорема косинусов,справедлива для любого треугольника и должны уметь представить теорему словами, формулой или словесно.

Для произвольного треугольника ABC со сторонами a, b и c *имеем:*



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$

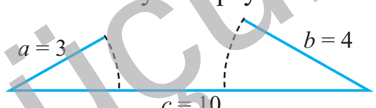
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$

Квадрат каждой стороны треугольника равен:
сумме квадратов двух других сторон, минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

Теорема Пифагора представляется как частный случай теоремы косинусов. При $\angle C = 90^o$ $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos 90° = b^2 + a^2$

Во время решения задач по теореме синусов и косинусов надо стараться соответственно изображать их геометрически в определённом масштабе. Это помогает учащимся проверить формулу и осознать, что математика не абстрактная, а реальная наука.

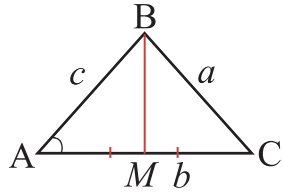
! При применении теоремы косинусов необходимо помнить о неравенстве треугольников. Сумма длин двух сторон треугольника должна быть больше третьей стороны. В противном случае треугольник не существует.



Примеры из учебника выполняются с объяснениями. Теорема косинусов даёт возможность устранить неопределённость при помощи условия,что напротив большей стороны лежит больший угол, и это даёт возможность однозначно найти значения других углов. Важно, чтобы учащиеся могли создавать презентацию заданий из рабочих листов.

Решение некоторых заданий из учебника

У.5. в) найдите медианы треугольника со сторонами 10 см, 12 см и 14 см.
Решение: при решении задач в общем виде формулу для медианы треугольника можно записать из теоремы косинусов из Δ ABC $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\angle A$



Отсюда $\cos\angle A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

В Δ ABC проведём медиану BM и найдём длину медианы BM по теореме космнусов из Δ ABM.

$$BM^2 = AB^2 + AM^2 - 2AB \cdot AM \cdot \cos\angle A = c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$= c^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} = \frac{4c^2 + b^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2a^2}{4} = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$$

Обозначим длину BM через m_b (медиана, проведённая к стороне b) . Получим

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

По тому же правилу получим, что $m_a = \dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$; $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

Здесь m_a - медиана, проведённая к стороне a, m_c - медиана, проведённая к стороне c. По условию $a = 10$, $b = 12$, $c = 14$. Тогда

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 12^2 + 2 \cdot 14^2 - 10^2} = \frac{1}{2}\sqrt{580} = \sqrt{145}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 14^2 - 12^2} = \frac{1}{2}\sqrt{448} = \sqrt{112}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 12^2 - 14^2} = \frac{1}{2}\sqrt{292} = \sqrt{73}$$

У.8. в) Решение: Из Δ ADB по теореме Пифагора имеем:

$AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17$ и

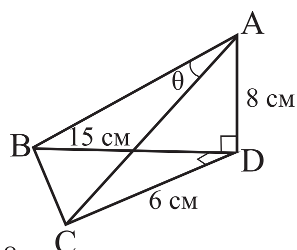
Из ΔADC $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

Из ΔADC $BC = \sqrt{15^2 + 6^2} = \sqrt{261}$

Из Δ ABC по теореме косинусов получим

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos\theta$

Отсюда:



$$\cos\theta = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{17^2 + 10^2 - 261}{2 \cdot 17 \cdot 10} = \frac{128}{340} \approx 0{,}38$$

и $\theta \approx 68°$

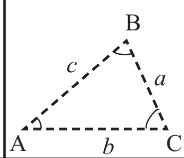
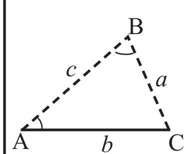
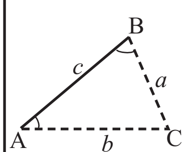
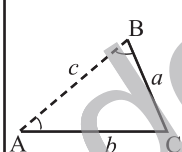
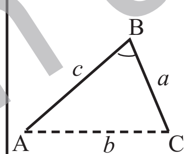
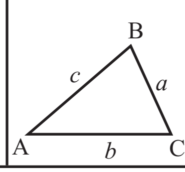
Рабочий лист № 2

Презентация

Решение треугольников

Имя ____ Фамилия ______ Дата ________

Перечертите таблицу в тетрадь. Приведите пример для каждого возможного случая.

Случай	Словесное выражение	Условие существования треугольника.	Количество треугольников	Изображение	Комментарии
УУУ	Три угла	Сумма углов 180°.	∞		Невозможно решить
УУС	Два угла и сторона, лежащая напротив одного из них	Сумма двух углов меньше 180°	1		Решается по теореме синусов
УСУ	Два угла прилежащие к одной стороне	Сумма двух углов меньше 180°	1		Решается по теореме синусов
ССУ	Две стороны и угол, напротив одной из них		0,1,2		Неопределённый случай
СУС	Две стороны и угол между ними		1		Решается по теореме косинусов
ССС	Три стороны	Сумма двух сторон больше третьей	1		Решается по теореме косинусов

Рабочий лист № 3

Презентация

Решение треугольников

Имя ____ Фамилия ______ Дата ________

Случай 1. Известны одна сторона и два угла. (СУУ или УСУ)	Шаг 1. Находит все углы треугольника знаяя сумму внутренних углов. Шаг 2. Нахдит остальные стороны, по теореме синусов.
Случай 2: Две стороны и дин угол (не расположенный между сторонами)(ССУ)	Это неопределённый случай: может существовать 0;1,2 треугольника Шаг 1. Находятся углы по теореме синусов. Шаг 2. Находятся другие углы, зная зная сумму внутренних углов. Шаг 3. Находятся стороны по теореме синусов. Если существует 2 треугольника, то шаги 2 и3 повторяются.
Случай 3: Две стороны и угол между ними. (СУС)	Шаг 1. Стороны находятся по теореме косинусов. Шаг 2. По теореме синусов находят наименьший из двух углов. Шаг 3. Находятся другие углы, зная зная сумму внутренних углов.
Случай 4: Три стороны. (ССС)	Шаг 1. Находят больший угол по теореме косинусов.. Шаг 2. Находят один из оставшихся углов по теореме синусов. Шаг 3. Находятся другие углы, зная зная сумму внутренних углов.

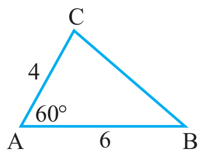
Для каждого из случаев дополнительно представьте примеры и закончите презентацию.

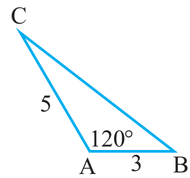
Рабочий лист № 4

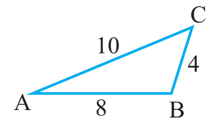
Применение теоремы косинусов.

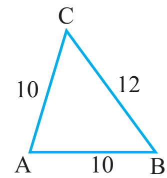
Имя ____ Фамилия ______ Дата ________

Решите треугольники.









$\angle A = 67{,}3°$; $b = 37{,}9$ км, $c = 40{,}8$ км

a=9,3 см; b = 5,7 см, c = 8,2 см

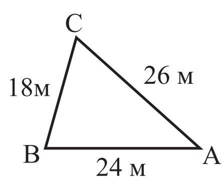
a= 8 м, b= 14 м, c = 17 м

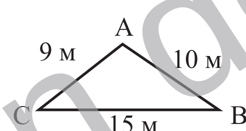
$\angle C = 72°\ 40'$; a = 99 м, c = 76 м

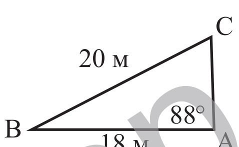
$\angle B = 74°$; a = 22 см, c = 16 см

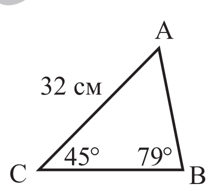
$\angle C = 59{,}70°$; a = 5 км, b = 7 км

$\angle A = 112{,}8°$; b = 6,28 см, c = 12,2 см







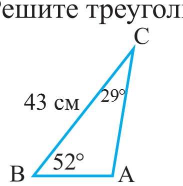


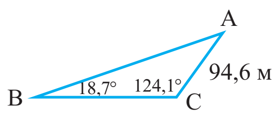
Теоремы синусов и косинусов.
Критерии суммативного оценивания

N	Критерии	Примечание
1	Применяет теорему синусов в простых ситуациях.	
2	Решает задачи на ситуацию, применяя теорему синусов.	
3	Применяет теорему косинусов в простых ситуациях.	
4	Решает задачи на ситуацию, применяя теорему косинусов.	

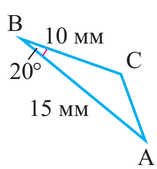
Урок 63. Теоремы синусов и косинусов.
Задания для суммативного оценивания

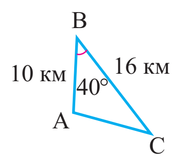
1) Решите треугольник.

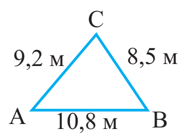


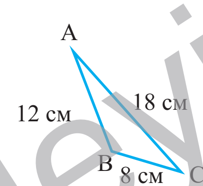


2) Решите треугольники.









3) Решите треугольники.

а) $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$ б) $\angle A = 50^\circ$, $b = 3$, $c = 11$

4) Решите треугольники.

а) $\angle A = 60^\circ$, $a = 9$, $c = 10$ б) $\angle A = 36^\circ$, $a = 8$, $b = 5$

5) В каком случае построенный треугльник не является единственным?

а) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 80^\circ$ б) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$

в) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ г) $a = 2$, $b = 2$, $c = 2$

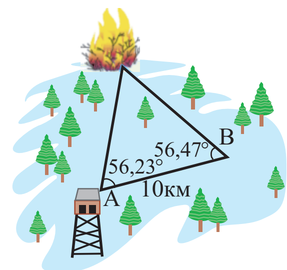
6) В каком случае можно построить единственный треугольник?

а) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 80^\circ$ б) $a = 3$, $b = 5$, $c = 20$

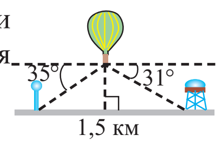
в) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 30^\circ$ г) $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$

7) По теореме синусов обоснуйте существование треугольника по следующим данным: a = 5,2 см, b = 7,5 см, $\angle A = 105°$.

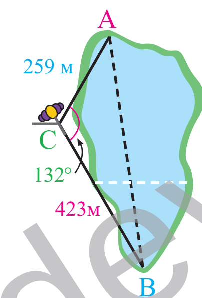
8) Пожар в лесу находится от пунктов А и В как показано на рисунке. Какой из пунктов расположен на наименьшем расстоянии от очага возгорания? Найдите это раастояние.



9) Человек летящий на воздушном шаре видит один из населённых пунктов под углом 35°, а другой под углом 31°. На каком расстоянии от земли находится шар, если расстояние между двумя пунктами равно 1,5 км?



10) Наблюдатель хочет путём непосредственного измерения определить расстояние между двумя точками. Возможные полученные значения отмечены на плане. Найдите расстояние между точками А и В.



11) Найдите площади треугольников.

5.Тригонометрические функции

Таблица планирования по разделу

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
2.2.2. Знает понятие функции, исследует периодичность, чётность, монотонность функций, умеет преобразовывать графики. 2.2.3. Знает понятие сложной функции, обратной функции и находит обратные функции некоторых функций. 2.2.4. Знает основные тригонометрические функции и обраные тригонометрические функции, строит их графики.	64-66	Периодические функции. График функции $y = \sin x$. График функции $y = \cos x$.	3	122-127
	67-70	Преобразование графиков функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Период и амплитуда функций $y = a\sin bx$ и $y = a\cos bx$.	4	128-135
	71-74	Построение синусоиды по 5-ти основным точкам. Тргонометрические функции и периодические события.	4	136-143
	75-77	Изменение тангенса угла. Графики функций $y = tg\,x$ и $y = ctg\,x$.	3	144-149
	78-81	Обратные тригонометрические функции. Обобщающие задания	4	150-156
	82	Тригонометрические функции. Задания для суммативного оценивания	1	
	83	Задания для полугодового оценивания	1	
		Всего	20	

Урок 64-66. Учебник стр.. 122-127. Приодические функции. График функции $y = \sin x$. График функции $y = \cos x$. 3 часа

Содержательный старнарт

2.2.2. Знает понятие функции, исследует периодичность, чётность, монотонность функций, умеет преобразовывать графики.
2.2.4. Знает основные тригонометрические функции и обраные тригонометрические функции, строит их графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

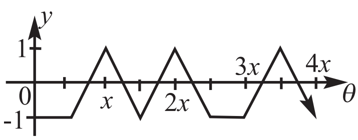
Дополнительные ресурсы

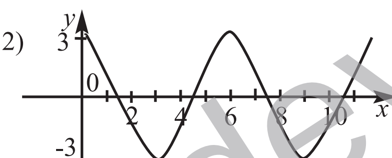
Рабочие листы

- *определяет значения периодических функций по таблице значений и по графику;*
- *определяет период, наибольшее и наименьшее значение и область значений периодических функций;*
- *строит графики функций y = sinx и y = cosx;*
- *представляет свойства функций y = sinx и y = cosx*

Математический словарь *периодическая функция, период,амплитуда*

1-ый час. Представляются примеры функций изменяющихся периодически. Известно, что периодическими являются как природые явления, так и производственные процессы. Учащиеся могут определить по графику является или нет функция периодической, период функции, максимальное и минимальное значение и область значений.

1) 

2) 

Периодичнойсть функции определяется по вертикали, т.е. по значениям y. Например, из графика 1 видно, что значение -1 функция принимает в 0 и это значение остаётся постоянным,а потом меняется от -1 до 1, при значениях аргумента от $\frac{5x}{2}$ до $3x$ снова остаётся постоянным и опять принимат значения от -1 до 1. Сам период находится по горизонтали(расстояние), т.е. по изменению x. Например, функция 1 принимает все свои возможные значения при значениях аргумента от 0 до $\frac{5x}{2}$. Остальные значения функции и её график состоит из повтора этой части. Таким образом, период функции равен $\frac{5x}{2}$

. Максимальное значение функции 1, минимальное значение -1.По графику функции 2 также можно найти период. В точке 0 функция принимает значение 3. Вновь это значение функция принимает в точке 6. Значит период функции равен 6.

Приведённые в учебнике задания выполняются с обсуждением. Например, при выполнении задании У.2. комментириуется реальная ситуация, соответствующая диаграмме рассеивания. Карусель,моделируется определёнными одинаковыми частями единичной окружности. От определённого момента кабинка через 2 минуты достигает максимальной высоты(50 м от земли) и за следующие 2 минуты вновь достигает поверхности земли. Значит один оборот(период) карусели равен 4 минутам.

Для диагностического оценивания рекомендуетс самостоятельная работа девиз которой “Я изучил”. Ниже представлен соответствующий пример.

Рабочий лист № 1

Имя _________ Фамилия_________ Дата______

Математическая запись

1) Что вы изучили о периодических функциях?

1. ____
____
____
____
____

2.____
____
____

2) Соедините математические понятия и их объяснения.

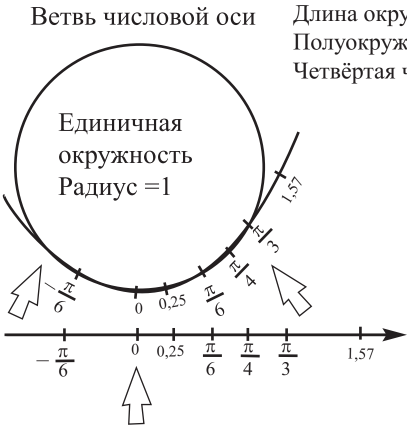
периодическая функция	значения y повторяются на определённом интервале
период	такой наименьший итервал значений x, в котором функция принимает все значения из области значений функции.

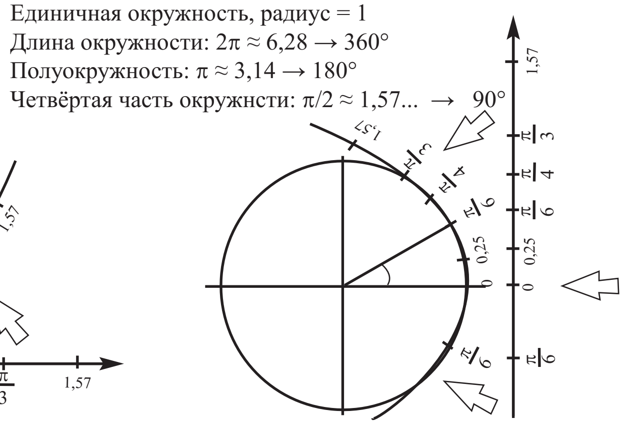
Как вы представите в виде периодической функции движение совершаемое велосипедистом при прокручивании педалей?

____
____
____
____

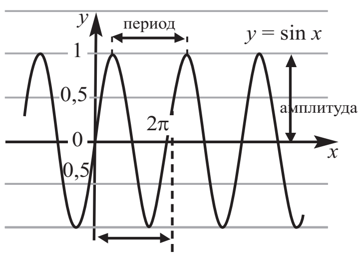
3) Изобразите в виде графика пример периодической функции с периодом 10 и множеством значений $4 \le y \le 10$.

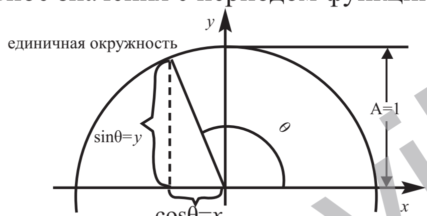
2-ой час. Совместно с классом выполните построение графиков функции $y = sinx$ *и* $y = cosx$ по шагам(с обсуждением). Учащиеся должны понимать, что движение по окружности отмечается на оси x, а расстояние между точками на окружности от оси x, отмечается на оси y. То есть, значениям тригонометрических функций на единичной окружности, соответствует точка P (cosθ и sinθ) и выражаются они действительными числами. Это можно увидеть на риунка, представленных ниже.





Учащиеся должны представлять, что так как функции $y = sinx$ *и* $y = cosx$ периодические функции, то на графике их значения повторяются.Также они должны уметь связывать максимальное и минимальное значения с периодом функции.



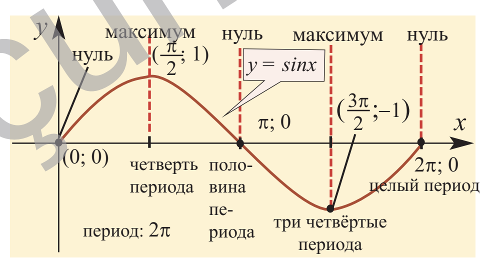


угол поворота (θ+2π) на единичной окружности изображается точкаими θ.То есть, sin(θ+2π) = sin$x$

Выполняется построение функций y = sin$x$; y = cos$x$ на отрезке [0; 2π] по 5-ти основным точками.

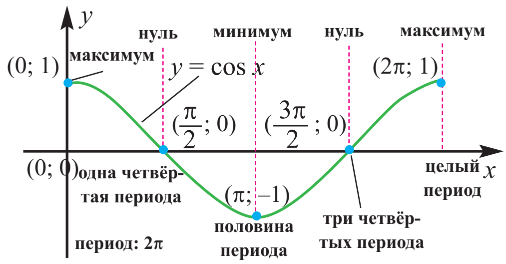
$y = sinx$		
Точки	y	x
нуль	0	0
максимум	1	$\frac{\pi}{2}$
нуль	0	π
минимум	–1	$\frac{3\pi}{2}$
нуль	0	2π

График функции $y = sinx$ по 5-ти основным точками



$y = \cos x$		
Точки	y	x
максимум	1	0
нуль	0	$\frac{\pi}{2}$
минимум	–1	π
нуль	0	$\frac{3\pi}{2}$
максимум	1	2π

График функции $y = \cos x$
по 5-ти основным точками

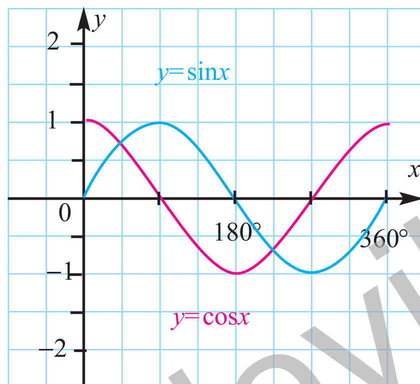


Решение некоторых заданий из учебника

У.**5** Это задание рекомендуется выполнить в виде презентации.

Схожие и отличительные свойства функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$

Схожие свойства. Период 2π (360°)
Амплитуда 1.
Множество значений отрезок $[-1; 1]$.



Отличительные свойства:

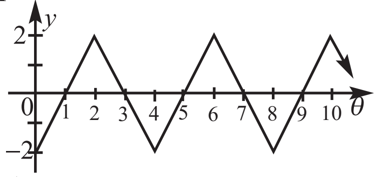
1. График функции $y = \cos x$ пересекает ось абсцисс в точках $\frac{\pi}{2} + \pi n$, а график функции $y = \sin x$ пересекает ось абсцисс в точках $x = \pi n$ $(n \in Z)$.
2. Функция $y = \sin x$ принимает максимальное значение в точках $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, а функция $y = \cos x$ в точках 2πn .
3. На отрезке $[0; 2\pi]$ функция $y = \sin x$ принимает одно максимальное значение, а функция $y = \cos x$ два максимальных значения.
4. На отрезке $[0; 2\pi]$ функция $y = \sin x$ имеет три нуля, а функция $y = \cos x$ имеет два нуля.
5. Функция $y = \cos x$ принимает максимальное значение быстрее функции $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$.

Рекомендуется графики фунций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ строить на разных интервалах. Эти же графики рекомендуется строить при помощи графкалькулятора.

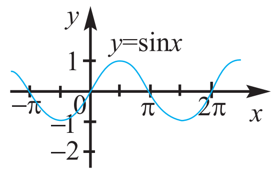
Задания для быстрого диагностического оценивания

1) Укажите ложные утверждения для функции $y = sin\ x$.
а) Множество значений между числами -1 и 1 включая эти числа.
б) Область определения множество всех лействительных чисел.
в) Пересекает ось y в точке (0; 0).
г) Основной период π.

2) Если функция является периодической, то укажите период.



3) По графику найдите $\sin 5\pi$ и $\sin(-600°)$.



4) Укажите ложные утверждения для функции $y = \cos x$.
а) Пересекает ось x в точках $\pi/2 + \pi n$ (n целое число).
б) Пересекает ось y в точке (0; 1).
в) Принимает максимальное значение в точках $\pi/2 + \pi n$ (n целое число).
г) Период 2π.

5) Установите соответствие между функцией $y = \sin t$ и свойством.

a) $t=\frac{\pi}{6}+10\pi$ b) $t=-\frac{\pi}{4}$ c) $t=\frac{-15\pi}{4}$ d) $t=13\pi$ e) $t=\frac{21\pi}{2}$

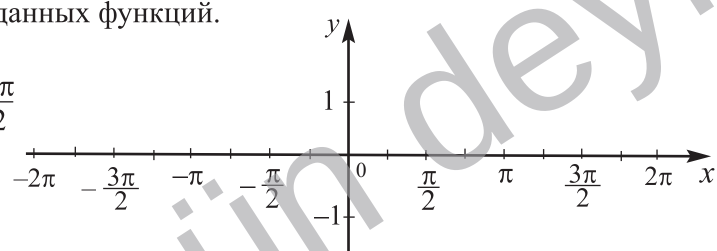
1) $\sin t=0$ 2) $\sin t=\frac{1}{2}$ 3) $\sin t=1$ 4) $\sin t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 5) $\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Рабочий лист № 2

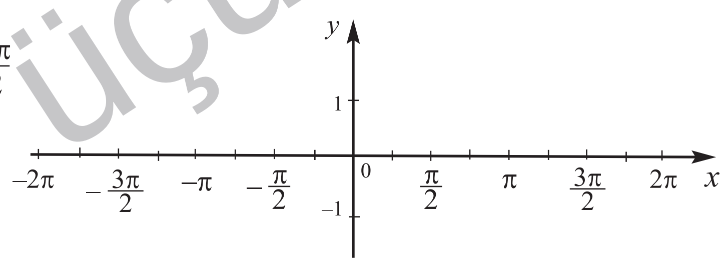
Имя __________ Фамилия__________ Дата________

Постройте график заданных функций.

$y = \sin x,\ -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$



$y = \cos x,\ -\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$



Урок 67-70. Учебник стр. 126-133. Преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Период и амплитуда функций $y = a \sin bx$ и $y = a \cos bx$. 4 часа

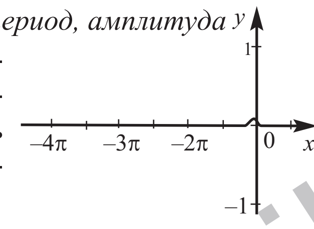
2.2.4. Знает основные тригонометрические функции и обраные тригонометрические функции, строит их графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы
http://www.analyzemath.com/trigonometry_worksheets.html

- *определяет амплитуду и период функций вида $y = a \cdot \sin bx$ и $y = a \cdot \cos bx$*
- *записывает формулу функции по графику*
- *при помощи тригонометрических функций моделирует реальные ситуациии*
- *записывает словесно и представляет графически преобразования функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в функции $y = a \sin bx$ и $y = a \cos bx$*
- *записывает словесно и представляет графически преобразования функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ в функции $y = a \sin b(x - c) + d$ və $y = a \cos b(x - c) + d$.*

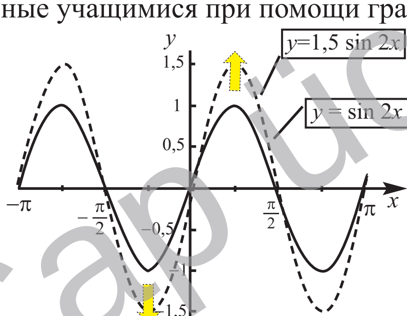
Математический словарь *периодическая функция, период, амплитуда*

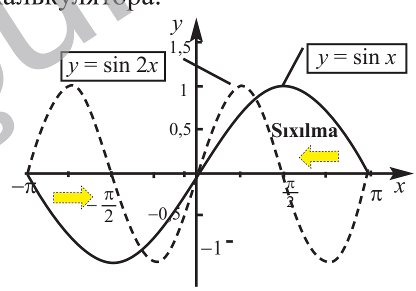


Показанные функции можно построить на любом интервале. Если интервал расположен далеко от 0, например, [–4π; – 2π], то целесообразно использовать координату пересечения с началом координатной плоскости.

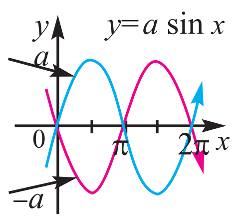
На примере графиков из учебника учащиеся исследуют как параметры a и b влияют на функцию $y = \sin x$. При этом они должны увидеть, что при изменении переметров a и b меняется амплитуда и период функции.

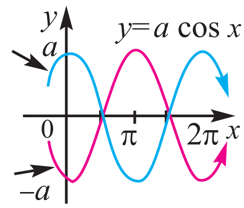
1-ый час. Растяжение и сжатие оа вертикали и горизонтали (параметры a и b). Учащиеся должны уметь вразить словесно и геометрически преобразование функций вида $y = a\sin bx$ и $y = a\cos bx$ при изменении на значения a больше 1 или меньше 1(как для положительных, так и для отрицательных значений). Для этой цели необходимо заранее создать слайды с рисунками, полученные учащимися при помощи графкалькулятора.





Учащиеся должны понять, что при отрицательном значении a-($a < 0$) график функции симметрично отображается относительно оси x. В случае $b < 0$ с учётом того, что синус является нечётной функцией, а косинус чётной приводит к случаям, указанным выше.





2-ой час. Выполняются задания в которых требуется найти период и амплитуду функций $y = a\sin bx$ və $y = a\cos bx$, а также прикладные задачи.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.10. Найдите общий период функций $f(x)$ и $g(x)$.
Решение:

а) $f(x) = 2\sin\frac{2x}{3}$ $\quad g(x) = 3\cos\frac{1}{2}x$

Основной период функции $f(x)$ равен $T_1 = \dfrac{25}{\frac{2}{3}} = 3\pi$,

Основной период функции $g(x)$ равен $T_2 = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Понятно, что все числа nT_1 ($n \in Z$) для функции $f(x)$,

и все числа mT_2 ($m \in Z$) для функции $g(x)$ также являются периодами функций.

Для нахождения общего периода этих функций T , надо найти такие числа n и m , которые бы удовлетворяли равенству $T = nT_1 = mT_2$.

Здесь $n \cdot 3\pi = m \cdot 4\pi$

Из равенства $3n = 4m$ найдём наименьшие натуральные числа n и m.

Ясно,что $n = 4$, $m = 3$.

Тогда общий период будет $T = 4 \cdot T_1 = 4 \cdot 3\pi = 12\pi$

У 11. Решение: Движение подвешенного тела моделируется функцией $y = a\cos kt$. Отсюда при $a = 0{,}5$, $k = 5\pi$ получаем,

$y = 0{,}5\cos 5\pi t.$

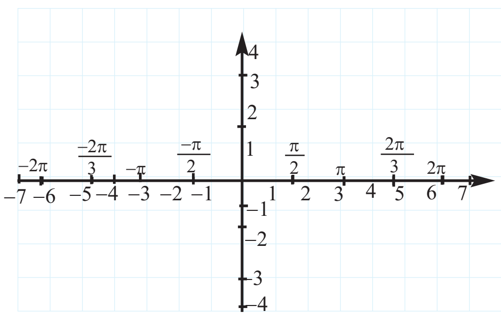
Период гармонического колебания равен $\frac{2}{5}$, амплитуда равна 0,5.

Рабочий лист № 3

Имя __________ Фамилия__________ Дата_______

Определите амплитуду и период функций и постройте их графики.

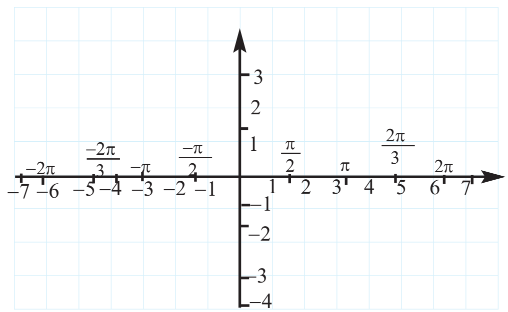
$y = 3\sin x$



Амплитуда_______

Период___________

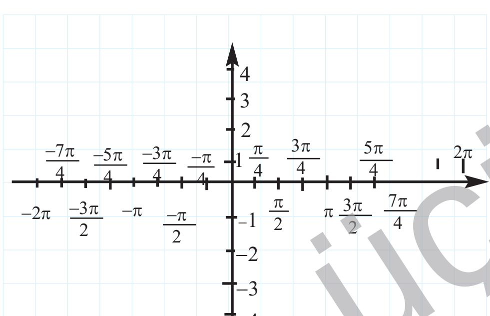
$y = 2\cos x$



Амплитуда _______

Период ___________

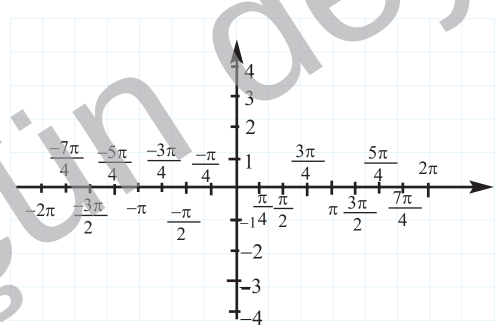
$y = 3\sin 2x$



Амплитуда _______

Период ___________

$y = 4\cos 2x$



Амплитуда _______

Период ___________

Рабочий лист № 4

Имя _________ Фамилия_________ Дата______

1) $y=\sin 4x$
Амплитуда =_________
Период =_____________

2) $y=\cos 5x$
Амплитуда =_________
Период =_____________

3) $y=\sin x$
Амплитуда =_________
Период =_____________

4) $y=4\cos x$
Амплитуда =_________
Период =_____________

5) $y=-5\sin x$
Амплитуда =_________
Период =_____________

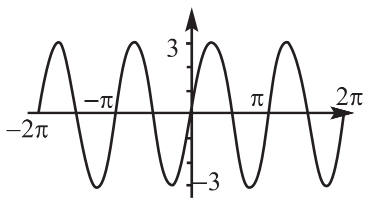
6) $y=5\sin(-4x)$
Амплитуда =_________
Период =_____________

7) $y=3\sin\frac{2}{3}x$
Амплитуда =_________
Период =_____________

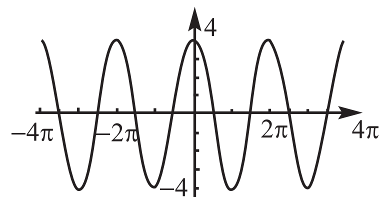
8) $y=-4\cos 5x$
Амплитуда =_________
Период =_____________

9) $y=3\cos(-2x)$
Амплитуда =_________
Период =_____________

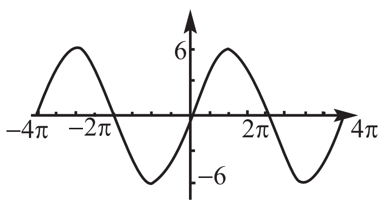
Для следующих графиков запишите амплитуду и основной период. Для каждого графика запишите соответствующую формулу.



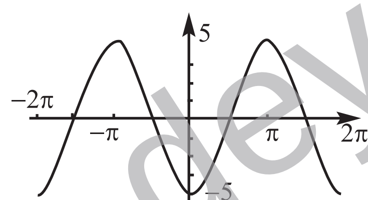
Амплитуда =_________
Период =_____________
Формула:_____________



Амплитуда =_________
Период =_____________
Формула :_____________



Амплитуда =_________
Период =_____________
Формула :_____________



Амплитуда =_________
Период =_____________
Формула :_____________

Для заданной амплитуды и периода запишите формулу функции косинуса.
а) амплитуда 1,основной период 270°
Формула_________________

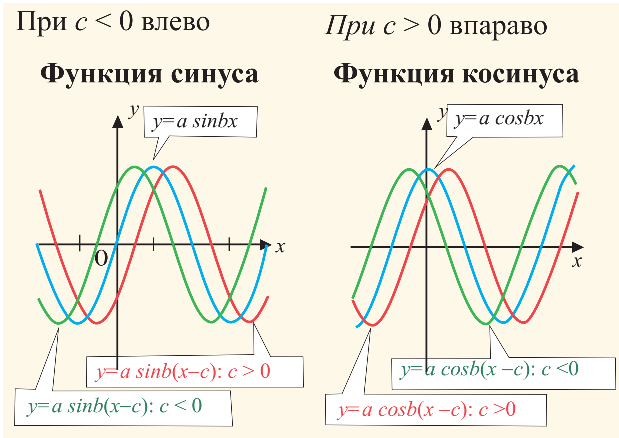
б) амплитуда $\frac{3}{4}$, основной период π
Формула _________________

3-ий-4-й час. Движение по горизонтали (член с). Рассмотрим функцию вида $y = a\sin b(x - c)$ и $y = a\cos b(x - c)$. В зависимости от знака c график функции смещается влево или вправо.

Примеры из учебника рассматриваются с обсуждением. Это смещение характерезует фазу.Рекомендуется рассматривать примеры как в градусах,так и в радианах. Например, учащиеся должны уметь выполнять как задание

$y = 3\sin 2(x - 60°)$, так и

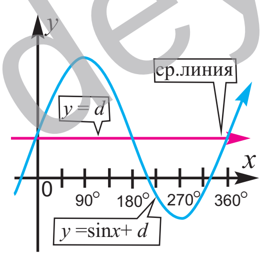
$y = 3\cos 3(x + \frac{\pi}{4})$ Момент требующий особого внимания:



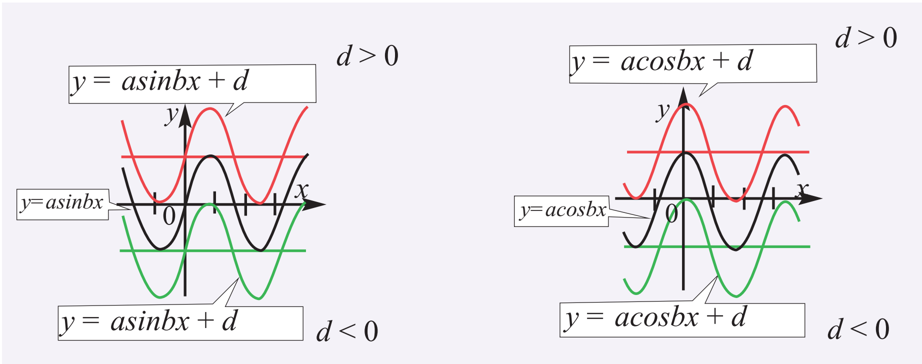
! Если формула функции задано в виде $y = a\sin(bx - c)$, то для нахождения фазы необходимо b вынести за скобку. В этом случае фаза равна $\frac{c}{b}$.

Чтобы оценить знания и умения преобразовывать графики можно выполнить задание У.19 и ему подобные. Оно направлено на осознание того как различные члены(параметры) могут влиять на растяжение и смещение графиков по вертикали и горизонтали и симметричные преобазования. Ученики должны уметь представить преобразования выраженные словами в виде формулы.

Смещение по вертикали (член *d*). Рассматривается преобразование функции вида $y = a\sin b(x - c) + d$ и $y = a\cos b(x - c) + d$. В зависимости от знака d график функции сдвигается вверх или вниз.



Известно, что изменение растояния точек расположенных на графике функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ от оси x имеет свое образную симметрию. Ось x называется горизонтальной осью тригонометрической функции. При смещении по вертикали ось функции смещается на единицы, например, если точка с координатами $(x;y)$ расположена на графике функции $y = \sin x$, то при смещении по вертикали координаты точки изменяются как $(x; y \pm d)$ и горизонтальная ось будет $y = |d|$. Эта ось также называется средней линией. Средняя линия играет важную роль при задании формулы функции по графику.



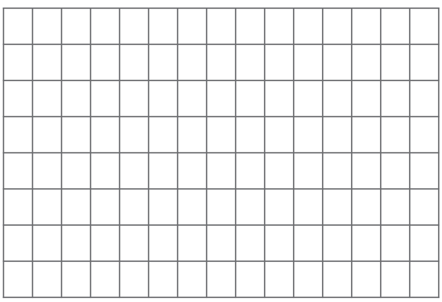
Рабочий лист № 5

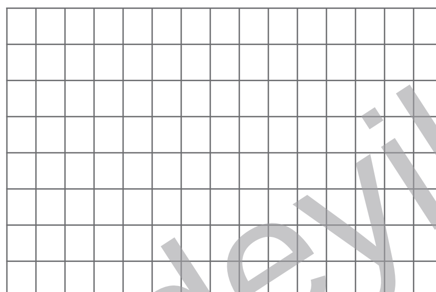
Имя __________ Фамилия__________ Дата________

Выразите преобразования графиков функций словесно и постройте графики.

1) $y = 3\cos(2(x - \frac{\pi}{2})) - 2$

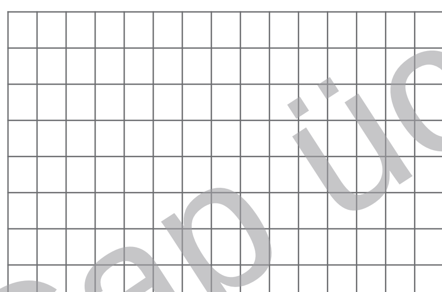
2) $y = 2\sin(2(x + \frac{\pi}{3})) + 2$

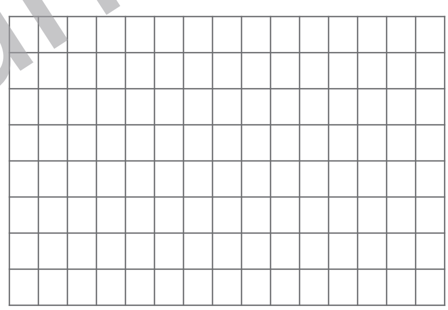




3) $y = -\sin(\frac{\pi}{4}(x + 1)) + 1$

4) $y = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}(x - 2)) + 4$





Урок 71-74. Учебник стр. 136-143. Построение синусоиды по 5-ти основным точкам. Тригонометрический функции и периодические события. 4 часа

2.2.2. Знает понятие функции, исследует периодичность, чётность, монотонность функций, умеет преобразовывать графики.
2.2.4. Знает основные тригонометрические функции и обраные тригонометрические функции, строит их графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

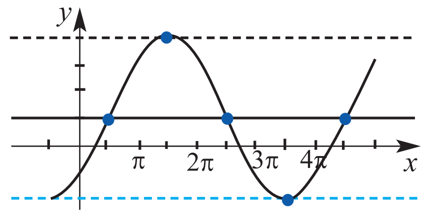
- *моделирует задачи реальных ситуаций при помощи соответствующих тригонометрических функций;*

- *строит графики тригонометрических функций по 5-ти основным точкам*

Графики функций вида $y = a \cdot \sin bx$ и $y = a \cdot \cos bx$ можно построить на любом интервале по 5-ти основным точкам.

Рассмотрим в общем виде построение графика функции вида
$y = a\sin b(x - c) + d$ и $y = a\cos b(x - c) + d$ по 5 -ти точкам на примере.
1-ый шаг. Из формулы функции определите постоянные *a, b, c, d* . Отметьте на координатной плоскости прямую $y = d$. Найдите значения минимума и максимума функции отняв(прибавив) от *d* значение *a* и проведите соответствующую прямую линию .
2-ой шаг. Найдите период по формуле $T = \frac{2\pi}{b}$.
3-ий шаг. Отметив на каждом периоде 5 основных точек и отрезок на оси *x* на одном периоде при помощи 5 делений разделите его на 4 интервала.
4-ый шаг. Определите координаты первой точки. Координата *x* этой точки равна $0 + c$ единиц, координата *y* равна *d* единиц. В соответствии с этими координатами для функции синуса при пересечении её с прямой $y = d$, функции косинуса две точки максимума отметьте первую соответствующую точку.
5-ый шаг. Для функции синус отметьте последовательно 5 точек (нуль, максимум, нуль ,минимум, нуль) а для косинуса (максимум, нуль, минииум, нуль, максимум). От координаты первой точки отметьте размер части интервала, разделённого на 4 части(5 точками). Например, если период равен 4π, то для получения абсциссы следующей точки к каждой предыдущей добавляется π.

Пример. $y = 3\sin\frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2}) + 1$



1. $a = 3$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 1$
Минимальное значение $1 - 3 = -2$, максимальное $1 + 3 = 4$.

2. Найдём период.

$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

3. Интервал от 0 до 4π делится на 4 равные части шагом π.
4. Абсцисса первой точки $x = 0 + c = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$; $y = d = 1$
5. Для функции синуса абсциссы следующих 4 точек и соответствующие значения функций: $\frac{\pi}{2} + \pi$ (максимум), $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ (на прямой $y = d$), $\frac{\pi}{2} + 3\pi$ (минимум), $\frac{\pi}{2} + 4\pi$ на прямой $y = d$).
Эти точки отмечаются и строится график.

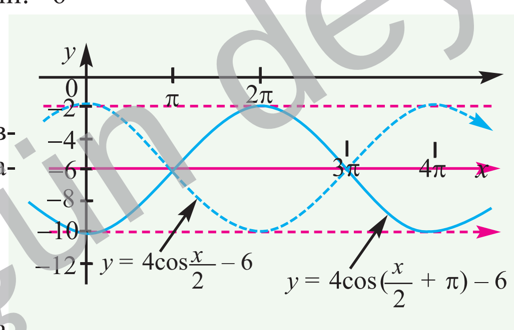
При решении заданий особое внимание из текста обращается на информацию об амплитуде и периода.

В учебнике в качестве примера показано построение графика функции вида $y = a\sin b(x - c)$. Преобразования выполнены при помощи 5 основных точек. Построение графика функции вида $y = a\cos b(x - c)$ можно ещё раз коротко рассмотреть на следующем примере.

Пример. Построим график функции $y = 4\cos(\frac{x}{2} + \pi) - 6$, определив все преобразования. Запишем функцию в виде $y = 4\cos\frac{1}{2}(x + 2\pi) - 6$.

1. Амплитуда: 4
2. Основной период: $T = \frac{2\pi}{b}$ $b = \frac{1}{2}$ $T=4\pi$
3. Сдвиг по фазе: -2π
4. Сдвиг по вертикали: -6

Шаги построения графика:



1. Построим среднюю линию $y = -6$.
2. Так как линии $y = -2$ и $y = -10$ являются амплитудами, то они изображаются пунктирной линией.
3. Изображается график функции $y = 4\cos\frac{x}{2} - 6$ с периодом 4π.
4. Сдвигаем на 2π влево и построим график функции $y = 4\cos\frac{1}{2}(x + 2\pi) - 6$.

Отметим, что график данной функции можно посроить ,предварительно записав ее формулу в виде $y = -4\cos\frac{x}{2} - 6$

Преобразования графиков, при изменении параметров c (сдвига по фазе) или d (смещения по вертикали) может быть выполнено и после уроков. Однако, как параметры (растяжения, сжатия, и т.д.) влияют на преобразования функций должно быть построено на представлениях их в реальных ситуациях. Формирование навыков построения графиков может быть более широко использовано именно на этих уроках. При этом можно использовать следующие рабочие листы.

? Решение некоторых заданий из учебника

У.2. Функция $P = 100 - 20\cos\frac{5\pi t}{2}$ определяет артериальное давление человека завремя t (сек.) в состоянии покоя.

а) Определите период функции.

б) Определите количество ударов сердца человека.

Решение: а) $T = \frac{2\pi}{|b|}$ поэтому $b = \frac{5\pi}{2}$

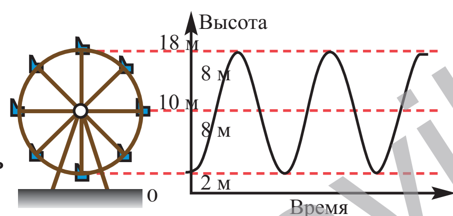
Получим $T = \dfrac{2\pi}{\frac{5\pi}{2}} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ (сек.)

б) количество ударов сердца человека за 1 минуту равно 60 : 0,8 = 75.

У.3. (стр.143)

Решение:

а) График на рисунке соответствует функции косинуса.По условию диаметр карусели 16 м и пассажиры садятся в карусель на высоте(наименьшей) 2 м от земли. Значит, минимальное значение искомой функции косинус равно 2, а максимальное значение 18.



Один полный оборот равен T = 60 сек.

$\frac{2\pi}{b} = 60 \qquad b = \pi/30$

Высоту, на которой находится самая нижняя кабина в момент t секунд от земли, можно найти по формуле $y = 10 - 8\cos\frac{\pi t}{30}$.

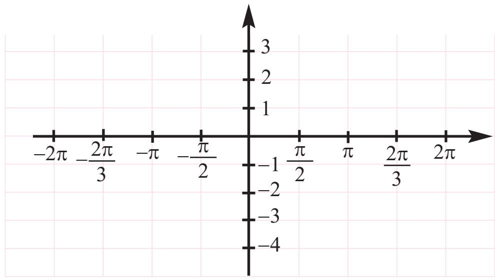
б) в момент t = 2,5 мин = 150 сек. кабина находится на высоте

$y = 10 - 8\cos\frac{150\pi}{30} = 10 - 8\cos 5\pi = 18$ м.

Рабочий лист № 6

Имя _________ Фамилия_________ Дата______

Изобразите графики функций указанными цветами: $y = \sin x$ *(синий);*
$y = \sin x + 3$(красный) ; $y = \sin x - 3$(зелёный).

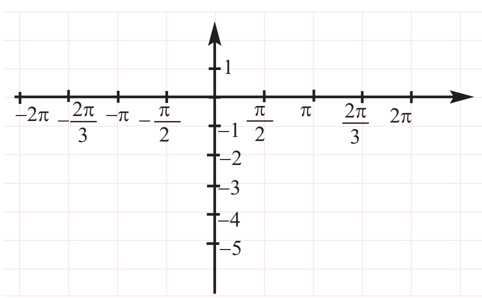


Что произойдёт, если к основной (главной) формуле функции синуса добавить постоянную? ____________________

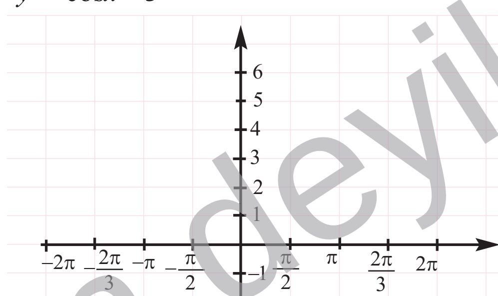
Что произойдёт, если из основной (главной) формулы функции синуса вычесть постоянную? ____________________

Постройте графики функций.

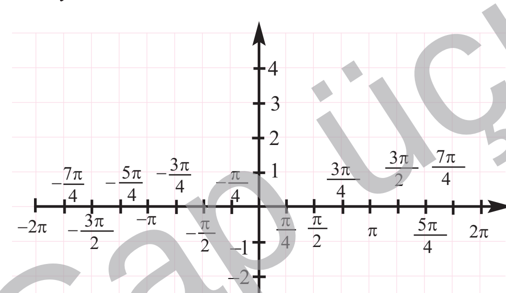
$y = \sin x - 4$



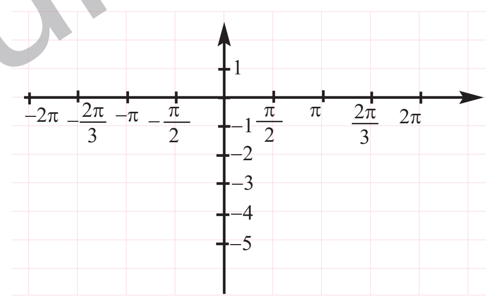
$y = \cos x + 3$



$y = \sin x + 1$



$y = \cos x - 2$

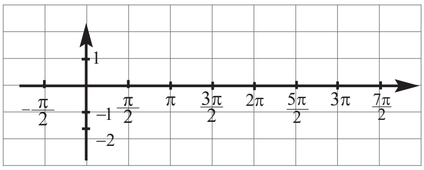


Рабочий лист № 7

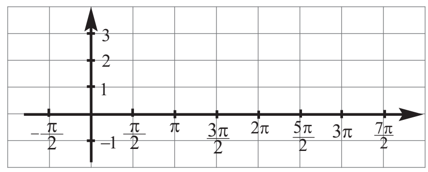
Имя _________ Фамилия_________ Дата_______

Выполните задания.

Постройте график функции
$y = \sin(x - \frac{\pi}{2}) - 1$

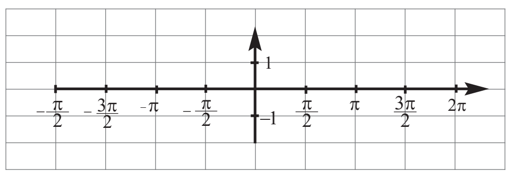


Постройте график функции
$y = \cos(x + \frac{\pi}{2}) + 2$

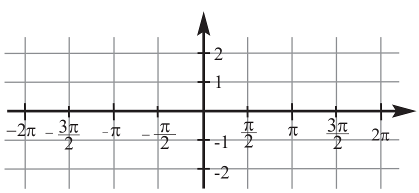


Преобразование

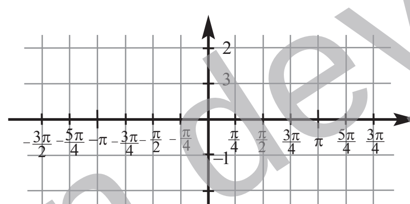
Постройте график функции $y = \sin x$ (красный), $y = -\sin x$ (синий).



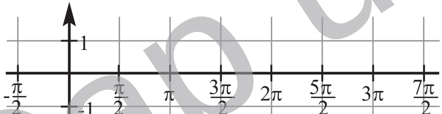
Постройте график функции $y = 2\sin x$



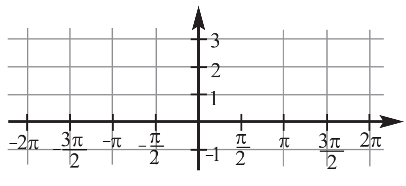
Постройте график функции $y = -2\sin x$



Постройте график функции $y = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$



Постройте график функции $y = -\cos x + 2$



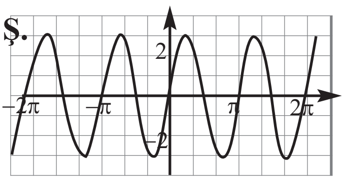
Рабочий лист № 8

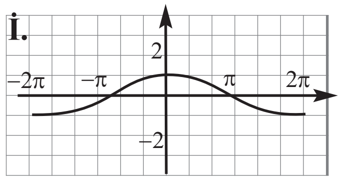
Имя _________ Фамилия_________ Дата_______

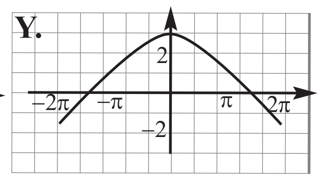
Определите какой функции соответствует график обозначенный буквой и знаками препинания. Запишите буквы в соответствующую пронумерованную ячейку и прочтите предложение.

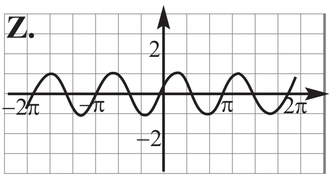
1) $f(x)=3\sin x$	2) $f(x)=\sin(2x)$	3) $f(x)=\sin(\frac{1}{4}x)$	4) $f(x)=\cos(\frac{1}{2}x)$
5) $f(x)=\cos(3x)$	6) $f(x)=\frac{1}{2}\sin(3x)$	7) $f(x)=\frac{3}{2}\sin(\frac{1}{2}x)$	8) $f(x)=2\cos(\pi x)$
9) $f(x)=3\sin(2x)$	10) $f(x)=3\cos x$	11) $f(x)=3\cos(\frac{1}{3}x)$	12) $f(x)=2\cos(3x)$

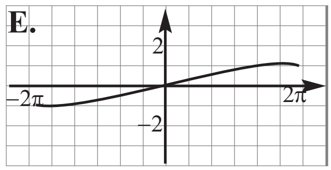
Установите соответствие между формулой и графиком.

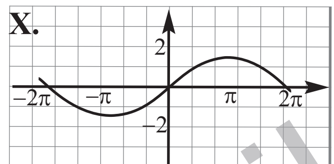
Ş.


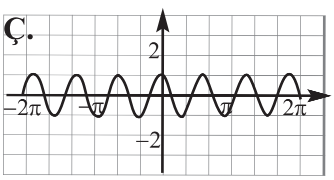
İ.


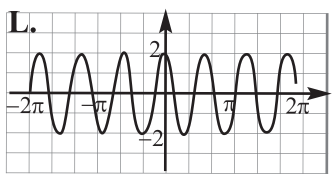
Y.


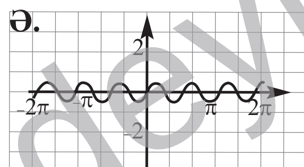
Z.


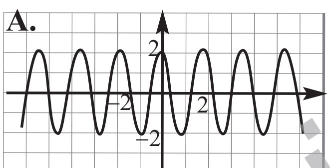
E.


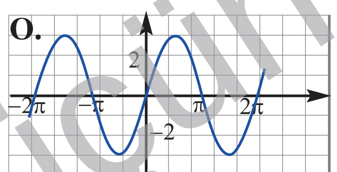
X.


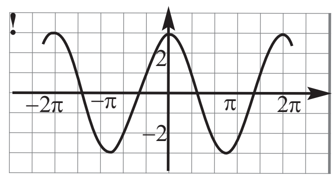
Ç.


L.


Ə.


A.


O.


!


8	2	11	3	5	1	7	4	9	12	6	10

Урок 75-77. Учебник стр. 144-149. Графики функций *y = tg x* и *y = ctg x. 3 часа*

2.2.2. Знает понятие функции, исследует периодичность, чётность, монотонность функций, умеет преобразовывать графики.
2.2.4. Знает основные тригонометрические функции и обраные тригонометрические функции, строит их графики.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнителные ресурсы
Рабочие листы
http://www.analyzemath.com/trigonometry_worksheets.html

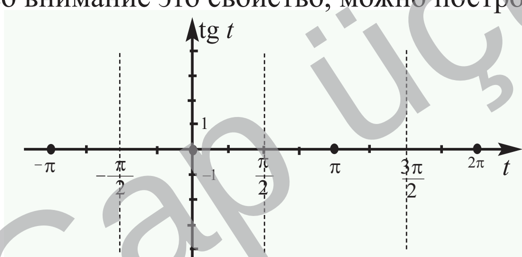
- *строит графики функций y = tgx и y = ctgx;*
- *применяет свойства функций y = tgx и y = ctgx при решении задач;.*
- *представляет преобразования функций y = tgx и y = ctgx*
- *моделирует задачи реальных ситуаций при помощи соответствующих функций y = tgx и y = ctgx.*

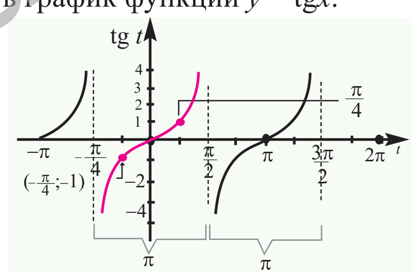
1-ый час. Учащимся при исследовании рекомендуется заполнить таблицу. При этом они понимают область определения функции(при каких значениях *x* определены функции) и ясно представляют себе уравнение асимптот. График рекомендуется строить в следующей последовательности.

1. Строится таблица значений функции.

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
tg x	не определена	-1	0	1	не определена	-1	0	1	не определена	-1	0	1	не определена

2. На координатной плоскости отмечаются асимптоты функции.
3. На координатной плоскости отмечаются нули функции.
Проходя через нули функции график приближается к асимптотам.
4. Для уточнения графика удобнее отметить одну особую точку. данном случае это значение *x* при π/4 : tg $\frac{\pi}{4}$ = 1.
5. Проводится анализ функции при возрастании и убывании значений. Известно, что на единичной окружности в I четверти значения *y* возрастают от 0 и наконец становятся равны 1. При этом значения *x* уменьшаются от 1 до 0. Это говорит о том, что отношение $\frac{y}{x}$ увеличивается, а значит значения tg*x* также возрастают до бесконечности. Принимая во внимание это свойство, можно построить график функции *y* = tg*x*.

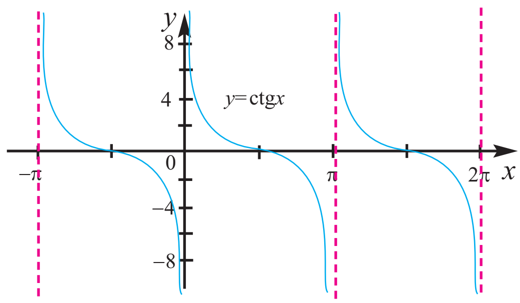


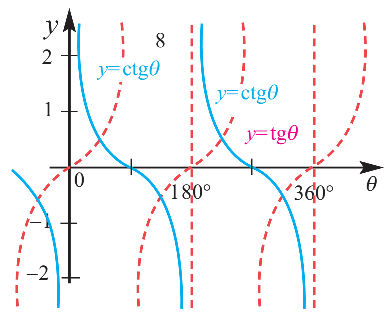


По аналогичному правилу можно построить график функции $y = \mathrm{ctg}x$.

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ctg x	не определена	1	0	-1	не определена	1	0	-1	не определена	1	0	-1	не определена

Однако, учащиеся должны понимать, что значения функции котангенса являются обратными для значений тангенса ($\mathrm{ctg}x = 1/\mathrm{tg}x$), и, уметь изображать график, при помощи симметричных преобразований.

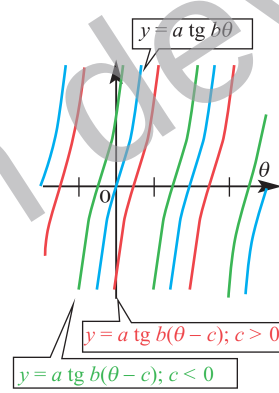


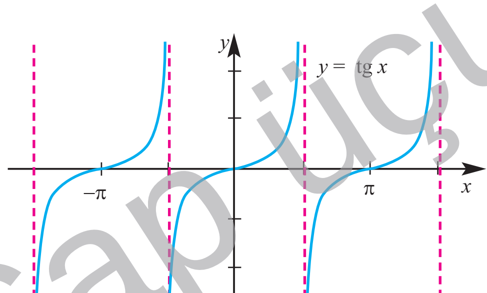


Целесообразно, чтобы учащиеся создали презентацию, отображающую таблицу значений функции, график и свойства функций, представленных в учебнике. Это окажет положительное влияние на общие навыки систематизации функций.

2-ой час. Выполняются задания из учебника.
3-ий час. Рассматриваются преобразования графика функции $y = tgx$ и аналогичным образом $y = ctgx$. Строятся графики функций, отображающие различные преобразования.

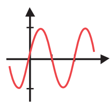
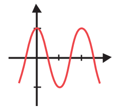
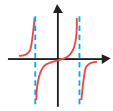
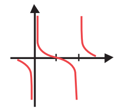
Преобразование графика тангенса





Учащися рекомендуется создать презентацию о функциях как показано ниже. Эта презентация должна содержать как можно больше информации о функциях (чётность-нечётность, преобразования и т.д.).

Графики тригономтрических функций

Функция	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{ctg} x$
Графики				
Область определения	$(-\infty;\,+\infty)$	$(-\infty;\,+\infty)$	$x\neq\frac{(2n+1)\pi}{2}$	$x\neq n\pi$
Мн.значений	$[-1;\,1]$	$[-1;\,1]$	$(-\infty;\,+\infty)$	$(-\infty;\,+\infty)$
Амплитуда	1	1	нет	нет
Период	2π	2π	π	π
Перес. с x	$(n\pi;\,0)$	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2};\,0\right)$	$(n\pi;\,0)$	$\left(\frac{(2n+1)\pi}{2};\,0\right)$
Асимптота	нет	нет	$x=\frac{(2n+1)\pi}{2}$	$x=n\pi$

Также рекомендуется создать таблицу, которая отражает преобразования. Эти задания имеют большое значение для развития навыков систематизации и представления информации.

Преобразование графиков тригонометрических функций

$y=$	$a\sin b(x-c)+d$ $a\cos b(x-c)+d$	$a\operatorname{tg} b(x-c)+d$ $a\operatorname{ctg} b(x-c)+d$
Сдвиг по фазе	$(x-c)$ вправо $(x+c)$ влево	$(x-c)$ вправо $(x+c)$ влево
Смещение по вертикали	на $\lvert d\rvert$ единиц вверх на $\lvert d\rvert$ единиц вниз	на $\lvert d\rvert$ единиц вверх на $\lvert d\rvert$ единиц вниз
Отображение	при $a<0$ относительно оси x при $b<0$, относительно оси y	при $a<0$ относительно оси x при $b<0$, относительно оси y
Сжатие и растяжение по вертикали	Амплитуда $=\lvert a\rvert$	сжатие или растяжение ветвей функции тангенса
Сжатие и растяжение по горизонтали	Период $=\frac{2\pi}{\lvert b\rvert}$	Период $=\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$

Урок 79-81. Учебник стр. 150-157. Обратные тригонометрические функции. Обобщающие задания. 3 часа

2.2.2. Знает понятие функции, исследует периодичность, чётность, монотонность функций, умеет преобразовывать графики.
2.2.4. Знает основные тригонометрические функции и обраные тригонометрические функции, строит их графики.

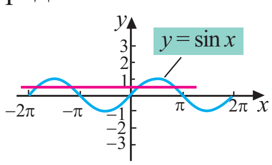
Навыки формирующиеся у учащихся

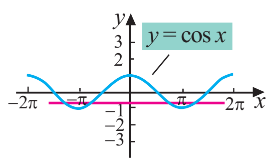
Дополнительные ресурсы

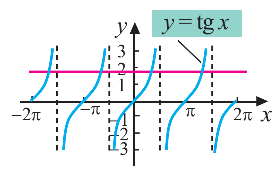
- *понимает, что функции y = arcsin x, y = arccos x, y = arctg хявляются обратными для функций y = sinx, y = cosx, y = tgx и строит их графики;*
- *строит графики как графики обратных функций..*

Строит график обратной функции сответствующий графику основной функции.

Исследование построения графиков обратных тригонометрических функци проводится при помощи отображения их относительно оси $y = x$. Является ли функция обратимой определяется при помощи горизонтальной прямой. определяется .

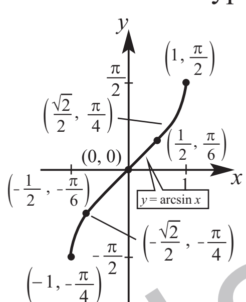


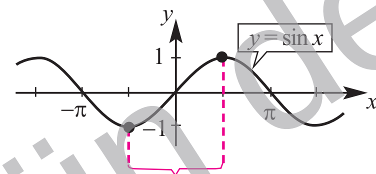




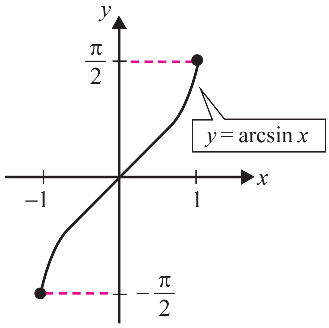
Однако, функция является обратимой только на определённом промежутке возрастания(убывания) графика.

На первом уроке даётся понятие и исследуются обратные тригонометрические функции. На 2-ом и 3-м уроках выполнятся различные задания.

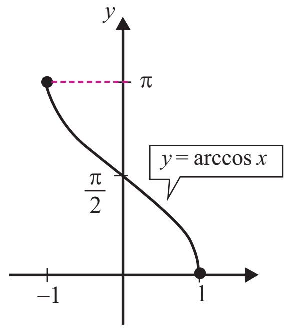




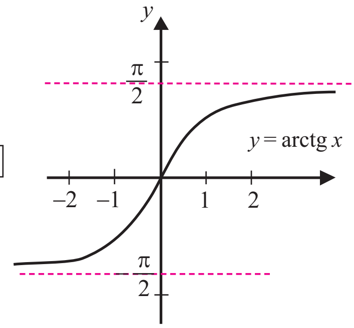
Функция	Область определения	Множество значений
$y = \arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \mathrm{arctg}\, x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \mathrm{arcctg}\, x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$



Об. определения: [–1;1]
Мн. значений: $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



Об. определения [–1;1]
Мн. значений: [0;π]



Об. определения: (–∞;+∞)
Мн. значений: $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

У.15. Найдите значений выражения. а) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

Функция $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ и функция $y = \arcsin x$, $-1 \le x \le 1$ являются взаимно обратными функциями. Поэтому, при $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $\arcsin(\sin x) = x$

Однако в данном задании $\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ поэтому при решении надо учесть это следующим образом.

1) $\sin\frac{7\pi}{6} = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6}$

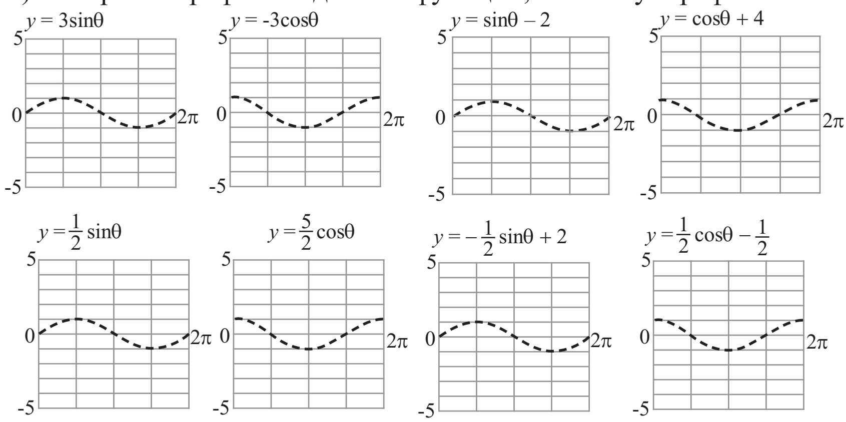
2) $\arcsin(\sin\frac{7\pi}{6}) = \arcsin(-\sin\frac{\pi}{6}) = -\arcsin(\sin\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6}$

Тригонометрические функции
Таблица критериев суммативного оценивания

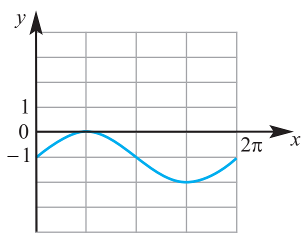
N	Критерии	Примечание
1	Представляет тригонометрические функции на примерах.	
2	Строит графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.	
3	Строит графики функций $y = \text{tg}\, x$ и $y = \text{ctg}\, x$.	
4	Представляет преобразование графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.	
5	Представляет преобразование графиков функций $y = a\sin b(x-c)$ и $y = a\cos b(x-c)$.	
6	Моделирует реальные ситуации с помощью функций $y = a\sin b(x-c)$ и $y = a\cos b(x-c)$ и представляет графические преобразования данных функций.	
7	Представляет понятие обратных тригонометрических функций на примерах и строит их графики.	

Урок 82. Тригонометрические функции. Задания для суммативного оценивания

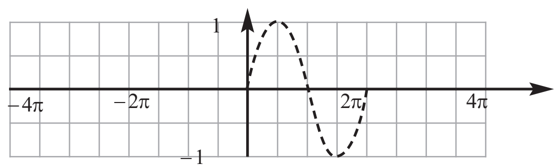
1) Постройте графики заданных функций, используя график основной функции.



2) Зпишите формулу функции синуса по графику.



3) Постройте график заданной функции на заданном интервале, используя основную функцию.



$y = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ $-4\pi \le \theta \le 4\pi$

4) Запишите амплитуду и период функции $y = 5\sin 3x$.

5) Найдите период функции $y = 4\mathrm{tg}\frac{3}{2}x$.

6) Запишите преобразования функции $y = \cos x$ в функцию $y = 5\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

7) Запишите значения каждой функции.

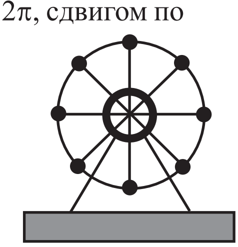
а) $\sin(-510°)$ б) $\sin 495°$ в) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

8) Постройте график функции $y = \sin 2x$ по 5-ти основным точкам.

9) Запишите функцию синуса с амплитудой 5 и периодом $\frac{2\pi}{3}$.

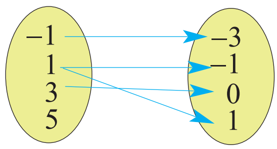
10) Запишите функцию косинуса с амплитудой 5, периодом 2π, сдвигом по фазе $\frac{\pi}{4}$.

11) Карусель радиусом 15 м совершает полныйоборот за 100 секунд. Пассажиры садятся на карусель с платформы на высоте 1 м. Выразите зависимость высоты от времени при помощи функции косинуса.



Урок 83. Задания для полугодового оценивания

1) Какая зависимость не является функцией?

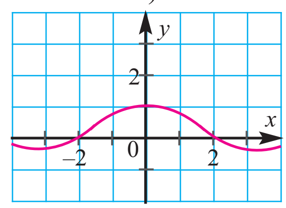
а) 

б) {(0; 4), (3; 5), (5; –2), (0; 1)}

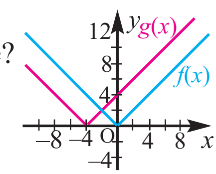
в)

x	7	6	5	4	3
y	–1	2	–1	2	3

г)



2) Преобразование какой функции изображено на рисунке?



3) 3) Изобразите точки A, B, C и D, так чтобы точки A, B и C не лежали на одной прямой, а точка D лежала на одной прямой с точками A и C. Запишите точки, через которые можно провести одну и только одну плоскость.

4) При помощи формул приведения, выразите выражения через тригонометрические функции острого угла и найдите их значения.

a) $\cos 300^{\circ}$ c) $\sin \dfrac{7\pi}{6}$ g) $\operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{3}$

5) Найдите значения тригонометрических отношений для углов, конечная сторона которых проходит через точки.

a) (–1, 1) b) (–1, 0) c) (1, –1)

6) Найдите длину дуги и площадь сектора для заданного центрального угла.

$r = 10$ sm; $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

7) Найдите область определения и множество значений функции:

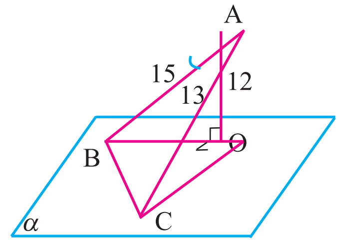
$y = \sqrt{4 - x^2}$

8) Дано: $AO \perp \alpha$

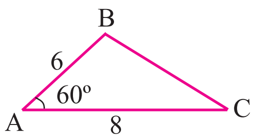
$AB = 15$

$AC = 13$ $\angle BOC = 90^\circ$

$AO = 12$ $\angle BAC = ?$

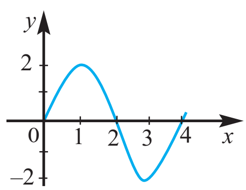


9) Решите треугольник.



10) Найдите амплитуду и основной период функции $y = 3\sin 2x$ и постройте график функции на отрезке $[0; 2\pi]$.

11) Задайте формулой график на рисунке.



12) Найдите значение выражения:

$$\frac{\sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}}$$

13) Вычислите:

$$\sin\left(4\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

14) Карусель, диаметром 10 м за 5 минут совершает 2 оборота. С какой линейной скоростью совершает движение кабинка карусели?

6. Многогранники

Таблица планирования

Содержательный стандарт	**Урок №**	**Тема**	**Кол-во часов**	**Учеб-ник стр.**
3.1.5. Распознаёт виды многогранников. 3.2.3. Решает задачи , в которых находят площадь боковой и полной поверхностей, а также объём призмы. 3.2.4. Решает задачи , в которых находят площадь боковой и полной поверхностей, а также объём пирамиды и усечённой пирамиды. 3.2.5. Строит некоторые сечения многогранников. 4.1.1. Применяет свойства пространственных фигур при измерениях. 4.1.2. Посредством измерений и вычислений находит площадь и, сравнивая полученные результаты, определяет погрешность вычислений.	84-86	Многогранники. Пирзмы. Многогранники и их виды с различных сторон	3	158-165
	87, 88	Площадь поверхности призмы	2	166-170
	89, 90	Сечение призмы плоскостью.	2	171-173
	91-93	Пирамида. Площадь боковой и полной поверхностей пирамиды.	3	174-179
	94, 96	Сечение пирамиды. Усечённая пирамида. Обобщающие задания	3	180-183
	97	Многогранники. Задания для суммативного оценивания	1	
	Всего		14	

Урок 84-86. Учебник стр. 158-166. Многогранники. Призмы. Многогранники и их виды с различных сторон. 3 часа

Содержательный стандарт

3.1.5. Распознаёт виды многогранников.

Математический словарь: многоугольники, многогранники,ребро, вершина, грань, прямая призма, высота призмы, диагонали призмы

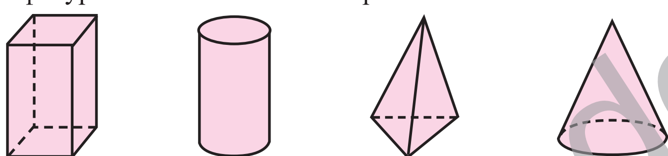
Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

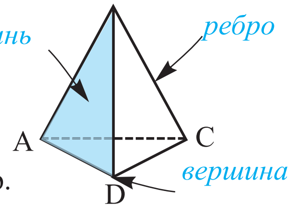
Рабочие листы

- *изображает геометрически многогранники, определяет рёбра, вершины, грани*
- *различает многогранники по количеству рёбер, вершин, граней*
- *изображает различные призмы, показывает геометрические элементы и их количество*
- *изображает развёртки призм*
- *на изометрической бумаге изображает многогранники(конструкция из кубов)*
- *изображает многогранники с различных сторон*

Отмечается, что гранями пространственных фигур являются многоугольники. Пространственными фигурами называется фигуры, занимающие часть пространства. То есть, в отличии от плоских фигур, не все точки пространственной фигуры расположены на одной плоскости. При помощи различных фигур и окружающих вещей проводится исследование являются ли они многогранниками. Например, можно ли назвать карандаш многогранником? Нет, так как у него есть круглая плоскость, которая не является многогранником. Значит, многогранником называется фигура все грани которой многогранники. Учащимся задаётся вопрос:"Какие из следующих фигур можно назвать многогранниками?"



Обсуждаются элементы многогранников. Многогранник различаются количеством вершин, рёбер, граней и формой. Учащиеся знакомы с различными видами призм и пирамид ещё с начальной школы, а также они знают понятия ребро, вершина и грань. Учащимся даётся 2-3 минуты, чтобы они записали геометрический смысл данных понятий и изобразили их. Ученики понимают, что грань является плоской фигурой, вместе с внутренней областью. Например,на рисунке треугольники ABD, BDC, ABC и ADC являются гранями.



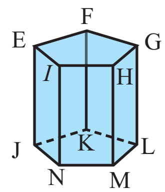
Ребро - линия пересечения двух граней.

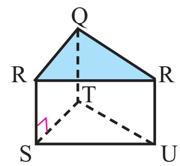
BA, BD, BC являются боковыми рёбрами,

AC, AD, DC являются рёбрами основания.

Вершина - точка пересечения трех или более рёбер.

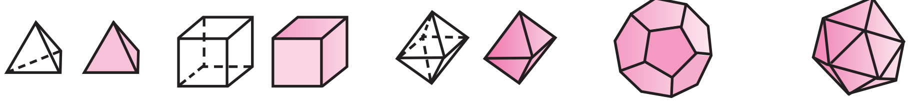
Для проверки учащимся предлагается записать грани, рёбра и вершины следующих фигур.





Обсуждаются выпуклые и невыпуклые многогранники, все грани которых являются правильными многоугольниками - Платоновы тела.

тетраэдр **куб** **октаэдер** **додэкаэдер** **икосаэдер**



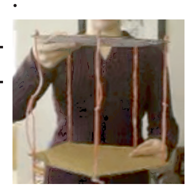
Известны 5 видов Платоновых тел с треугольными, с четырёхугольными и с пятиугольными гранями. Сумма плоских углов, в любой вершине должна быть меньше 360°. Это означает, что из одной вершины могут выходить 3,4,5 треугольника, 3 квадрата, 3 пятиугольника. Эти фигуры были основательно изучены греческим учёным и философом Платоном(427–347гг до н.э.) и названы в его честь. Платон назвал эти фигуры символами: тетраэдер- огня, куб- земли, октаэдер - воздуха, икосаэдер - воды. Додекаэдер является представителем вселенной. Платоновы тела получаются заполнением (паркетированием) поверхности тел правильными многоугольниками (без пустот). Здесь речь идёт только об использовании для этого только одной фигуры. Учащимся рекомендуется создать модели фигур, развёртки которых представлены на рабочих листах. При этом надо увеличить размеры развёрток, для создания больших моделей. Изобразив на развёртках различные рисунки, можно создать интересные композиции и провести конкурс между учащимися 10-х классов. Это оказывает положительное влияние на развитие творческих способностей и позволяет глубоко осознать полученные знания.

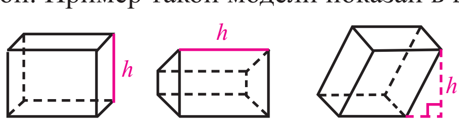
Общее определение призмы обсуждается всем классом. Что с геометрической точки зрения является призмой? Призма – это пространственная фигура, которая состоит из двух параллельных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, которые совпадают друг с другом при параллельном переносе и всех отрезков прямых, соединяющих множество соответствующих многоугольникам точек.

1. Элементы призмы представляются на призмах различного вида. Исследуется вопрос: “Чем прямая призма отличается от наклонной призмы?”.

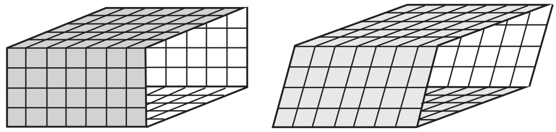
! Возможно учащиеся говоря о прямой призме будут ошибочно думать, что в основнии лежит фигура с прямым углом. В основании прямой призмы может лежать любой треугольник, ромб, трапеция и т.д., а называется призма прямой призмой, потому, что двугранные углы при основании равны 90°.

Для моделирования прямой и наклонной призмы можно использовать верёвку и картон. Пример такой модели показан в видеоролике в Youtube.



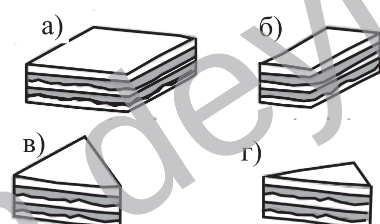


Основанием призмы может быть любая фигура, однако боковой гранью всегда является параллелограмм. Прямоугольный параллелепипед один из наиболее часто встречающихся видов призм. Все грани прямоугольного параллепипеда прямоугольники. Учащиеся из тетради в клетку вырезают два прямоугольника размером 7×5 и два прямоугольника размером 7×4. Одинаковые прямоугольники соединяются друг напротив друга клеевой лентой. Модель кладут на парту и проводят обсуждение. Это модель призмы. У неё пока нет двух граней. Каким многоугольником является грань? Какую форму будут иметь недостающие грани? Будут ли они взаимно параллельными, а боковые грани перпендикулярными основанию? Эта призма прямая. Далее измените положение верхней грани так, чтобы боковая грань перестала быть перпендикулярной плоскости основания. Снова задаются вопросы: “ Параллельны ли противолежащие грани? Перпендикулярна ли боковая грань основанию?”. Это уже не прямая призма. Какую форму будут иметь недостающие грани? Сейчас измените модель так, чтобы основанием призмы стал параллелограмм. Учащиеся должны понять, что параллелограммы, в основании параллелепипеда, конгруэнтны.



Очень важно развивать навыки изображения геометрических фигур на изометрической бумаге. Она является наиболее удобным средством для создания 3D изображений. В век развития технологий эти занятия помогут развить у учащихся терпение и акуратность, помогут упростить процесс создания различных изображений фигур. В учебнике представлена последовательность шагов, для построения параллелепипеда, в методическом пособии - шестиугольной призмы. Создание изображения треугольной, пятиугольной и т.д. призм, можно задать в качестве домашнего задания. Учащиеся с лёгкостьбю могут создать изометрическую бумагу в тетради.

Создание модели и изображений призм может быть рекомендовано в качестве самостоятельной работы. Моделью призмы являются куски торта, разрезанные различным образом. Учащиеся должны найти ответ на вопрос как изменяется количество вершин, рёбер и граней в зависимости от формы основания. Фигура основания изображается на доске. Учащиеся по очереди называют количество вершин, рёбер и граней.



Последовательность построения призмы:

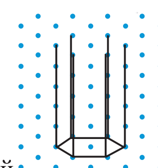
1. Постройте шестиугольник.

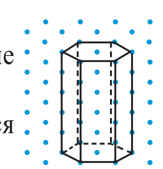
2. Из каждой вершины шестиугольника проведите отрезки определённой длины, например длиной 5 единиц.

3. Последовательно соедините концы отрезков и закончите построение призмы.

4. В зависимости от угла обзора, рёбра которые видны,изображаются сплошной линией, а невидимые рёбра- пунктирной линией.

5. Изобразите различные призмы на изометрической бумаге.

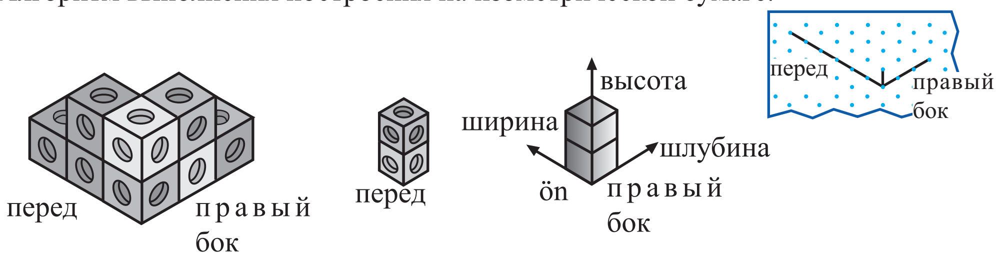




Для лучшего понимания того, как найти площадь боковой и полной поверхностей надо серьёзно отнестись к умению изображать развёртки призм.

3-ий час. И сама конструкция и её вид с различных сторон изображается на изометрической бумаге. Изометрические точки дают возможность легко сделать это. легко.

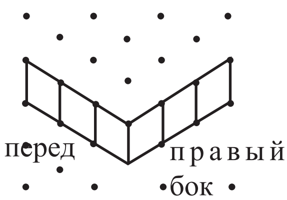
Алгоритм выполнения построения на изометрической бумаге.



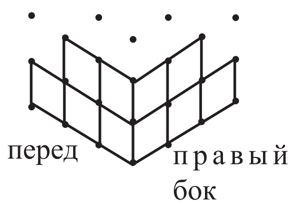
В конструкции отмечается самый лизкий угол (*).

Слои конструкции изображаются точками, которые образуют треугольники.

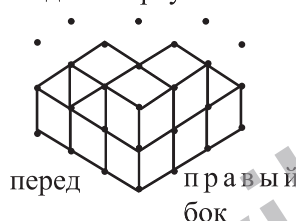
1-ый слой. Изображается 3 клетки вида спереди, 3 вида справа.



2-ой слой. Изображаются 2 клетки вида спереди и 2 клетки вида справа.



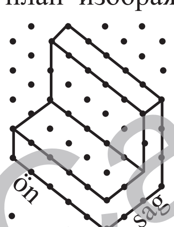
Заканчивается изображение рисунка в соответствии с видом сверху.



Данные задания очень полезны для формирования навыков изображения плана, геометрических образов и художественных представлений. Выполняются задания, где надо вычислить реальные размеры и размеры на плане. В учебнике заданиями такого типа являются задания 3 и 4 (стр.164).

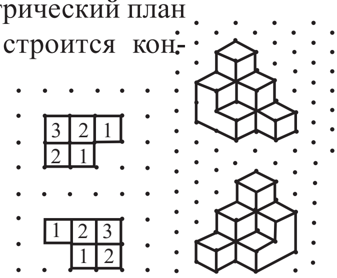
Важную роль также играют задания, где надо выразить конструкцию из кубов числами. Учащиеся выполняли задания подобного рода и раньше, но сейчас конструкция становится более сложной. Учащиеся должны понимать запись 3×3×4 как размеры конструкции. Она записывается как количество кубов в каждом ряду, начиная с заднего слоя к переднему.

Дана конструкция, изометрический план изображается числами.



	4			
	3	3	3	3
3	1	1	1	1
	1	1	1	1

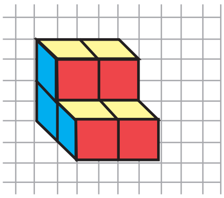
Дан изометрический план в числах, строится конструкция.

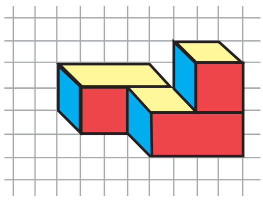


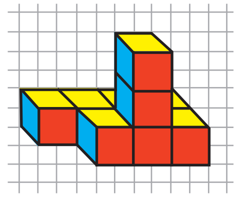
Рабочий лист № 1

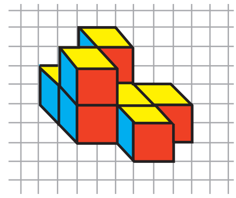
Имя _________ Фамилия __________ Дата ______________

Изобразите кострукции.



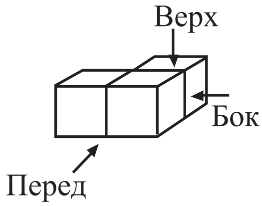


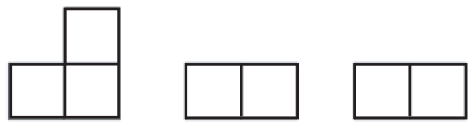


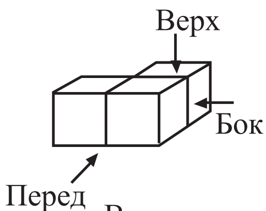


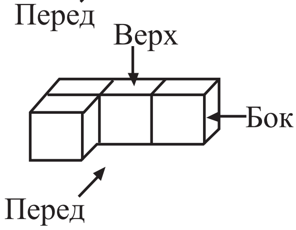
Рабочий лист № 2

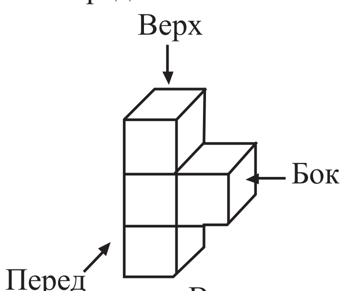
Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

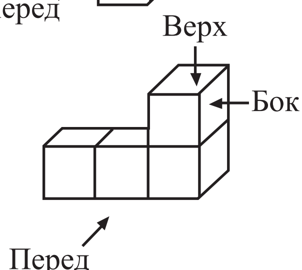


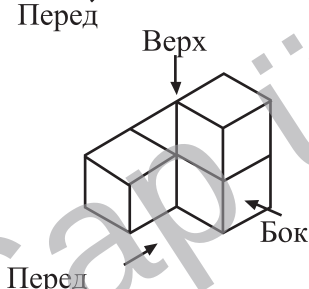








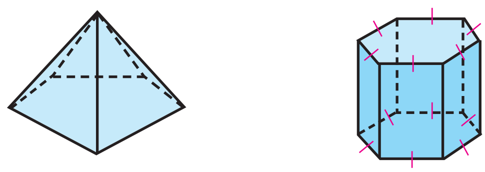




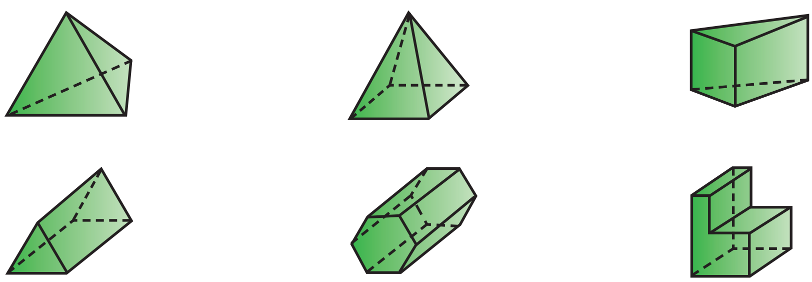
Рабочий лист № 3

Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

1) Какую фигуру можно назватьмногогранником? Для каждого многогранника запишите количество вершин, рёбер и граней.



2) Для каждого многогранника запишите количество вершин, рёбер и граней. Полученые результаты проверьте с помощью формулы Эйлера. Какой многогранник имеет наименьшее количесство рёбер и граней?



3) Изобразите следующие фигуры: треугольная призма и пирамида, в основании которой лежит квадрат.

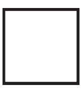
Рабочий лист № 4

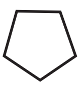
Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

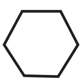
Число, которое выражает и сумму внутренних углов правильногомногоугольника, и в тоже время сумму внутренних углов грани Платоновых тел, имеет одинакокое свойство. В соответствии с представленным примером, проверьте это свойство для остальных фигур.

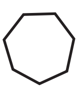

правильный треугольник $3 \cdot 60° = 180°$

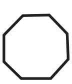
$1 + 8 = ?$

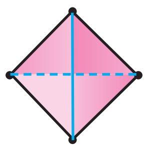

квадрат


пятиугольник

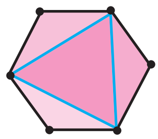

шестиугольник

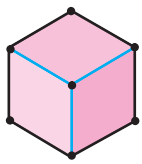

восьмиугольник

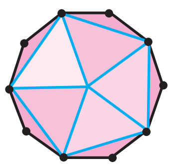

восьмиугольник

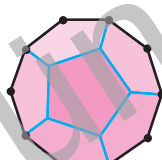

тетраэдер $4 \cdot 180° = 720°$

$7 + 2 = ?$


октаэдер


куб


икосаэдр


додекаэдр

Урок 87,88. Учебник стр. 166-170 Площадь поверхности призмы. 2 час

Содержательный стандарт

3.2.3. Решает задачи , в которых находят площадь боковой и полной поверхностей, а также объём призмы.

Математический словарь: площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности.

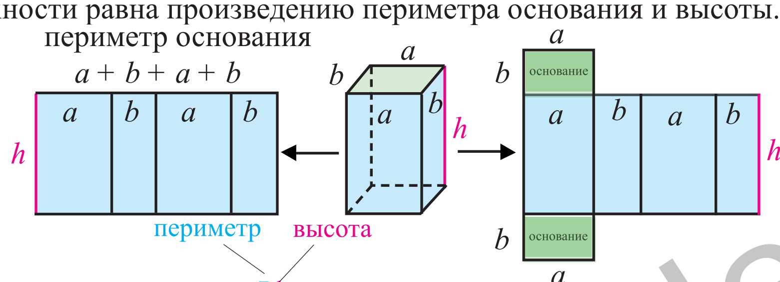
Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *для реальной ситуации и по рисунку моделирует площадь боковой и полной поверхностей призмы;*
- *решает задачи на вычисление площади боковой и полной поверхности призмы*

Понятие боковой поверхности исследуется на реальных объектах. Например, если представить себе, что комната является прямоугольным параллелепипедом, то из каких частей состоит боковая поверхнсть? Учащиеся понимают, что поверхность стен является боковой поверхностью и вместе с поверхностью пола и потолка образует полную поверхность. При помощи развёртки прямоугольного паралелепипеда, можно показать,что площадь боковой поверхности равна произведению периметра основания и высоты.



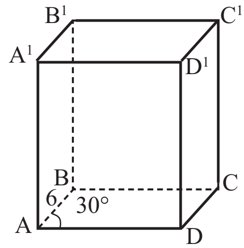
Боковая поверхность = Ph

Полная поверхность = Боковая поверхность + 2 Поверхности основания

$S_{п.п.} = 2S_{осн.} + S_{бок} = 2S_{осн.} + Ph$

Выполняются задания из учебника на нахождение боковой и полной поверхностей. Площадь боковой и полной поверхностей призмы вычисляется не по формуле. Изображается развёртка призмы и заданные размеры отмечаются на чертеже и отдельно находятся площади каждой поверхности. После чего находят площадь боковой и полной поверхностей. Задания такого типа оказывают положительное влияние на формирование у учащихся навыков связывания знаний и нахождения альтенативных путей решения. Также исследуется как влияет на площадь боковой поверхности удаление одной из граней. Это также помогает правильно усвоить сущность понятия боковая поверхность.

? Решение некоторых заданий из учебника



У.5. Стороны прямого параллелепипеда равны 6 см и 8 см, а угол между ними составляет 30°. Найдите пдлщадь полной поверхности, если боковое ребро равно 5 см.

Решение: Основание параллелепипеда параллелограмм.

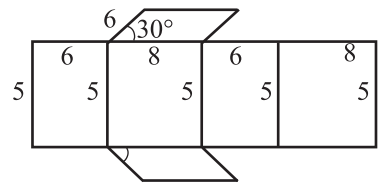
$P_{осн.} = 2 \cdot (8 + 6) = 28$ см $\qquad S_{осн.} = 8 \cdot 6 \cdot \sin 30° = 24$ (см^2)

Площадь боковой поверхности получим умножив периметр основания на боковое ребро:

$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot l = 28 \cdot 5 = 140$(см^2)

Тогда

$S_{п.п.} = S_{бок.} + 2 \cdot S_{осн.} = 140 + 2 \cdot 24 = 188$(см^2)

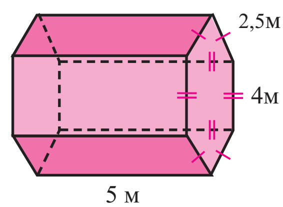


У.11. Для прямой призмы, по заданным измерениям найдите:

а) площадь основания

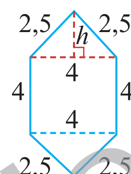
б) площадь боковой поверхности

в) площадь полной поверхности



Решение:

а) При помощи вспомогательных линий разделите шестиугольник на квадрат и равнобедренный треугольник, как показано на рисунке. Если сторона квадрата равна 4 м, то площадь квадрата $S_{кв.} = 4^2 = 16$ м^2.



В равнобедренном треугольнике проведём высоту h .

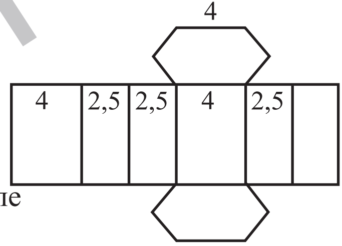
Понятно, что $\quad h = \sqrt{2{,}5^2 - 2^2} = 1{,}5$м.

Тогда площадь треугольника $\quad S_\Delta = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 3$м^2.

Значит: $\quad S_{осн.} = S_{кв.} + 2 \cdot S_\Delta = 16 + 2 \cdot 3 = 22$ м^2

б) Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на длину бокового ребра(высоту).

$S_{бок.} = P \cdot l = (2 \cdot 4 + 4 \cdot 2{,}5) \cdot 5 = 90$ м^2



в) Найдём площадь полной поверхности по формуле

$S_{п.п} = S_{бок.} + 2S_{осн.}$.

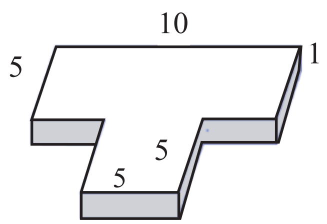
$S_{п.п.} = 90 + 2 \cdot 22 = 134$ м^2

Рабочий лист № 5

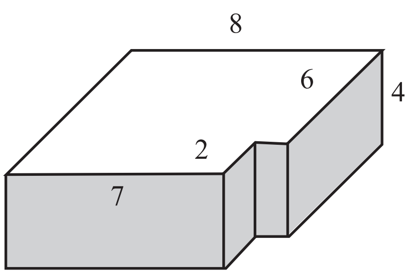
Имя ________ Фамилия _________ Дата ______________

а) Найдите площадь боковой и полной поверхностей фигуры полученной из прямоуголного параллелопипеда.
б) Найдите площадь “целой” призмы заполнив отсечённые части.
c) Найдите разницу боковых и полных поверхностей “отсечённой” и “целой” призм.

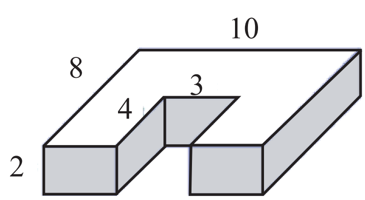
1)



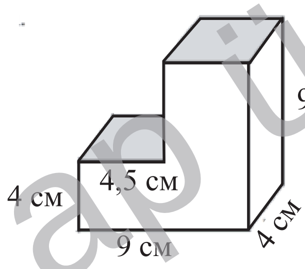
2)



3)



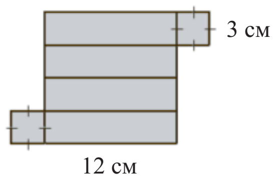
4)

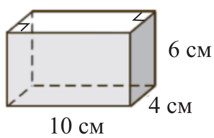


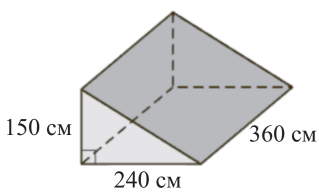
Рабочи лист № 6

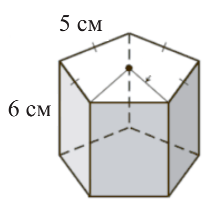
Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

1) Найдите площадь боковой и полной поверхности призмы.

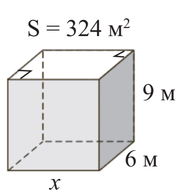


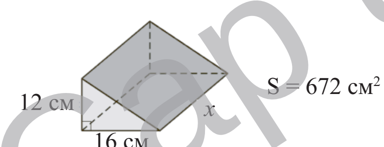






2) На рисунке найдите неизвестные.





Показательный урок по разделу

Урок 89,90. Учебник стр. 171-173.   Сечение призмы плоскостью. 2 час

Содержательный стандарт

3.2.5. Строит некоторые сечения многогранников.

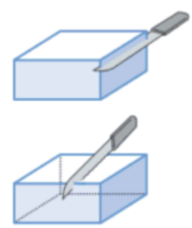
Математический словарь: сечение плоскостью

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

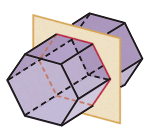
- *определяет различные сечения призмы плоскостью;*
- *изображает геометрически сечение призмы плоскостью.*

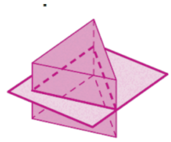


Учащиеся должны рассмотреть сечение призмы плоскостью как ломтики сыра или торта. На сколько трудно геометрически представить сечениеплоскостью, на столько же легко смоделировать это в реальной ситуации. Например, при нарезке овощей получаются различные ломтики. В этом случае нож(нож напоминает модель плоскости) выполняет роль секущей плоскостью. Очень удобно проводить занятия на моделях фигур из пластилина.

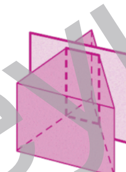
Мотивация. На стол кладут призму из пластилина или пластика, который можно легко разрезать. Можно начать с куба или параллелепипеда. После чего учащимся предлагается так разрезать например куб, чтобы полученная фигура была прямоугольной, или чтобы в месте разреза получился треугольник, или кто сможет показать сечение плоскостью, которое будет перпендикулярно(параллельно) основанию?

Сечение параллельно плоскости основания.

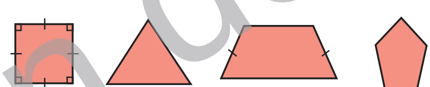




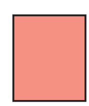
Сечение перпендикулярно плоскости основанию.



Обучение. Проводится исследование. Зависит ли форма сечения от количества рёбер, граней параллелепипеда(куба)?

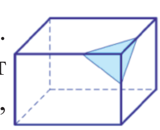


Сначала исследуем четырёхугольное сечение. Сечение параллельное основанию четырёхугольник.

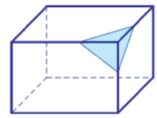


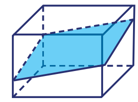
После этого рассмотрим сечения под углом.

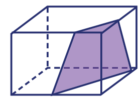
Треугольное сечение. Демонстрируется следующее изображение. Сколько рёбер пересекает сечение? Точки пересечения образуют треугольник. Какие измерения нужно выполнить, чтобы убедится, что треугольник равнобедренный(равносторонний)? Как бы это сделали вы? Объявите, что данная работа будет проведена в группах и учащимся даётся достаточно времени, чтобы обдумать это.

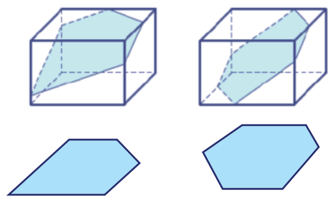


Потом рассмотрим как можно получить **четырёхугольное сечение**. Полученная фигура может быть параллелограммом. Можно также получть сечение в виде трапеции. Учащиеся должны обратить внимание на то, что если сечение треугольное, то плоскость проходит через 3 грани, если четырёхугольное, то через 4 грани. А можно ли получить в сечении пятиугольник, шестиугольник? Можно, если сечение пересекает 5 граней, то оно будет пятиугольником, если 6 граней - шестиугольником. Можно ли получить в сечении 7-ми угольникили 8-ми угольник? Нет, так как у данной призмы всего 6 граней.

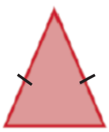




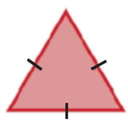




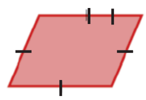
Работа в группах. Каждой группе для исследования представляется одна из фигур. Группа должна создать такое изображение, чтобы в сечении получалась заданная фигура.



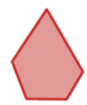
1. Равнобедренный треугольник



2. Равносторонний треугольник

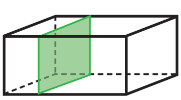


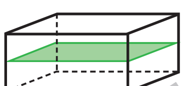
3. Параллелограмм

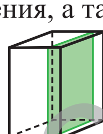


4. Пятиугольник

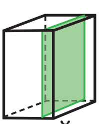
Члены группы проводят обсуждение по поводу того, какие измерения необходимо выполнить для того, чтобы получить в сечении равнобедренный (равносторонний) треугольник. При этом должно сформироваться мнение: «Нам надо обеспечить охват сечения, при делении двух рёбер на равные части», - которое учащиеся должны уметь затем высказать и представить. При этом уделяется внимание исследованию диагонального сечения параллелепипеда (куба).
Исследуются случаи сечения параллельного или перпендикулярного плоскости основания, диагональные сечения, а также сечения под определённым углом.

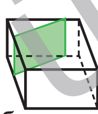






Сечение параллелепипеда, параллельное какой-либо грани равно этой грани.



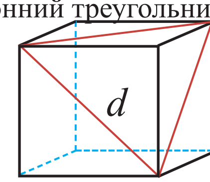


Одна сторона сечения перпендикулярного плоскости основания равна длине высоты.

Все эти действия могут быть выполнены и для шестиугольной и треугольной призмы. Так как сечения являются плоскими фигурами, то выполняются задания на нахождение их периметров и площадей. Задания на построение сечений и определение размеров плоскости сечения представлены на рабочих листах.

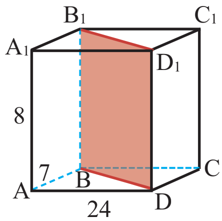
Решение некоторых заданий изучебника

У.3. 2) сечение куба плоскость проходит через три концы 3 рёбер куба, выходящих из одной вершины. При этом получается равносторонний треугольник, стороны которого равны диагоналям куба.



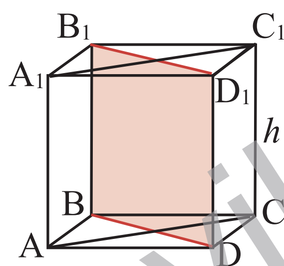
а) если ребро куба равно 1 см, то, $d = \sqrt{2}$ см.
б) если ребро куба равно $a = 3\sqrt{2}$ см, то , $d = a\sqrt{2} = 6$ см
и периметр сечения равен $P = 3 \cdot 6 = 18$ см.

D.5. Стороны основания прямоугольного переллелепипеда равны 7 см и 24 см, а высота равна 8 см. Найдите площадь диагонального сечения.



Решение:
Диагональным сечением является прямоугольник BB_1D_1D.
$S_{\text{диаг. сеч.}} = BD \cdot BB_1$
Диагональ основания BD равна $BD = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ см.
Так как $BB_1 = 8$ см, то $S_{\text{диаг.сеч.}} = 25 \cdot 8 = 200$ см^2

У.7. Основание прямой призмы ромб. Площади диагональных сечений равны 42 см^2 и 56 см^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Решение: пусть высота призмы равна h.
По условию $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot h = 56$ (см^2)
$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot h = 42$ (см^2)

Отсюда $AC = \dfrac{56}{h}$, $BD = \dfrac{42}{h}$

По свойству диагоналей ромба имеем:

$$\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BD}{2}\right)^2 = AD^2 \text{. Тогда,}$$

$$\left(\frac{28}{h}\right)^2 + \left(\frac{21}{h}\right)^2 = AD^2$$

$$AD^2 = \frac{784 + 441}{h^2} = \frac{1225}{h^2}, \quad AD = \frac{35}{h}$$

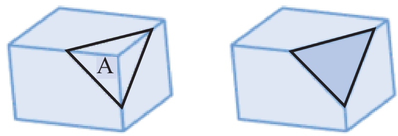
Площадь боковой поверхности призмы:

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 4 \cdot AD \cdot h = 4 \cdot \frac{35}{h} \cdot h = 140 \text{ (см}^2\text{)}$$

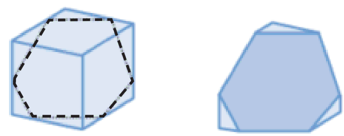
Рабочий лист № 7

Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

Запишите своё мнение, как можно сделать так, чтобы в сечении получился равносторонний треугольник.



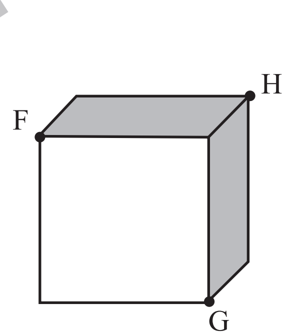
Запишите своё мнение, как можно сделать так, чтобы в сечении получился пятиугольник.



Запишите, изобразите и покажите, какой пространственной фигурой является часть параллелепипеда, полученная сечением плоскостью параллельной основанию? Какие измеренияу полученной фигуры будут такие же как у начальной, а какие нет?

Изобразите, какое сечение прямоугольного параллелепипеда делит его на две конгруэнтные треугольные призмы? Определите измерения треугольной призмы, зная измерения параллелепипеда.

Куб пересекается плоскостью через вершины F, G, H . Какая плоская фигура получится в сечении?

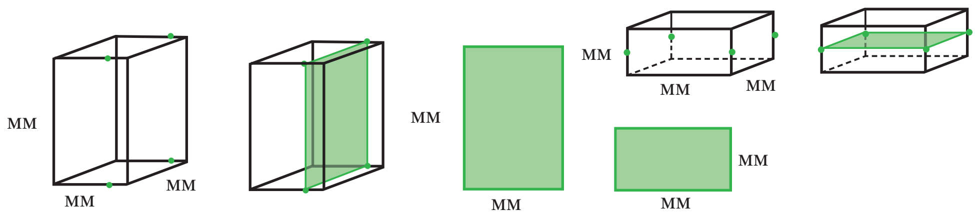


Рабочий лист № 8

Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

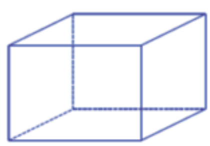
Изобразите в тетради параллелепипеды различных размеров. Постройте на них указанные сечения. Определите измерения сечения и запишите на рисунке.

Сечение перпендикулярное основанию Сечение параллельное основанию

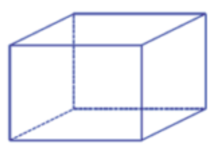


Изобразите следующее сечение прямоугольного параллелепипеда плоскостью.

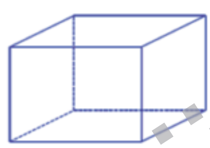
Треугольник



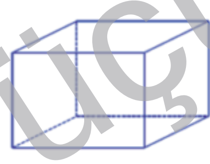
Четырёхугольник



Пятиугольник



Шестиугольник



Урок 91-93. Учебник стр. 174-179. Пирамида. Площади боковой и полной поверхностей. 3 часа

Содержательный стандарт

3.2.4. Решает задачи , в которых находят площадь боковой и полной поверхностей, а также объём пирамиды и усечённой пирамиды.

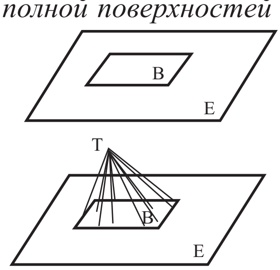
Математический словарь: пирамида, усечённая пирамида, апофема пирамиды

Навыки формирующиеся у учащихся

- *изображает развёртку пирамиды;*
- *решает задачи на вычисление площадей боковой и полной поверхностей пирамиды.*

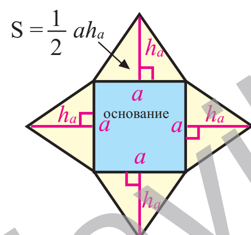
Дополнительные ресурсы

Рабочие листы



Учащиеся должны понимать пирамиду как тело, которое получится, если точку вне плоскости соединить со всеми точками многоугольника лежащего в плоскости. Обсуждается вопрос как построить пирамиду, в основании которой лежит правильный многоугольник, после чего выполняется построение.

Исследуется количество граней и рёбер.Ученики понимают, что пирамида состоит из плоскости основания и точки T вне плоскости(вершины), от которой до плоскости основания проведены отрезки.

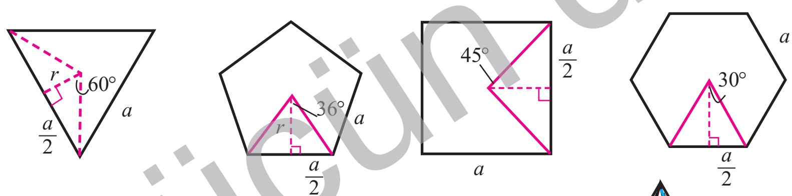


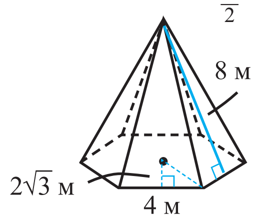
Площадь боковой поверхности можно вычислить самостоятельно, как сумму площадей боковых граней.

Повторяются формулы для вычисления площадей правильных многоугольников.

Решение проводится с обсуждением каждого соответствующего случая. Ещё раз отмечается, что площадь правильного многоугольника равна полупроизведению апофемы и периметра.

$$S = \frac{1}{2} P \cdot r$$



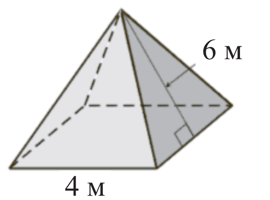


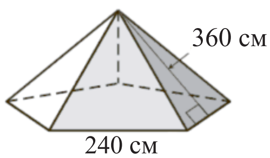
Рекомендуется находитьплощадь боковой и полной поверхности с точки зрения суммы площадей граней. Например, площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна сумме площадей 6 одинаковых треугольников.

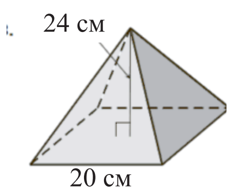
Рабочий лист № 9

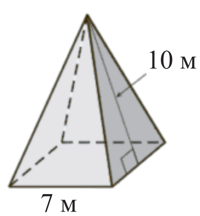
Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

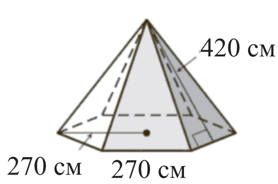
Вычислите площадь боковой и полной поверхности пирамиды.

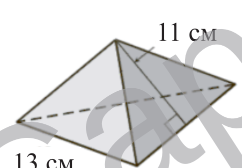




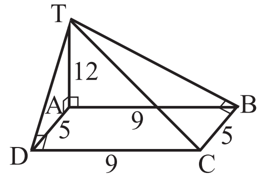








У.10. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 9 см и 5 см. Одно из боковых рёбер перпендикулярно плоскости основания и равно 12 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



Решение: по условию ABCD прямоугольник. Пусть AT боковое ребро, перпендикулярное плоскости основания. По теореме о трёх перпендикулярах получим $TD \perp DC$, $TB \perp BC$. Значит, все треугольники из которых состоит боковая поверхность являются прямоугольными треугольниками.

Из ΔTAB и ΔTAD по теореме Пифагора:

$TD = \sqrt{TA^2 + AD^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ см

$TB = \sqrt{TA^2 + AB^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$ см

Тогда $S_{TAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot TA = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ см^2

$S_{TAD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot TA = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ см^2

$S_{TDC} = \frac{1}{2} \cdot TD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 9 = 58{,}5$ см^2

$S_{TBC} = \frac{1}{2} \cdot TB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5 = 37{,}5$ см^2

Площадь боковой поверхности равна сумме площадей треугольников, из которых состоит боковая поверхность.

$S_{бок.} = 54 + 30 + 58{,}5 + 37{,}5 = 180$ см^2

Урок 94,95. Учебник стр. 180-183. Сечение пирамиды. Усечённая пирамида. Обобщающие задания. 2 часа

Содержательный стандарт

3.2.4. Решает задачи , в которых находят площадь боковой и полной поверхностей, а также объём пирамиды и усечённой пирамиды.

3.2.5. Строит некоторые сечения многогранников.

Математический словарь: усечённая пирамида

Навыки формирующиеся у учащихся

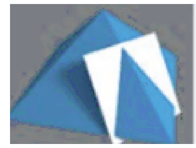
- *геометрически представляет сечение пирамиды плоскостью;*
- *строит усечённую пирамиду и вычисляет площадь полной поверхности.*

Дополнительные ресурсы

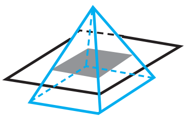
Рабочие листы

Сечениепирамиды плоскостью изучается таким же образом как и сечения призмы. Первоначально учащимся предлагается обсудить ситуацию. Пересечём пирамиду двумя плосостями, параллельными основанию. Площадь какого сечения наибольшая? Как надо провести сечение, чтобы его площадь была равна полусумме площадей данных сечений?

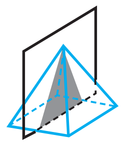
Исследуется сечения правильной четырёхугольной пирамиды. Для получения равностороннего треугольника.



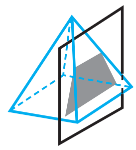
Сечение параллельное основанию квадрат.



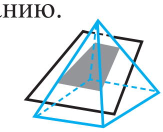
Сечение перпендикулярное основанию и проходящее через вершину.

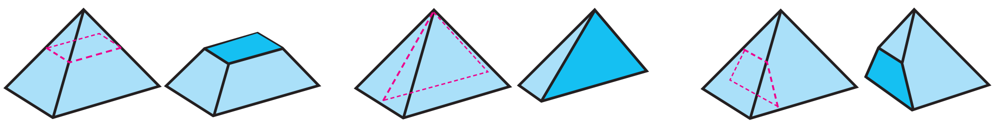


Сечение перпендикулярное основанию, но не проходящеечерез вершину.



Сечение в виде четырёхугольника, не параллельное и на перпендикулярое основанию.





Если сечение пирамиды параллельно основанию, то получается усечённая пирамида. Решются задания, где сечение делит пирамиду в различных отношениях. Например, можно представить, что сечение проходит через середину высоты. Какие измерения при этом будет иметь основание пирамиды, отсекаемой в верхней части?

? Решение некоторых заданий из учебника

У.4(стр 180). а) Найдите площадь диагонального сечения правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона основания равна 14 см, а боковое ребро равно 10 см.

Решение:

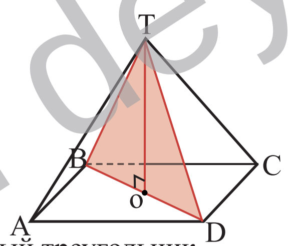
Дано:

ABCD - квадрат.

AB = BC = CD = AD = 14 см.

TA = TB = TC = TD = 10 см.

S_{BTD} = ?



Диагональным сечением является равнобедренный треугольник.

$$S_{BTD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot TO$$

TO - высота пирадиды. Найдём диагональ основания BD

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2}$ см,тогда $BO = OD = 7\sqrt{2}$ см

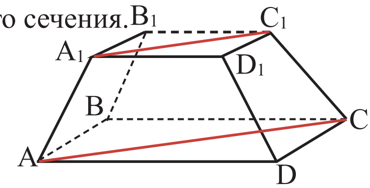
Из ΔTOD $\quad TO = \sqrt{TD^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - (7\sqrt{2})^2} = \sqrt{100 - 98} = \sqrt{2}$ см

$$S_{BTD} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 14 \text{ см}^2$$

Решение некоторых заданий из учебника

У.8.

в) Площади оснований правильной усечённой четырёхугольной пирамиды равны 36 см^2 и 64 см^2. Боковые рёбра пирамиды составляют с плоскостью основания угол 45°. Найдите площадь диагонального сечения.



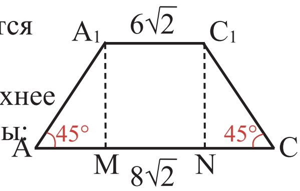
Решение:

По условию

$AD^2 = 64(см^2)$,

$A_1D_1^2 = 36\ (см^2)$

Отсюда получаем, что AD = 8 см, а $A_1D_1 = 6$ см,



основанием основаниями усечённой пирамиды являются квадраты со сторонами 8 см и 6 см. Найдём площадь диагонального сечения $AA_1C_1C_1$. Так как нижнее и верхнее основание являются квадратами, то их диагонали равны:

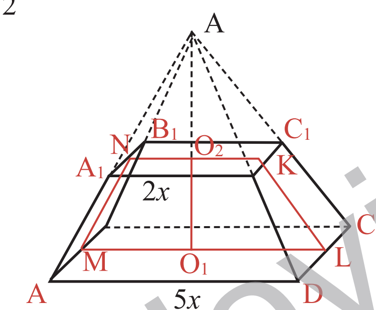
$AC = 8\sqrt{2}$ см

$A_1C_1 = 6\sqrt{2}$ см

Проведём в сечении высоты A_1M и C_1N. Тогда

$AM = \sqrt{2}$. Из ΔAA_1M имеем $A_1M = \sqrt{2}$. Диагональным сечением является трапеция.

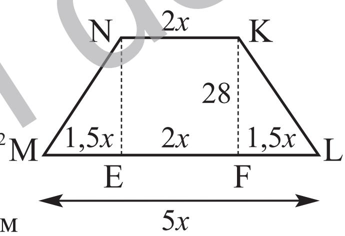
$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AC + A_1C_1}{2} \cdot A_1M = \frac{8\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 14см^2$$



У.13. Высота правильной четырёхугольной усечённой пирамиды равна 28 см, а апофема 35 см. Стророны оснований относятся как 5 : 2 . Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Решение:

Проведём плоскость, проходящую через середину двух сторон, перпендикулярно основанию и рассмотрим трапецию MNKL.



Имеем KL = 35, KF = NE = 28 NK = $2x$, ML = $5x$,

тогда FL = $1,5x$.

Из ΔFKL получим: $28^2 + (1,5x)^2 = 35^2$

$(1,5x)^2 = 35^2 - 28^2 = (35 - 28)(35 + 28) = 7 \cdot 63 = 7^2 \cdot 3^2$

$1,5x = 7 \cdot 3$ $\qquad 1,5x = 21$ $\qquad x = 14$

Сторона нижнего основания равна $5x = 5 \cdot 14 = 70$ см

и т.к. основание является квадратом имеем: $S_{осн.1} = 70^2 = 4900$ см^2 .

Сторона верхнего основания равна $2x = 2 \cdot 14 = 28$ см и т.к. основание является квадратом имеем: $S_{осн.2} = 28^2 = 784$ см^2. Площадь боковой трапеции

$S_{DD_1C_1} = \frac{70 + 28}{2} \cdot 35 = 1715см^2$ $\qquad$ Тогда $S_{бок.} = 4 \cdot 1715 = 6860$ см^2

$S_{п.п.} = 6760 + 490 + 784 = 12544$ см^2

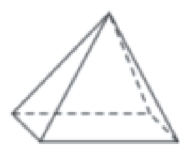
Рабочий лист № 10

Имя ________ Фамилия _________ Дата _____________

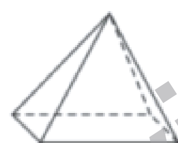
1) Сечение четырёхугольной пирамиды плоскостью является треугольник, а отсечённая часть - треугольной пирамидой. Какое утверждение истино для данной плоскости сечения плоскости?
а) плоскость параллельнаоснованию
б) плоскость перпендикулярна основанию
в) плоскость проходит через два боковых ребра

2) Изобразите сечение правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, согласно условию.

а) Сечение плоскостью параллельно основанию.

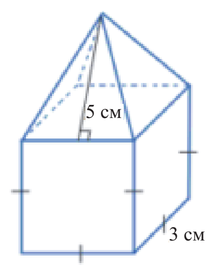


б) Сечение плоскостью, которая перпендикулярна основанию и проходит через вершину пирамиды.



в) Сечение плоскостью, которая перпендикулярна основанию и не проходит через вершину пирамиды.

3) Найдите площадь полной поверхности фигуры,составленной из куба и правильной четырехугольной пирамиды.



Многогранники. Таблица критереев оценивания

N	Критерий	Примечание
1	Представляет умение изображать развёртки многогранников и определять количество вершин, рёбер и граней.	
2	Вычисляет площади боковой и полной поверхностей призмы.	
3	Изображает сечение призмы плоскостью и решает задачи.	
4	Вычисляет площади боковой и полной поверхностей пирамиды.	
5	Изображает сечение пирамиды плоскостью и решает задачи.	

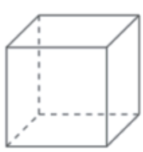
Урок 97. Многогранники. Задания для суммативного оценивания.

1) Какие из двухфигур имеют одинаковое количество граней?

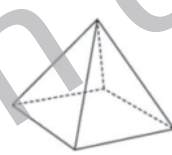
a) Треугольная призма и параллелепипед
b) Треугольная пирамида и четырёхугольная призма
c) Треугольная призма и четырёхугольная пирамида.
d) Треугольная и четырёхугольная пирамиды

2) Изобразите сечение плоскостью.

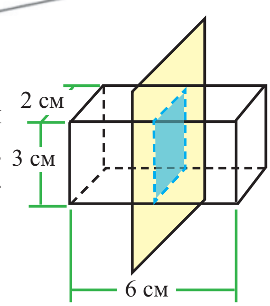
а) параллельно боковым граням



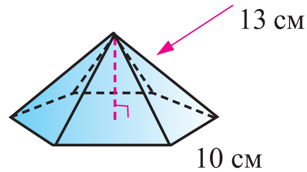
б) перпендикулярно основанию



3) Прямоугольный параллелепипед имеющий размеры 2см×3см×6см разделён на две конгруэнттные призмы., как показано на рисунке. Найдите площадь полной поверхности каждой части.



4) Найдите площадь боковой и полной поверхности правильной пирамиды.



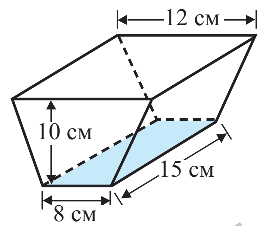
5) Основанием правильной шестиугольной пирамиды является шестиугольник, со стороной 4 см. Найдите площадь боковой и полной поверхности пирамиды.

6) Какое наименьшее число граней может иметь призма?

7) Может ли боковая повехность призмы состоять из треугольников?

8) Боковая поверхность прямой треугольной призмы равна 120 см^{2}. Найдите высоту призмы, если стороны основания равны 4 см, 5 см и 6 см.

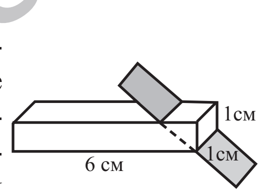
9) Найдите площадь полной поверхности прямой призмы на рисунке.



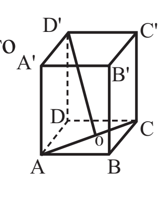
10) Начертите правильную треуглную пирамиду сторона основания которой равна 4 ед.,а апофема 6 ед. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

11) Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см, высота 20 см. На расстоянии 5 см от вершины параллельно основанию проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

12) На рисунке плоскость прямоугольной формы пресересекает прямоугольный параллелепипед и проходит через две его вершины. Плоскость отсекает от параллелепипеда прямую треугольную призму, в основании которой равнобедренний теругольник. Найдите площадь полной поверхности призмы.



12) Основание прямой призмы на рисунке квадрат. Зная, что AO = OC, AB = 4 см, AA′ = 8 см, найдите OD′.



7. Тригонометрические уравнения и неравенства

Таблица планирования

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
2.3.1. Решает тригонометрические уравнения и неравенства.	98-100	Решение простых тригонометрических уравнений.	3	185-192
	101-105	Методы решения тригонометрчских уравнений. Решение прикладных задач при помощи тригонометрички уравнений.	5	193-199
	106-109	Тригонометрические неравества. Обобщающие задания.	4	200-209
	110	Тригонометрические уравнения и неравенства. Обобщающие задания.	1	
	Всего		13	

Урок 98-100. Учебник стр. 186-193. Простейшие тригонометрические уравнения. 3 часа

Содержательный стандарт

2.3.1. Решает тригонометрические уравнения и неравенства.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *по графику, на единичной окружности и аналитически решает уравнения вида sinx = a, cosx = a, tgx = a;*
- *опердeляет решение простейших тригонометричских уравнений на заданном интервале;*
- *выражает решение простейших тригонометрических уравнений в общем виде .*

Некоторые рекомендации по ходу урока

1-ый час. Чтобы учащиеся достаточно хорошо поняли тригонометрические уравнения рекомендуется решать простейшие тригонометрические уравнения на заданнойм интервале. Например,решение уравнения $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ исследуется на интервале $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

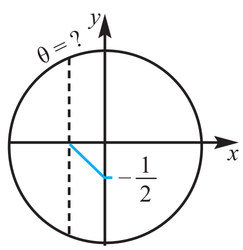
Решение можно проводить на единичной окружности или на графике. В учебнике достаточно подробно описан пример решения уравнения по графику. Исследуем решение н единичной окружности.

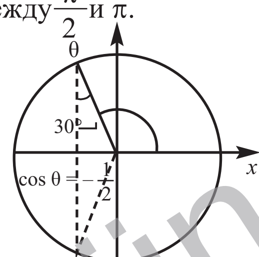
На единичной окружности косинус соответствует координате x. На оси x отметим точку $\frac{1}{2}$ и проведём вертикальную линию.

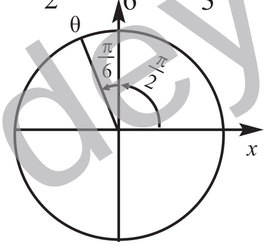
Прямая $x = -\frac{1}{2}$ пересекает окружность в двух точках. Изобразим один из углов поворота для этих точек сплошной, а другой - пунктирной линией. Угол,изображённый сплошной линией расположен между $\frac{\pi}{2}$ и π.

Угол, конечная сторона которого изображена сплошной линией, удовлетворяет условию. Это соответствует условию поворота начальной стороны после $\frac{\pi}{2}$ на угол $\frac{\pi}{6}$.

$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$





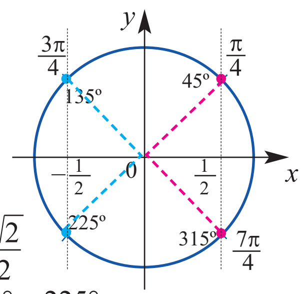


Ответ: $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Учащимся задаётся вопрос: если аргумент не принадлежит интервалу $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, а принадлежит интервалу $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, то как изменится корень уравнения? Тогда решению соответствует угол, конечная сторона которого изображена пунктирной линией, т.е. $\theta = \frac{4\pi}{3}$.

Целесообразно, на занятиях по решению тригонометрических уравнений, развивать навыки определения корней на определённом интервале. Такого рода подход оказывает положительный эффект на развитие навыков сопоставления, исследования, рассуждения. Особое внимание уделяется представлению решений как в градусах,так и в радианах (в виде действительных чисел).

Пример. Найдите корни уравнения $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(3x - 30°) + 2 = 1$ принадлежащие интервалу $0° \le x \le 180°$.
Решение: из условия $0° \le x \le 180°$ получаем, что $0° \le 3x \le 540°$.
$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(3x - 30°) + 2 = 1$
$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(3x - 30°) = -1$
$\mathrm{tg}\,(3x - 30°) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$3x - 30° = 150°, 330°, 360° + 150°, 360° + 330°$
$3x - 30° = 150°, 330°, 510°, 690°$ (это значение не принадлежит интервалу)
$3x = 180^0, 360^0, 540^0$
$x = 60^0, 120^0, 180^0$

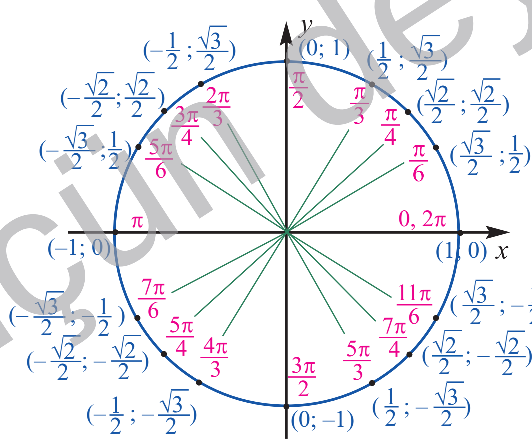
Пример. Решите уравнение $2\cos^2 x - 1 = 0$ на интервале $0°<x<360°$
$2\cos^2 x = 1$
$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Косинус положителен в I и IV четверти. Уравнению $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ на интервале $0°< x < 360°$ соответствуют значения 45° и 315°.
Во II и III косинус отрицателен. Уравнению $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ на интервале $0°< x < 360°$ удовлетворяют значения 135° и 225°.
Тогда решениями уравнения $2\cos^2 x - 1 = 0$ на интервале $0°<x<360°$ являются 45°, 135°, 225° и 315°.

Отмечается, что решать уравнения данного типа удобнее при помощи формул понижения степени. Так как в этом случае, нужно решить вместо двух уравнений всего одно.

Также удобно решения простейших тригонометрических уравнений, принадлежащих промежутку [0°; 360°), находить при помощи единичной окружности. Для этого отмечаются решения к которым прибавляется угол поворота и отмечаются координаты соответствующих точек. Эту диаграмму рекомендуется повесить на доске в классе или изображать в тетради.



Рабочий лист № 1

Имя______ Фамилия__________ Дата____________

1) Какое из следующих решений кратно решению уравнения $5\sin\theta + 3 = 3$?
a) 45° b) 90° c) 135° d) 180°

2) Запишите решения уравнения $2\cos x - 1 = 0$ в общем виде.

3) Запишите множество решений уравнения $2\sin\theta + 1 = 0$ принадлежащих интервалу $0° \leq x \leq 360°$.

4) Найдите наименьший положительный корень уравнения $2\cos 2\theta - 1 = 0$.

5) Пусть $90° < \theta < 270°$ положительный тупой угол. Определите градусную меру угла θ, если $2\sin\theta + \sqrt{2} = 0$.

6) Решите уравнение $2\mathrm{tg}x + 1 = 3\,\mathrm{tg}x + 2$ на интервале $0° \leq x \leq 360°$.

7) Решите уравнение $-\sqrt{3} = 2\cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ на интервале $0° \leq x \leq 270°$.

Рабочий лист № 2

Имя______ Фамилия__________ Дата____________

Решите следующие уравнения на интервале $0 \le \theta \le 2\pi$.

1. $\cos\theta + 1 = 0$

2. $\sin^2\theta = 0$

3. $2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$

4. $2\sin\theta + \sqrt{3} = 0$

5. $2 + \sec\theta = 0$

6. $\operatorname{tg}\theta(\cos\theta + 2) = 0$

7. $\cos\theta\,(\operatorname{tg}\theta - \sqrt{3}) = 0$

8. $2\operatorname{ctg}\theta + \operatorname{ctg}\theta = 0$

9. $\operatorname{tg}^2\theta - 3 = 0$

10. $\sin^2\theta = 1$

11. $2\sin\theta\sec\theta = \sec\theta$

12. $\cos 3\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Урок 101-105. Учебник стр. 193-199. Методы решения тригонометрических уравнений. Решение прикладных задач при помощи тригонометрических уравнений. 5 часов

Содержательный стандарт

2.3.1. Решает тригонометрические уравнения и неравенства.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *решает тригонометрицесике уравнения при помощи различных алгебраических методов;*
- *определяет корни тригонометрического уравнения на заданном интервале.*

Для решения данных тригонометрических уравнений их при помощи определённых методов приводят к простейшим тригонометрическим уравнениям. Примеры основных методов решения представлены в учебнике.

Группировка уравнений по типам является для ученика средством самооценивания, а для учителя удобной формой формативного оценивания.

Если аргумент уравнения помимо основного аргумента содержит двойной (половинный аргумент), то функции, входящие в уравнение целесообразно привести к одинаковому аргументу.

Пример. Найдите корни уравнения $4\sin 2x - 2\cos x = 0$, принадлежащие промежутку $0^\circ \le x \le 360^\circ$.

Используя тождесто $\sin 2x = 2\sin x \cos x,$ приведём уравнение к одинаковому аргументу.

$4\sin 2x - 2\cos x = 0$

$4(2\sin x \cos x) - 2\cos x = 0$

$8\sin x \cos x - 2\cos x = 0$ *вынесем общий множитель за скобку*

$2\cos x(4\sin x - 1) = 0$ *по условию равенство произведения нулю*

$2\cos x = 0$ və ya $4\sin x - 1 = 0$

$\cos x = 0$ $\qquad 4\sin x = 1 \qquad \sin x = \dfrac{1}{4}$

$x = 90^\circ, 270^\circ$ $\qquad x \approx 14{,}5^\circ; 165{,}5^\circ$

Если уравнение состоит из различных тригонометрических функций, то применив тригонометрические тождества, их нужно привести к одинаковым функциям.

Пример. $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$ *заданное уравнение*

$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$ *упроститить при помощи тождества*

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ *$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$*

$2a^2 + 3a - 2 = 0$ *выполним замену $\cos x = a$*

$a = -2$ $\qquad a = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = -2$ $\qquad \cos x = \dfrac{1}{2}$ *выполним обратную замену*

$\varnothing$ $\qquad x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

У6. б) Найдём корни уравнения $6\sin^2 x + 5 = 8$ из интервала $0 \le x \le 2\pi$

$6\sin^2 x = 3 \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}$

Применим формулу понижения степени $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}$

Отсюда $\cos 2x = 0$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \; k \in Z$$

По условию $0 \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \le 2\pi$. Умножим почленно это неравенство на $\frac{4}{\pi}$

$$0 \le 1 + 2k \le 8$$

$$-1 \le 2k \le 7$$

$$-0{,}5 \le k \le 3{,}5, \; k \in Z$$

Значит, $k = 0, 1, 2, 3$. Найдём знчения x соответствующие k.

$x = \frac{\pi}{4}; \; \frac{3\pi}{4}; \; \frac{5\pi}{4}; \; \frac{7\pi}{4}$

! Нужно обратить внимание нучащихся на то, что при почленном делении правой и левой части на общий множитель можно потерять корень. Поэтому, задания такого типа желательно выполнять методом разложения на множители.

У7. (стр. 196) д) $\sin x + 1{,}5\sin 2x = \sin^3 x$

$\sin x + 3\sin x \cdot \cos x = \sin^3 x$ *перенесём все члены налево*

$\sin x + 3\sin x \cdot \cos x - \sin^3 x = 0$ *вынесем общий множи-*

$\sin x \cdot (1 + 3\cos x - \sin^2 x) = 0$ *тель за скобку*

$\sin x \cdot (\cos^2 x + 3\cos x) = 0$ *упростим*

$\sin x \cdot \cos x \cdot (\cos x + 3) = 0$ *согласно тождеству*

$\frac{1}{2}\sin 2x \cdot (\cos x + 3) = 0$ *$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$*

$\cos x + 3 = 0$ — корней нет; $\quad \sin 2x = 0$, $\; 2x = \pi k$, $\; x = \frac{\pi k}{2}, \; k \in Z$ *по условию равенства “0” произведения*

У7. *ж*) $\sin 3x = 3\sin x$

$\sin 3x - \sin x = 3\sin x - \sin x$ *из каждой части вычтем sin x и применим*

$2\sin x \cdot \cos 2x = 2\sin x$ *формулу преобразования разности в произведеие*

$2\sin x \cdot \cos 2x - 2\sin x = 0$ *перенесём все члены налево*

$2\sin x \cdot (\cos 2x - 1) = 0$ *вынесем общий множитель за скобку*

$2\sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0$ *по формуле двойного угла*

$2\sin x \cdot (-2\sin^2 x) = 0$ *по основному тригонометрическому тождеству*

$-4\sin^3 x = 0$ *упростим*

$\sin x = 0$

$x = \pi k, \; k \in Z$

Рабочий лист № 3

Имя______ Фамилия__________ Дата____________

Решите уравнение методом разложения на множители, как показано на примере.

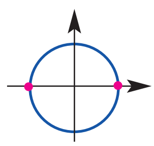
1) $\sin x = -\sin^2 x$

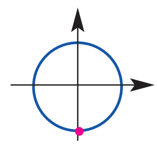
Решение:

$\sin^2 x + \sin x = 0$ $\quad \sin x\,(\sin x + 1) = 0$

$\sin x = 0$ və ya $\sin x + 1 = 0$

$\sin x = 0;\ x = n\pi,\ n \in Z$ $\quad \sin x + 1 = 0;\ \sin x = -1,\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$





1) $\sin x = -\sin^2 x$

2) $2\cos^2 x - 5\cos x = 0$

3) $3\,(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$

4) $2\sin^2 x = \sqrt{3}\sin x$

5) $\mathrm{tg}^2\, x = \mathrm{tg}\, x$

6) $\cos x \sin x = \cos x$

7) $\mathrm{tg}\, x \cdot (1 - \sin x) = 0$

8) $2\cos x - \sin x + 2\cos x \sin x = 1$

9) $\sin^2 x = 1 - \cos x$

10) $\sin 2x = 2\cos x$

Рабочий лист № 4

Имя______ Фамилия__________ Дата____________

1) Найдите корни следующих уравнений из промежутка [0;2 π].

а) $2\sin x = -1$ б) $2\sin x = \sqrt{3}$ в) $2\cos x = 1$ г) $2\cos x = -\sqrt{2}$

2) Запишите общее решение уравнений.

а) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)=1$ б) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)=\sqrt{2}$ в) $2\cos(2t)=-\sqrt{3}$ г) $2\cos(3t)=-1$

д) $3\cos\left(\frac{\pi}{5}x\right)=2$ е) $8\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)=6$ ж) $7\sin(3t)=-2$ з) $4\sin(4t)=1$

3) Найдите корни следующих уравнений из промежутка [0;2 π).

1) $4\sin^2 x + 4\sin x + 1 = 0$ 2) $\sec 2x = 2$

3) $\operatorname{tg} x \cdot \sin x - \sin x = 0$ 4) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

5) $3\operatorname{cosec}^2 x = 4$ 6) $8\sin^2 x + 6\sin x + 1 = 0$

7) $8\cos^2 x = 3 - 2\cos x$ 8) $9\sin x - 2 = 4\sin^2 x$

9) $6\cos^2 x + 7\sin x - 8 = 0$ 10) $\sin^2 x = \cos x - 2$

11) $\cos^3 x = -\cos x$ 12) $\sec x \cdot \sin x - 2\sin x = 0$

13) $\sin^2 x = \frac{1}{4}$ 14) $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

15) $2\cos^2 x + \cos x = 1$ 16) $\operatorname{tg}^3 x = 3\operatorname{tg} x$

17) $\operatorname{tg}^5 x = \operatorname{tg} x$

4) Существует ли решение уравнения $\sin 11x - \sin 5x = 2$? Решите его, если решение существует.

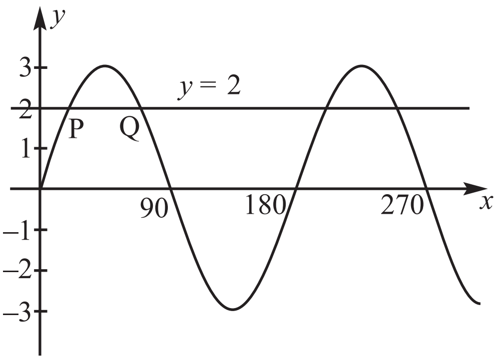
Рабочий лист № 5

Имя______ Фамилия__________ Дата____________

На рисунке представлен график функции вида $y = a\sin bx$.

а) по графику найдите значения a и b.

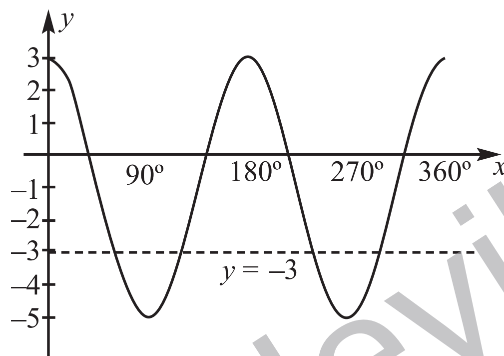
б) найдите координаты точек P и Q, в которых прямая $y = 2$ пересекает график.



На рисунке дан график функции вида $y = a\cos bx + d$

а) Найдите значения a, b и d.

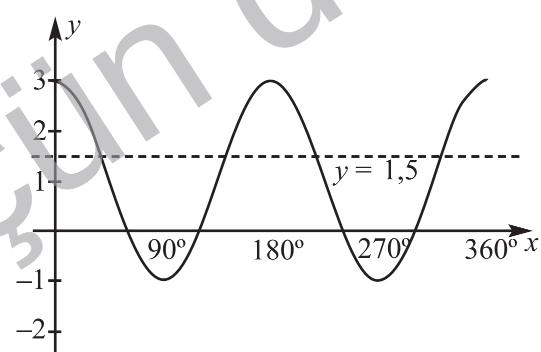
б) Найдите координаты точек пересечения графика данной функции и прямой $y = -3$ на интервале $0° \leq x \leq 360°$.



На рисунке дан график функции вида $y = a\cos bx + d$

а) Найдите значения a, b и d.

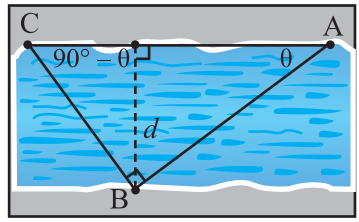
б) Найдите координаты точек пересечения графика данной функции и прямой $y = 1{,}5$ на интервале $0° \leq x \leq 360°$.



Рабочий лист № 6

Имя______ Фамилия__________ Дата____________

1) Наиля проплыла в бассейне от точки A до точки B расстояние длиной 90 м. Из точки B она повернулась на прямой угол и проплыла ещё 60 м, достигнув точки C. Если $\angle CAB = \theta$, то $\angle ACB = 90° - \theta$.



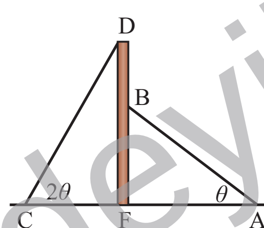
а) расстояние d равно длине перпендикуляра от точки B до сторны AC и равно ширине бассейна. Выразите расстояние d через $\sin\theta$.

б) выразите расстояние d через $\sin(90 - \theta)$.

в) составьте уравнение из выражений пункта a и b

г) найдите угол θ.

2) Столб закреплён на одинаковом расстоянии при помощи двух проволок. Проволока AB образует с землёй угол θ, проволока CD - угол 2θ. Зная, что $FD = 1{,}5\ FB$ найдите угол θ.



а) Обозначив $AB = CD = x$, $FB = y$, $FD = 1{,}5y$, выразите $\sin\theta$ и $\sin 2\theta$ через переменные x и y.

б) Задайте уравнением связь между $\sin\theta$ и $\sin 2\theta$ и решите относительно θ.

Урок 106-109. Учебник стр. 200-209.Тригонометрические неравнства. Обобщающие задания. 4 часа

Содержательный стандарт

2.3.1. Решает тригонометрические уравнения и неравенства.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *представляет решение тригонометрических неравенств при помощи графиков функций;*
- *представляет решение тригонометрических неравенств на единичной окружности;*
- *записывает решение тригонометрических неравенств аналитически.*

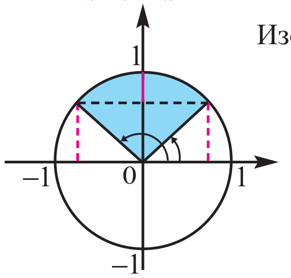
При решении простейших тригонометричских неравенств необходимо обратить внимание на навыки учащихся решать неравенства нахождением точек пересечения графика функции и прямой. Учащиеся должны уметь схематично изображать графики функций. Для формирования данных навыков целесообразно использовать графкалькулятор. Если нет соединения с Интернетом, то можно задать задания на решение тригонометриеских уравнений и неравенств при помощи графкалькулятора в качестве домашнего задания.

sin$x > a$, sin$x \ge a$, sin$x < a$, sin$x \le a$ cos$x > a$, cos$x \ge a$, cos$x < a$, cos$x \le a$,

tg$x > a$, tg$x \ge a$, tg$x < a$, tg$x \le a$, ctg$x > a$, ctg$x \ge a$, ctg$x < a$, ctg$x \le a$,

(здесь x - переменная, aпроизвольное действительное число). Решение простейших тригонометрических неравенств на рисунке подробно описано в учебнике.

sin$t > a$

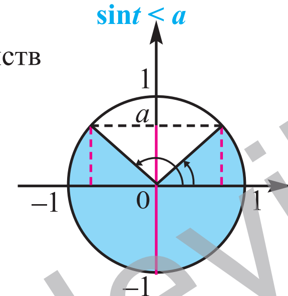


Изображение решений неравенств

sin$t > a$, sin$t < a$

на единичной окружности.

sin$t < a$



Решение неравенства sin$t > a$ можно представить следующим образом.

При $a > 1$ неравенство sin $t > a$ решений не имеет: $t \in \varnothing$

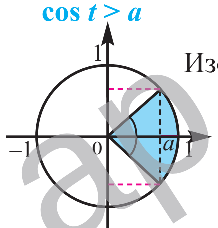
При $a < -1$ решением sin$t > a$ является любое действительное число: $t \in R$

При $-1 \le a < 1$ решение неравенства sin$t > a$ записывается так:

$$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in Z .$$

Аналогично, можно найти общий вид решений неравенства sin$x < a$.

cos $t > a$

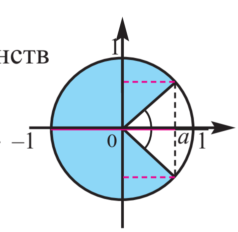


Изображение решений неравенств

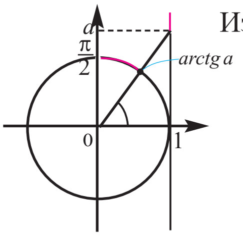
cos$t > a$, cos$t < a$

на единичной окружности.

cos $t < a$



tg $t > a$

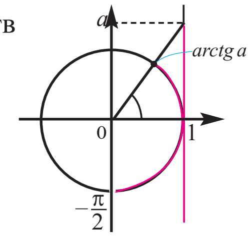


Изображение решений неравенств

$\mathrm{tg}t > a$, $\mathrm{tg}t < a$

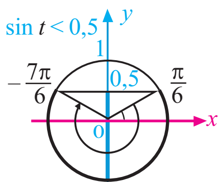
на единичной окружности.

tg $t < a$

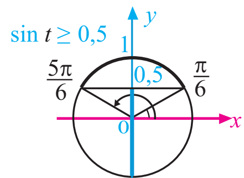


В качестве примера покажем решение неравеств

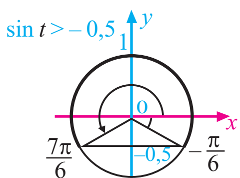
$\sin t > a$, $\sin t \geq a$, $\sin t < a$, $\sin t \leq a$ при $|a| = 0{,}5$.



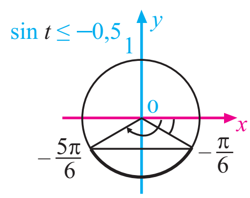
$2\pi n - \frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \ n \in Z$



$2\pi n + \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \ n \in Z$



$2\pi n - \frac{\pi}{6} < t < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n;\ \ n \in Z$



$2\pi n - \frac{5\pi}{6} \leq t \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \ n \in Z$

Решение неравенств с аргументами вида $\sin 3x$, $\cos 2x$ и т.д. исследуется совместно с учащимися.

Например, рассмотрим решение неравенства $\cos 3x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Сначала, обозначим $3x = t$ и решим неравенствао $\cos t > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ выполним обратнуюзамену $t = 3x$

$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 3x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ решим неравенство

$-\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$ $(n \in Z)$ - общий вид решений неравенства.

Рабочий лист № 7

Имя______ Фамилия__________ Дата____________

1) Изобразите на единичной окружности решение неравенств.

а) $\sin t \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ б) $\sin t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ в) $\cos t \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ г) $\cos t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Решите следующие неравенства на интервале $(0; 2\pi)$.

а) $\cos 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

б) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{1}{2}$

в) $\cos\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

г) $\operatorname{tg} 2x \geq \sqrt{3}$

д) $\operatorname{tg} x > 1$

е) $\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right) > -1$

ж) $\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right) \leq 0$

з) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) < \frac{1}{2}$

Тригонометрические уравнения и неравенства
Таблица критериеев суммативного оценивания

N	Критерии	Примечание
1	Представляет решение простейших тригонометрических уравнений при помощи графиков функций.	
2	Представляет решение простейших тригонометрических уравнений при помощи единичной окружности	
3	Представляет решение простейших тригонометрических уравнений алгебраически в общем виде.	
4	Представляет решение простейших тригонометрических уравнений на интервале при помощи графика, единичной окружности и алгебраически.	
5	Решает тригонометрические уравнения различными методами	
6	Применяет тригонометрические уравнения при решении задач.	
7	Решает простейшие тригонометирические неравенства.	

Урок 110. Тригонометрические уравнения и неравенства.
Задания для суммативного оценивания

1) Сколько решений имеет уравнение $3\cos^2 x + \cos x = 2$ на промежутке $[0; 2\pi)$?

а) четыре б) нет в) три г) два

2) Решите следующие уравнения на заданных интервалах.

а) $\sqrt{3} + 3\mathrm{tg}2x = 0$; $[0; 2\pi)$ б) $\cos\pi x = 0{,}5$; $[0; 2)$ в) $\sin\frac{x}{2} = 1$; $[0; 8\pi)$

3) Какое значение x не удовлетворяет уравнению $\sin 2x + \sin x = 0$?

а) $\frac{2\pi}{3}$ б) 2π в) $\frac{3\pi}{2}$ г) π

4)Укажите корни уравнения $\sin^2 x = \sin x$ на интервале $0 \le x \le 2\pi$.

а) $0; \frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi$ б) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

в) $\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}$ г) $0; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

5) Найдите корни уравнения $\sin^2\theta + 4\sin\theta = 0$.

а) $\frac{\pi}{6}$ б) $\frac{\pi}{2}$ в) $\frac{3\pi}{2}$ г) π

6) Сколько значений θ удовлетворяют уравнению $3\sin^2\theta + \sin\theta - 2 = 0$ на интервале $0° \le \theta < 360°$?

а)1 б)2 в)3 г) 4

7) Найдите решения неравенства $\cos t > \frac{\sqrt{2}}{2}$ на интервале $[0; 2\pi]$.

8) Укажите значения x явющиеся решением уравнения $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ на интервале $0° \le x < 360°$?

а) $\{30°; 270°\}$ б) $\{30°; 150°; 270°\}$

в) $\{90°; 210°; 330°\}$ г) $\{90°; 210°; 270°; 330°\}$

9) Найдите абсциссы точек пересечения графиков функции $y = 2\cos 2x$ и прямой $y = \sqrt{3}$.

10) Найдите корни уравнения $1 + \cos 3x = 0$ принадлежащие интервалу $[0; \frac{\pi}{2}]$.

11) Найдите сколько значений θ , являются решением уравнения $\mathrm{tg}^2\theta - 3\mathrm{tg}\,\theta + 2 = 0$ на интервале $0° \le \theta < 360°$

а)1 б)2 в)3 г) 4

12) Найдите сколько значений θ явлются решением уравнения $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$ на интервале $0° \le \theta < 360°$?

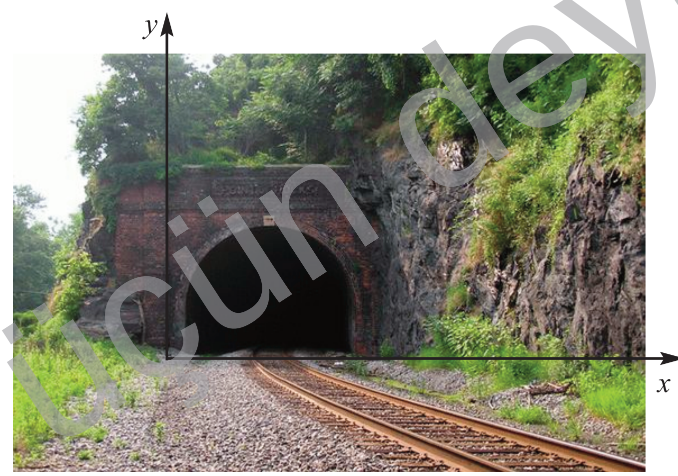
а)1 б)2 в)3 г) 4

13) Найдите корни уравнения $\cos^2 2x - \sin^2 2x = 1$ на интервале $(-\pi; \pi]$.

14) Если угол θ расположен в первой четверти и $\mathrm{tg}^2\theta - 4 = 0$, то сколько,приблизительно градусов составляет значение θ?

а) 10° б) 20° в) 63° г) 75°

15) Арку железнодорожного тунеля можно сможелировать функцией $y = 4\sin\frac{\pi x}{6} + 2$, здесь x показан в радианах. Найдите наибольшее возможное значение высоты и ширины арки.



8. Объём пространственных фигур

Таблица планирования

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
3.2.1. Различает виды симметрии 3.2.2. Знает что такое центр симметрии, ось симметрии и плоскость симметрии многогранника, строит фигуры, симметричные заданным. 3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и объёма призмы. 3.2.4. Решает задачи на нахождение площадей боковой и полной поверхностей и объёма пирамиды. 3.2.6. Решение задач на площади поверхностей и объёмы подобных пространственных фигур. 4.1.1.Применяет свойства пространственных фигур при измерениях. 4.1.2. Посредством измерений и вычислений находит площадь и, сравнивая полученные результаты, определяет погрешность вычислений.	111-114	Объём призмы.	4	211-217
	115-118	Объём пирамиды.	4	218-221
	119-122	Подобие пространственных фигур. Площади плоскостей и объёмы пространственных фигур. Объём усечённой пирамиды. Задачи на сечение пирамиды плоскостью.	4	222-228
	123-125	Симметрия в пространстве. Обобщающие задания.	3	229-232
	126	Задания для суммативного оценивания.	1	
	Всего		16	

Урок 111-114. Учебник стр. 211-217 Объём призмы. 4 часа

Содержательный стандарт

3.2.3. Решает задачи на нахождение боковой и полной поверхностей и объёма призмы

4.1.1. Fəza fiqurlarının xassələrini ölçməyə tətbiq edir.

4.1.2. Ölçmə və hesablama vasitələri ilə sahələri hesablayır və alınmış nəticələri müqaisə edərək xətanı müəyyən edir

Математический словарь: объём призмы

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

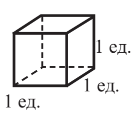
Рабочие листы

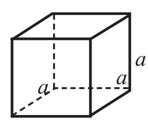
- *объясняет объём призмы через количество кубов;*
- *применяет формулу объёма призмы при решении задач;*
- *применяет принцип Кавальери для фигур, имеющих равный объём.*

Что мы подразумеваем под словом объём?

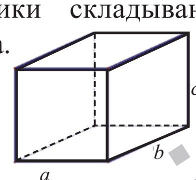
Объём измеряет какую часть пространства занимает фигура. Любые предметы или объекты, которые нас окружают, занимают определённую часть пространства и имеют определённый объём.Значение объёма выражается в кубических единицах. За единицу объёма принято считать куб, у которого ребро равно 1 см, 1 мм, 1 м и т.д. Чтобы узнать объём призмы, надо определить сколько кубических единиц она занимает. Для этого, кубики складываются рядами(слоями). Общее количество кубов равно объёму тела.

.



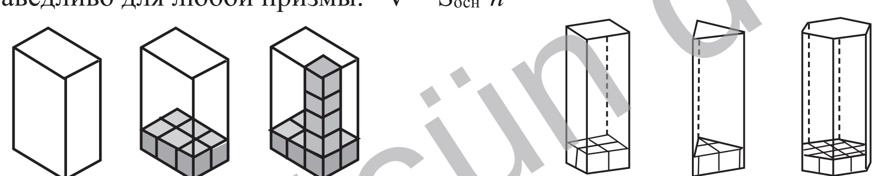


Объём куба со стороной a равен $V = a^3$



Объём прямоугольного параллелепипеда с измерениями a, b, c $V = abc$ или $V = (ab)c$.

Объём других призм также можно найти по количеству слоёв кубиков. Количество кубиков являющее площадью основания можно умножить на высоту. Это справедливо для любой призмы. $V = S_{осн} \cdot h$



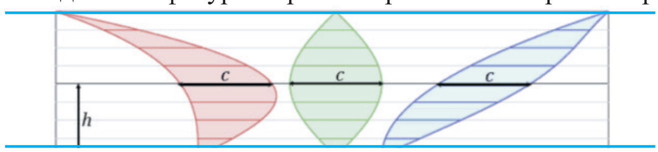
В зависимости от формы предметов, были получены формулы для вычисления объёмов. Последовательность исследования объёма призмы.

1. Объём прямоугольного параллелепипеда.
2. Объём призмы в основании которой лежит прямоугольный треугольник.
3. Объём призмы в основании которой лежит произвольный треугольник.
4. Объём призмы в основании которой лежит произвольный многоугольник.
5. Объём наклонной призмы.

Объяснения проводятся на основе вопросов и ответов учащихся. Подробное объяснение нахождение объёмов призм рекомендует для самостоятельного изучения в качестве домашнего здания. Вводится понятие принципа Кавальери для приз, объёмы которых равны.

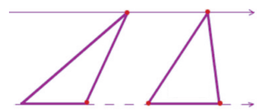
Принцип Кавальери используется как для плоских фигур(площадей), так и для пространственных фигур(объёмов).

Принцип Кавальери для плоскости: Если две плоские фигуры расположены между двумя параллельными прямыми и отрезки прямых, параллельных этим линиям одной фигуры равны отрезкам другой, то площади фигур равны. Например, площади листочков на рисунке равны, так как равно расстояние между двумя параллельными прямыми для всех фигур и отрезки параллельных прямых принадлежащих фигурам.



Рассмотрим принцип Кавльери для плоских фигур.

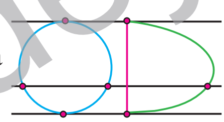
Принцип Кавальери для треугольников: если треугольники расположены между двумя параллельными прямыми и их основания равны, то площади треугольников равны.



Принцип Кавальери для параллелограммов: если параллелограммы расположены между двумя параллельными прямыми и их основания равны, то площади параллелограммов равны. На рисунке площади прямоугольника и параллелограмма равны.

Фигуры основания которых расположены как показано на рисунке могут и не быть равными. Однако, если при этом соответствующие отрезки параллельных прямых будут равны, то в этом случае принцип Кавальери выполняется. По принципу Кавальери, площади фигур между параллельными прямыми равны.

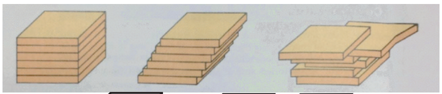
Рассмотрим другие плоские фигуры. Площади фигур на рисунке равны.

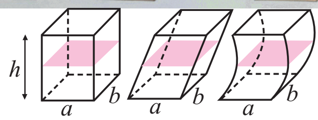


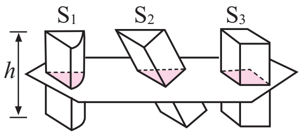
Принцип Кавальери широко применяется для точных вычисления площадей и объёмов геометрических тел определённой формы. Он также используется в других прикладных науках. В медицине он используется для проведения стереологичесого анализа. Например, применяется для нахождения размеров лёгких.

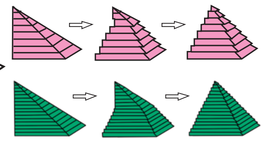
Принцип Кавальери для пространства: если пространственные фигуры расположены между двумя параллельными плоскостями (высоты равны) и каждые параллельные сечения этих фигур(на произвольном уровне) равны по площади, то эти фигуры равны по объёму.

Принцип Кавльери используется для определения объёмов различных пространственных фигур.Представим, что одинаковое количество книг положены друг на друга или не очень аккуратно в стопку. В каждом из двух случаев, книги занимают в пространстве одинаковый объём.

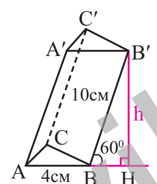






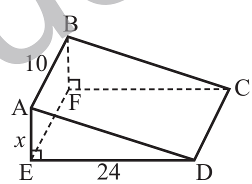


Можно провести следующие исследования. Фирма при создании дизайна коробок для продуктов стремится , чтобы было использовано как можно меньше материала. Например, фирма планирует для детского питания использовать коробки вместимостью 18 см^3. Коробку с какими размерами выгоднее использовать?
Коробка объёмом 18 см^3 может иметь размеры:
$1\times1\times18 = 18$, $1\times2\times9 = 18$,$1\times3\times6 = 18$, $2\times3\times3 = 18$.
Найдём площади полных поверхностей коробок.
1: $S = 2\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot18 + 2\cdot1\cdot18 = 74$ см^2
2: $S = 2\cdot1\cdot2 + 2\cdot1\cdot9 + 2\cdot2\cdot9 = 58$ см^2
3: $S = 2\cdot1\cdot3 + 2\cdot1\cdot6 + 2\cdot3\cdot6 = 54$ см^2
4 : $S = 2\cdot2\cdot3 + 2\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot3 = 42$ см^2
Как видно наиболее оптимальной является коробка с размерами $2\times3\times3$.
Учащиеся из этого исследования делают вывод, что фигуры с одинаковым объёмом могут иметь разную площадь поверхности.



У.17. Боковые рёбра наклонной призмы составляют с плоскостью основания угол 60^o . В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 4 см. Боковое ребро равно 10 см. Найдите объём призмы.

Решение: формула объёма призмы V= S$_{осн.}$h. В основании призмы равнобедренный треугольник. По формуле $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ найдём площадь треугольника $S_{0}=4\sqrt{3}$. $h=l\cdot\sin\alpha=10\cdot\sin60°=5\sqrt{3}$.Тогда объём призмы $V=4\sqrt{3}\cdot5\sqrt{3}=60$ sm^3.



У.19. На рисунке изображён склон прямоугольной формы, который превратили в прямую поверхность CDEF, также прямоугольной формы, выкопав часть земли. AB = 10 м, ED = 24. При этом площадь уменьшилась на 10 м^2. Сколько кубических метров земли было выкопано?

Решение: обозначим длину ребра AE через x и запишем объём прямой треугольной призмы

$V=\frac{1}{2}\cdot24\cdot x\cdot10=120x$ По условию задачи, $S_{ABCD} = S_{CDEF} + 10$

Из ΔAED $AD=\sqrt{x^2+24^2}$ $S_{ABCD}=10\cdot\sqrt{x^2+576}$, $S_{CDEF}=10\cdot24=240$

Отсюда $10\cdot\sqrt{x^2+576}=250$;

возведём обе стороны уравнения в квадрат $\sqrt{x^2+576}=25$

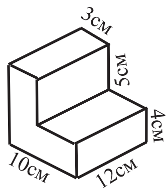
$x^2 + 576=625$; $x^2=49$; $x=7$

$V= 120\cdot7= 840$ м^3 - столько кубических метров земли было выкопано.

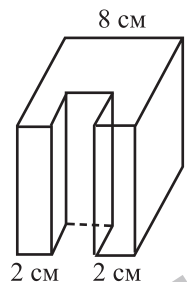
Рабочий лист № 1

Имя ____________ Фамилия_________ Дата _____________

1) Найдите объём фигуры.



2) Основание прямой призмы четырёхугольник со стороной 8 см. Из этой призмы как показано на рисунке вырезан параллелепипед, в основании которого лежит квадрат. Найдите объём оставшейся части, если площадь полной поверхности этой части равна 248 $см^2$.



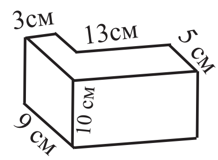
3) Сколько кирпичей размером 18см×12см×10см потребуется для построения $\frac{1}{10}$ части стены размером 12м×0,6м×4,5м?

4) Вода в реке, глубиной 3 м и шириной 40 м, течёт со скоростью 2 км в час. Какой объём воды вливается в море из этой реки за 1 минуту?

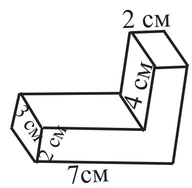
Рабочий лист № 2

Имя ____________ Фамилия_________ Дата _____________

1) Найдите площадь полной поверхности и объём фигуры.



2) Найдите площадь полной поверхности и объём фигуры.



3) Куб со стороной 12 см разделён на 8 одинаковых по объёму кубов. Найдите длину ребра нового куба.

4) Коробку с размерами 15 см × 6 см × 22 см для злаковых продуктов фирма планирует изменить на коробку с размерами 20 см× 20 см ×5 см.
Вместимость какой коробки больше?
Для изготовления какой из коробок потребуется больше картона?

Урок 115-118. Учебник стр. 218-221 Объём пирамиды. 4 часа.

Содержательный стандарт

3.2.4. Решает задачи на нахождение площадей боковой и полной поверхностей и объёма пирамиды.

4.1.1.Применяет свойства пространственных фигур при измерениях.

4.1.2. Посредством измерений и вычислений находит площадь и, сравнивая полученные результаты,определяет погрешность вычислений

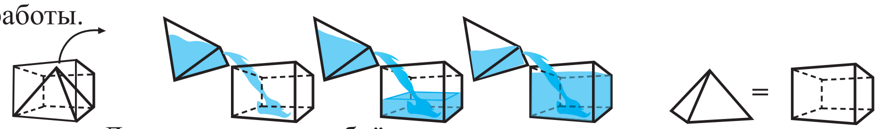
Математический словарь: объём пирамиды

Навыки формирующиеся у учащихся

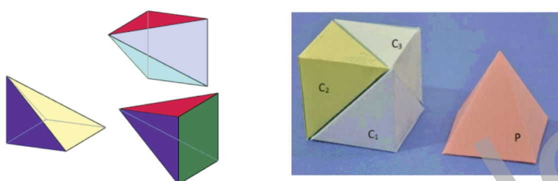
Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *применяет формулу для вычисления объёма пирамиды при решении задач.*
- *применяет свойства пирамиды для вычисления её объёма*

Рекомендуется представить объём куба как сумму объёмов трёх конгруэнтных пирамид в виде слайдов и плаката. Внешпредметная интеграция на этих уроках оказывает положительное влияние на формирование навыков коллективной работы.



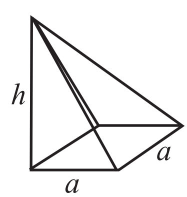
Занятие. Для определения объёма пирамиды существует старинная китайская задача. На древнем японском языке yangma означает пирамиду с квадратным основанием, одно боковое ребро которой перпендикулярно плоскости основания. Если сторона основания и высота пирамиды равна a, то 3 yangma образуют куб.



Если объём куба равен $a\times a\times a = a^3$,то объём пирамиды равен $\frac{a^3}{3}$.

Далее используя прямоугольную призму можно получить обобщённую формулу для пирамиды. Представим, что куб с размерами 1×1×1 растянут по горизонтали. В этом случае количество слоёв не меняется, а увеличивается в a раз длина каждого слоя и объём станет равным $a\times 1\times 1$.

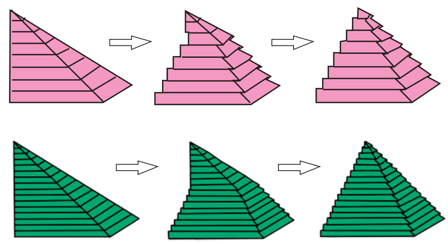
Если увеличить куб в перпендикулярном направлении, то объём станет равным $a\times b\times 1$, т.е. увеличится в b раз. Аналогично увеличив в c раз в третьем направлении получим $a\times b\times c$. Это выражение является объёмом параллелепипеда. То есть три измерения фигуры можно растянуть в трёх различных направлениях. При этом, если коэффициент растяжения в любом



направлении обозначить через k, то объём также увеличится в k в каждом направлении. После чего вернёмся к янгме. Теперь представим, что высота пирамиды равна h *(вместо а)*. Это значит, что коэффициент растяжения по вертикали равен $\frac{h}{a}$. То есть, формулу объемна $=\frac{a^3}{3}$ можно записать как

$$V=\frac{h}{a}\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{ha^2}{3}.$$

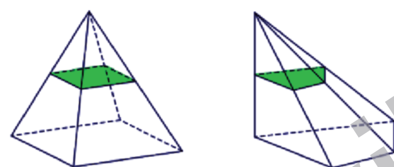
Так как основание янгме является квадратом, то перейдём к принципу Кавальери для объёма пирамиды.



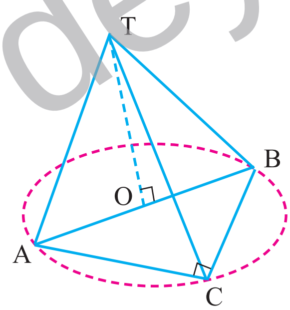
Сдвигая слои пирамиды yangma можно получить пирамиду в основании которой лежит квадрат и тогда объём пирамиды можно найти по формуле $V=\frac{ha^2}{3}$
Можно посмотреть следующую анимацию в Интернете по адресу
http://nrich.maths.org/1408&part=, где представлен вывод данной формулы.

В учебнике рассмотрен другой способ вывода формулы для нахождения объёма пирамиды.

Принцип Кавальери также может быть рассмотрен на примере пирамид. Пирамиды на рисунке имеют равную высоту между двумя параллельными плоскостями.



У5. Каждое боковое ребро треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 6 см, 8 см и 10 см, равно 13 см. Найдите объём пирамиды.



Решение: длины сторон треугольника в основании пирамиды являются пифагоровыми числами. Так как боковые рёбра находятся на одинаковом расстоянии, то основание высоты является центром описанной вокруг треугольника окружности. В прямоугольном треугольнике он находится на середине гипотенузы, т.е. $AO = OB = 5$.

Из ΔAOT

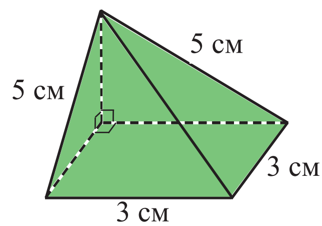
$TO=\sqrt{AT^2-AO^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

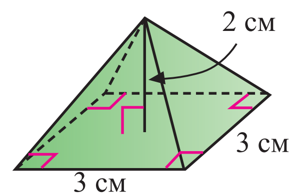
$V=\frac{1}{3}S\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot 12=96$ (см^3)

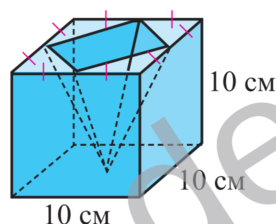
Рабочий лист № 3

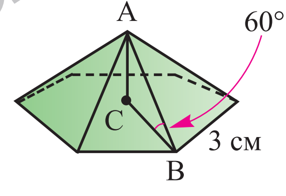
Имя ______________ Фамилия__________ Дата _______________

Найдите объёмы пирамид.









Урок 119-122. Учебник стр.223-228. Подобие пространственных фигур. Площади поверхностей и объёмы пространственных фигур. Объём усечённой пирамиды. Задачи на сечение пирамиды плоскостью. 4 часа

Содержательный стандарт

3.2.6. Решение задач на площади поверхностей и объёмы подобных пространственных фигур.

Математический словарь: объём пирамиды

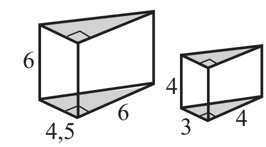
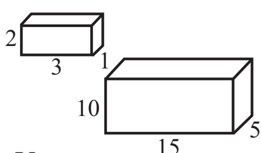
Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

• *Решает задачи, построенные на отношениях линейных размеров,площадей поверхностей и объёмов подобных пространственных фигур.*

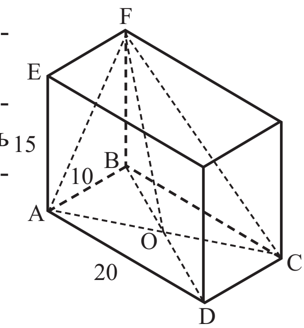
На доске изображаются подобные пространственные фигуры, для которых необходимо вычислить объёмы и площади поверхности. После чего находят отношение линейных размеров.

Подобные фигуры.	Отношение сторон	Отношение площадей	Отношение объёмов
	4 : 6 2 : 3	60 : 135 4 : 9 $2^2 : 3^2$	24 : 81 8 : 27 $2^3 : 3^3$
	3 : 15 1 : 5	22 : 550 1 : 25 $1^2 : 5^2$	6 : 750 1 : 125 $1^3 : 5^3$

Учащиеся должны понять, что отношение линейных размеров пространственных фигур остаётся неизменным. Это отношение называется коэффициентом или отношением подобия. Увеличение или уменьшении коэффициента(отношения) подобия нужно понимать как масштаб. Т.е. все размеры большой фигуры больше размеров маленькой фигуры в разы, равные коэффициенту(отношению) подобия. Можно задать следующие вопросы: “Если коэффициент подобия фигур равен 1:2 , то чему равно отношение площадей и объёмов этих фигур?”. Отношение площадей 1:4 (квадрат отношения), отношение объёмов 1:8 (куб отношения).

Выполняются задания из учебника. Учащимся предлагается устно решить задачи следующей тематики. Чай продаётся в двух подобных коробках.Высота одной из них 8 см, а другой 10 см. Если в большой коробке 500 гр чая, то сколько грамм чая в маленькой коробке? Учащиеся понимают, что коэффициент подобия равен 4:5 или 0,8. В маленькой коробке должно быть $500 \times (0,8)^3 = 256$ гр чая. Отсюда видно, что если вместимость одной из двух подобных коробок в 2 раза больше другой, то соответствующие размеры относятся приблизительно как 4:5. До сведения учащихся доводится эта практическая информация. Расстраиваются также подобие пирамид, полученных при сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Формула, для нахождения объёма усечённой пирамиды, выводится совместно со всем классом.

На следующем уроке решаются задания на сечение плоскостью.
Так как задания типа **У.6** при решении требуют множества вычислений, то некоторая часть решения может быть обсуждена и выполнена в классе. Закончить решение задания учащиеся должны самостоятельно дома.



У.6. (стр.227) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны AD = 20 см, AB = 10 см, AE = 15 см.

а) Найдите градусные меры углов $\angle AFB$, $\angle BFO$, $\angle AFO$, $\angle BOF$, $\angle AOF$.

Для угла :$\angle AFB$

$\mathrm{tg}\angle AFB = \frac{AB}{BF} = \frac{10}{15}$ $\quad \angle AFB \approx 33°$

Для угла :$\angle AFO$ $\quad OA=OB = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{AB^2+AD^2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{20^2+10^2} = 5\sqrt{5}$ см

$OF^2=OB^2+BF^2=(5\sqrt{5})^2+15^2=350$ $\quad OF= 5\sqrt{14}$ см

$AF^2=AB^2+BF^2=10^2+15^2=325$ $\quad AF= 5\sqrt{13}$ см

$OA^2=AF^2+OF^2-2(AF)(OF)\cos\angle AFO$

$125=325+350-2(5\sqrt{13})(5\sqrt{14})\cos\angle AFO$

$\cos\angle AFO = \frac{325+350-125}{2(5\sqrt{13})(5\sqrt{14})}$

$\angle AFO \approx 35°23'$

б) Найдите площади ΔABO, ΔBOF, ΔAOF.

Для треугольника :ΔAOF

$S_{\Delta AOF} = \frac{1}{2}(AF)(OF)\sin\angle AFO = \frac{1}{2}(5\sqrt{13})(5\sqrt{14})\sin 35°23' \approx 97{,}4$ см^2

в) Найдите наименьшее расстояние от точки B до плоскости AOF.

$\Delta ABC \sim \Delta AGB$

$\sin\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BG}{AB}$

$\frac{20}{\sqrt{20^2+10^2}} = \frac{BG}{10}$

$BG=4\sqrt{5}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{BG}{BF}$

$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{4\sqrt{5}}{15}$

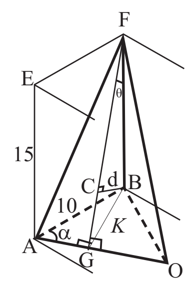
$\theta \approx 30{,}81°$

$\sin\theta = \frac{d}{BF}$

$d=BF\sin\theta$

$d=15\sin 30{,}81°$

$d\approx 7{,}682$



Рабочий лист № 4

Имя ____________ Фамилия_________ Дата _____________

1) Призмы A и B подобны. Найдите площадь поверхности и объём призмы B, если для призмы A известны коэффициент подобия, площадь поверхности и объём.

Коэффициент : 1 : 4
$S = 60$ см^2
$V = 30$ см^3

Коэффициент: 1 : 3
$S = 144$ м^2
$V = 288$ м^3

Коэффициент: 2 : 5
$S = 112$ м^2
$V = 160$ м^3

2) Отношение объёмов двух подобных пирамид равно 3 : 375. Найдите:

а) отношение площадей основания

б) отношение высот

в) отношение полных поверхностей

3) Для двух подобных пирамид, заполните следующую таблицу.

Коэффициент подобия	3 : 4	5 : 7	?	?	?	?
Отношение сторон	?	?	2 : 1	?	?	?
Отношение апофем	?	?	?	1 : 6	?	?
Отношение поверхностей	?	?	?	?	4 : 9	?
Отношение полных поверхностей	?	?	?	?	?	?
Отношение объёмов	?	?	?	?	?	8 : 125

Урок 123-125. Учебник стр. 229-232. Симметрия в пространстве. Обобщающие задания. 3 часа

Содержательный стандарт

3.2.1. Различает виды симметрии

3.2.2. Знает что такое центр симметрии, ось симметрии и плоскость симметрии многогранника, строит фигуры, симметричные заданным.

Математический словарь: плоскость симметрии

Навыки формирующиеся у учащихся

- *строит сечение пирамиды плоскостью;*
- *находит площадь полной поверхности усечённой пирамиды.*

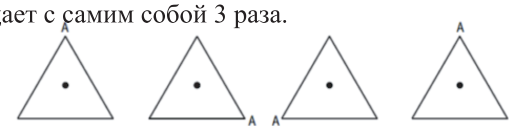
Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Фигуры на плоскости бывают симметричными относительно прямой или точки. Вспоминается симметрия на плоскости. Это удобно делать при помощи треугольника.

У равностороннего треугольника есть три оси симметрии.

Равносторонний треугольник обладает вращательной симметрией третьего порядка. При повороте на 360° он совпадает с самим собой 3 раза.

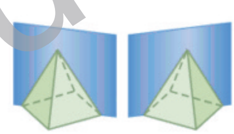


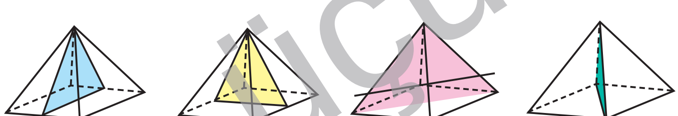
Равносторонний треугольник

Вращательная симметрия представлена на примерах техники создания узоров для дизайна. Учащиеся могут, работая в группах, создавать различные композиции.

В пространстве фигуры могут быть симметричны относительно плоскости. Также как и плоские фигуры они могут обладать более одной симметрией отображения.

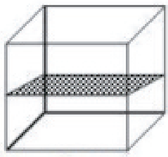
Например, у правильной четырёхугольной пирамиды есть 4 плоскости симметрии. Две из них проходят через высоту и вершины основания, а две другие через высоту и середины сторон основания.



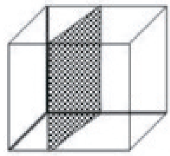


Учащиеся должны понимать и геометрически представлять, что плоскость которая делит прямоугольный параллелепипед или куб с квадратным основание на две конгруэнтные части, является плоскостью симметрии.

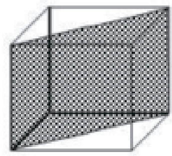
Эти фигуры имеют плоскости симметрии параллельные, перпендикулярные и диагональные относительно основания.



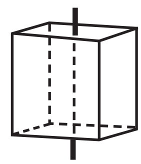
Плоскость параллельная основанию



Плоскость перпендикулярная основанию



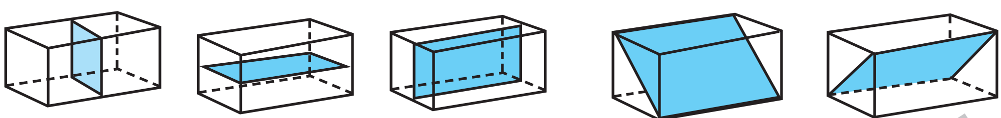
Диагональная плоскость

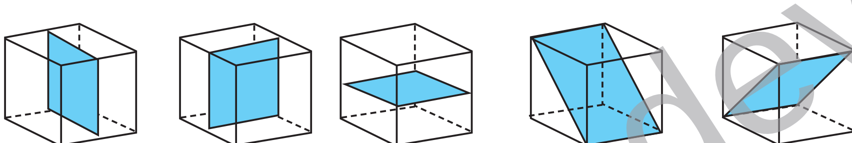


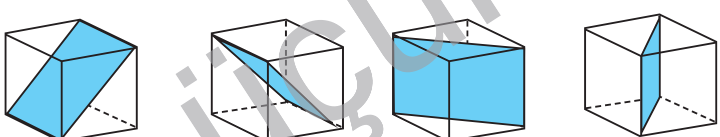
Вращательную симметрию можно смоделировать при помощи коробки и трубочки от сока. При каждом повороте на 90° наблюдается совмещение куба с самим собой.

Работа в группах. Установить плоскости симметрии пирамиды и куба учащиеся могут работая в группах. Каждая группа должна изобразить как можно больше расположений плоскостей. После чего исследуется делит или нет эта плоскость фигуру на две симметричные части.

Для прямоугольного параллелепипеда существует 5 плоскостей, которые делят его на две равные по размеру части, для куба существует 9 таких плоскостей.







Объёмы пространственных фигур
Таблица критериев оценивания

N	Критерии	Примечание
1	Решает задачи на нахождение объёма призмы.	
2	Решает задачи на нахождение объёма пирамиды.	
3	Решает задачи на подобие площадей поверхностей и объёмов.	
4	Решает задачи на сечение плоскостью.	
5	Представляет симметрию в пространственных фигурах.	

Урок 126. Объёмы пространственных фигур.
Задания для суммативного оценивания по разделу

1) Какие фигуры имеют одинаковое количество граней?

2) Найдите третье измерение бака, если его объём равен 8 $м^3$, а два измерения бака равны 2,5 м и 0,8 м.

3) Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 10 см, а высота 8 см. Найдите объём и площадь полной поверхности пирамиды.

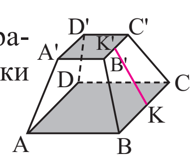
4) Пярвин должны изобразить грани треугольной призмы. Какие плоские фигуры должна изобразить Пярвин?

а) 3 треугольника, 3 прямоугольника б) 3 треугольника, 2 прямоугольника

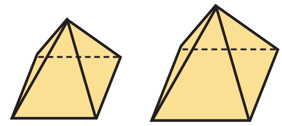
в) 2 треугольника, 3 прямоугольника г) 2 треугольника, 4 прямоугольника

5) Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если её высота равна 125 см, а сторона основания равна 85 см.

6) Найдите объём правильной четырёхугольной усечённой пирамиды на рисунке, если AB = 48, A\`B\` = 12, K и K\` -средние точки оснований и KK\` = 30.

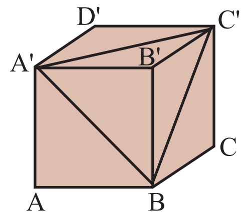


7) Найдите отношение площадей боковых поверхностей подобных пирамид.



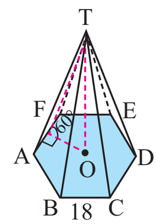
$V_1 = 216$ см^3 $V_2 = 343$ см^3

8) Найдите объём пирамиды на рисунке, если длины ребра куба равна 4 см.

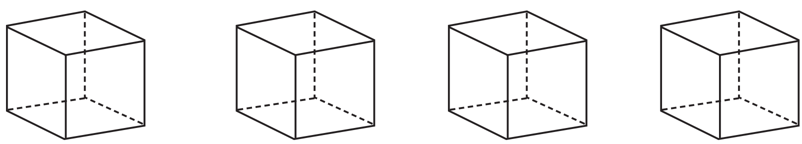


9) Отношение подобия двух коробок равно 3:4, высота большей коробки в форме прямоугольного параллелепипеда равна 12 см, а вместимость 600 грамм. Найдите высоту и вместимость меньшей коробки.

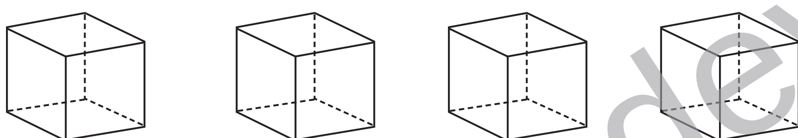
10) Найдите объём правильной шестиугольной пирамиды, если боковая плоскость составляет с плоскостью основания угол 60^0, а сторона основания призмы равна 18 см.



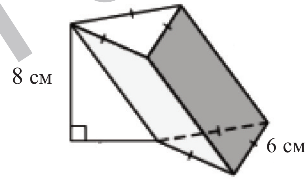
11) Изобразите 4 различных плоскости симметрии куба.



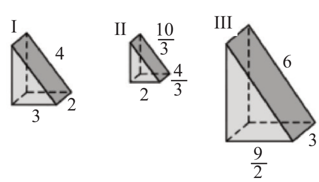
12) Изобразите 4 различных оси симметрии куба.



13) Найдите объём наклонной призмы.



14) Какие из двух фигур подобны?



9. Показательная и логарифмическая функции

Таблица планирования

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
1.1.3. Упрощая находит значения тригонометрических, показательных и логарифмических выражения 2.2.6. Знает определение показательной функции и строит её график. 2.2.7. Знает и применяет определение логарифма числа и правила логарифмирования. 2.2.8. Знает определение и свойства логарифмической функции и строит её график. 2.3.2.Решает показательные и логарифмические уравнения и неравенства.	127-129	Степень с действительным показателем. Показательная функция.	3	234-242
	130,131	Преобразование графиков показательной функции.	2	243-245
	132	Показательная функция. Число *e*.	1	246, 247
	133,134	Логарифм числа.	2	248, 249
	135,136	Логарифмическая функция. Логарифмическая шкала и решение заданий.	2	250-253
	137-138	Свойства логарифмов.	2	254-257
	139-141	Показательные уравнения. Логарифмические уравнения.	3	258-264
	142-145	Показательные и логарифмические неравенства. Обобщающие задания.	4	265-271
	146	Показательная и логарифмическая функция. Задания для суммативного оценивания.	1	
	Всего		20	

Пример модели урока по разделу. Показательная функция $y = a^x$

Содержательны стандарт

2.2.6. Знает определение показательной функции и строит её график.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *строит график показательной функции;*
- *применяет свойства показательной функции;*
- *различает экспоненциально возрастающую и убывающую функцию по графику;*
- *моделирует задачи реальных ситуаций при помощи показательной функции.*

В качестве мотивации может быть рассмотрено одно из прикладных задач, для решения которых используется показательная функция.

• рост населения
• нахождение сумму денег на счету в банке при помощи формулы сложного процента (интервальным (месяц, квартал) и непрерывный(год) способом)
• время радиоактивного распада вещества
• размножение бактерий
• изменение средней температуры воды
• количество сыгранных игр между футбольными и волейбольными командами.

Каждую из этих задач можно использовать в качестве примера для исследования. Однако более целесообразно, чтобы учащиеся сами при помощи реальной ситуации установили изменения как показательную функцию. Например, количество листов, которые получатся при складывании листа бумаги.

Данное занятие можно организовать в группах.

Мотивация. Занятие. Каждой группе даётся лист бумаги. Один из членов группы режет лист пополам. После чего, порезанные листы накладываются друг на друга и, вновь разрезают пополам. Другие члены группы составляют таблицу в которой записываются количество разрезов и количество полученных частей. После каждого разрезания листы накладываются друг на друга и всё повторяется снова(например 8 раз) и каждый раз результат заносится в таблицу.

Количество разрезов (x)	Количество листов (y)
0	1
1	
2	

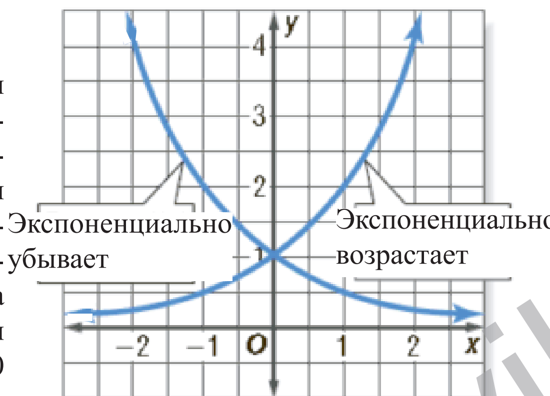
Анализ информации. 1. Обозначьте количество разрезов через x, количество листов через y и запишите пару координат $(x;y)$. Обратите внимание, что первая пара координат будет $(0;1)$ и она выражает целый, ещё не порезанный лист.

2. Запишите пары до предпоследнего шага, т.е. 7 пар координат. По изменениям координат определите сколько листов будет наложено друг на друга после последнего разреза?

3. На координатной плоскости отметьте координаты x и y. При изображении координатной плоскости, обратите внимание на расположение значений y, так как они растут быстрее значений x.

Получение результатов и новой информации.
1. Запишите зависимость между y и x в виде формулы для функции.
2. Найдите значения *y при* $x = 9$, $x = 10$.
3. Если высота 500 штук листов бумаги равна 2,5 см, то чему, приблизительно, равна высота полученных вами листов?
4. Если на разрезание каждого слоя вы тратите 5 секунд, то сколько секунд вы потратите на 30 разрезов? Определите высоту полученных после 30 разрезов листов, по высоте 500 листов.
5. Формулу, записанную на 1-ом этапе примените к 30 разрезам и найдите высоту сложенных листов. **(8-12 мин.)**

Обучение. По таблице значений строится график функции $y = a^x$. *Расстраиваются случаи при* $a > 1$ и $0 < a < 1$. Определяется экспоненциальное возрастание и убывание в зависимости от значений a. Графики функций представляются в одной системе координат. Обсуждаются схожие и отличительные свойства графиков. Учащимся предлагается построить графики в тетради (10 мин.)**.**



Обсуждаются свойства функции $y = a^x$. По графику устанавливается, что областью определения является множество всех действительных чисел, а множеством значений положительные действительные числа, а также точка пересечения с осью y. Также устанавливается, что ось x является горизонтальной асимптотой. Выполняются задания 1-17 из учебника (10 мин.).

Формативное оценивание. Для проверки учащимся задаются следующие вопросы:
1) Как вы объясните экспоненциальную зависимость(изменение)?
2) Почему нельзя, чтобы $a = 1$?
3) Какие схожие и отличительные черты имеют графики функций $y = 2^x$ и $y = (\frac{1}{2})^x$?
4) Можно ли назвать функции $y = x^2$ и $y = 2^x$ одинаковыми функциями? (3-5 мин.).

Домашнее задание. Задания 1-17 (оставшиеся).

В ходе урока полезно было бы использовать общие указания (урок №128, стр. №.195) .

Урок 127-129. Учебник стр. 234-242. Степень с действительным показателем. Показательная функция. 3 часа

Содержательный стандарт

2.2.6. Знает определение показательной функции и строит её график.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

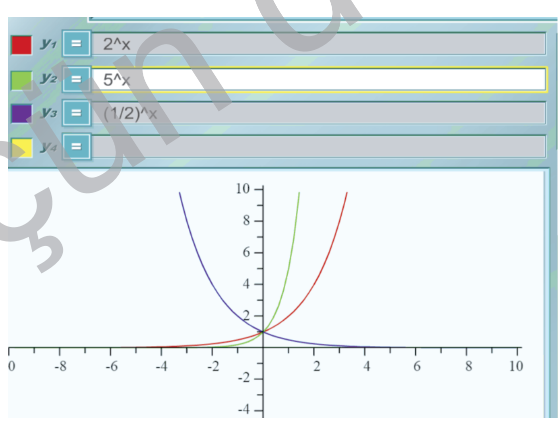
- *упрощает выражения содержащие степень с действительным показателем;*
- *строит график показательной функции;*
- *применяет свойства показательной функции;*
- *по графику и по формуле различает экспоненциально возрастающую и экспоненциально убывающую функцию;*
- *моделирует задачи реальных ситуаций при помощи экспоненциальной функции.*

Математический словарь

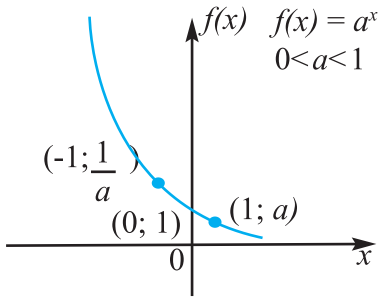
показательная функция, основание показательной функции, показатель, экспоненциально возрастающая, экспоненциально убывающая

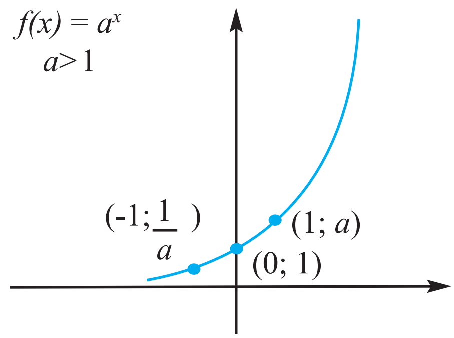
1-ый час. Рассматривается представленное в учебнике задание, в котором исследуется смысл степени с иррациональным показателем как действительного числа, т.е. a^t, если t является иррациональным числом. Такое же задание можно выполнить для различных чисел. Например, рассмотрев это для $10^{\sqrt{2}}$ получаем последовательность, $10^{1,4142} \approx 25,9537$, $10^{1,41421} \approx 25,9543$, $10^{1,414213} \approx 25,9545$ из которой видно, что при приближении показателя степени 10 к $\sqrt{2}$, значение $10^{\sqrt{2}}$ приближается к числу 25,9545 после запятой. Значит, $10^{\sqrt{2}}$ также является действительным числом. Отметим, что свойства степени с рациональным показателем также относятся и к степени с иррациональным показателем. Учащимся предоставляется время, для записи свойств в общем виде и по одному примеру для каждого свойства. Выполняются задания из учебника. Также дополнительные задания представлены на рабочих листах.

2-ой час. Исследуется построение графика функции $y = a^x$. Функции вида $y = 5^x$, $y = 0,5^x$, $y = a^x$ являются показательными функциями, где *a положительное число* ($a \neq 1$). Показываются графики различных показательных функций. Эти графики подобны по форме и расположены выше оси x. Свойства показательных функций рассматриваются и обсуждаются по графикам. Можно задать следующий вопрос: “Как по вашему, почему эти графики пересекаются в одной точке? В нулевой точке $a^0 = 1$ графики пересекаются в одной точке.



По таблице значений строится графики функций.
Отмечается, что при $a > 1$ функция является экспоненциально возрастающей, при $0 < a < 1$ - экспоненциально убывающей.





Рекомендуется выполнять задания, где требуется записывать формулу показательной функции по таблице значений. Эти задания дают возможность более глубоко осознать понятие показательной функции и её свойства.

Учащиеся должны выбрать в таблице наиболее подходящее значение. Это значение *y при* $x = 0$. При $x = 0$ значение функции равно -1. Значит, перед формулой будет стоять знак минус (эта функция должна быть преобразована симметрично). Учащимся отводится определённое время для записи формул.

x	-2	-1	0	1	2
y	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-16

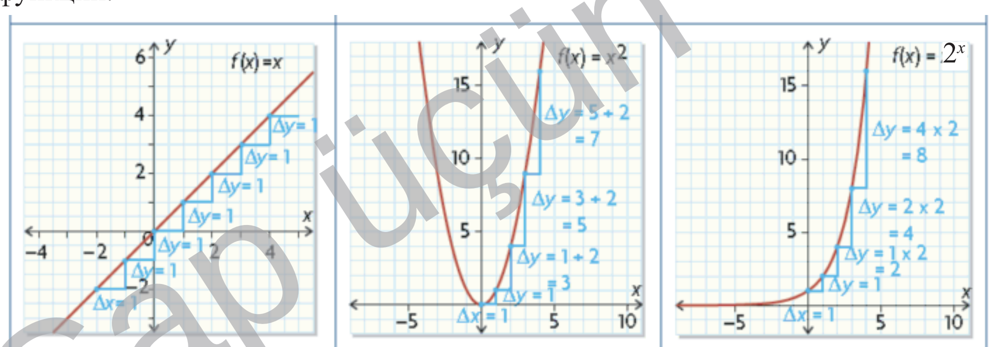
$y = -1 \cdot 4^x$ $\qquad \cdot 4 \quad \cdot 4$

x	-2	-1	0	1	2
y	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$

x	-1	0	1	2	3
y	$-\frac{5}{2}$	5	10	20	40

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{100}{81}$	$\frac{10}{9}$	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{81}{100}$

Особо следует отметить, что экспоненциальная функция возрастает и убывает очень быстро. Это рекомендуется показать для сравнения на графиках различных функций.



3-ий час. Выполняются задания, отражающие экспоненциальное возрастание и убывание функций в реальных ситуациях. Среди них задачи на определение времени радиоактивного распада вещества, химические изменения при полураспаде и образования новых изотопов, которые интересны как с научной точки зрения, так и с жизненной.

Весь мир пытается создать радиоактивное вещество, для борьбы с атомным оружием, которое ведёт к большим человеческим потерям и экологическим катастрофам. Время радиоактивного распада вещества настолько продолжительно, что влияние радиоактивного загрязнения оказывает отрицательное воздействие на окружающую среду для нескольких поколение живущих на земле людей. Примером может служить трагедия в Чернобыле.

Рассматриваются примеры из учебника. Обсуждается какая информация располагается на оси x, а какая на оси y. Каждая пара координат представляется как, например время(день) и количество вещества(грамм).

Наиболее широко в учебнике представлены следующие задачи, моделирующиеся с помощью показательной функции:

• рост населения

• нахождение сумму денег на счету в банке при помощи формулы сложного процента (интервальным (месяц, квартал) и непрерывный(год) способом)

• время радиоактивного распада вещества

• размножение бактерий

• изменение средней температуры воды

Сложный процент в зависимости от способа начисления может вычисляться по разному. Например, если процент выплачивается один раз, в конце года, то формула обычно выглядит так: $A = P(1+r)^n$. Если процент вычисляется ежеквартально или ежемесячно, то формула имеет вид: $A = P(1+\frac{r}{t})^{nt}$, здесь r процентная ставка, t период за который начисляются проценты(может быть равен 4 (квартал), 12 (месяц) и т.д.).

Урок 130,131. Учебник стр. 243-245. Преобразование графиков показательных функций. 2 часа

Содержательный стандарт

2.2.6. Знает определение показательной функции и строит её график.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

• *определяет преобразование показательных функций вида* $f(x) = l\cdot a^x$, $f(x) = l\cdot a^{x-n}$, $f(x) = l\cdot a^{x-m} + n$ *с помощью основной функции* $y = a^x$;

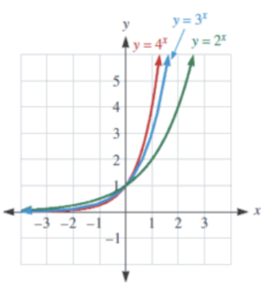
• *объясняет каждый параметр функции вида* $f(x) = l\cdot a^{x-m} + n$ *в соответствии с заданной ситуацией;*

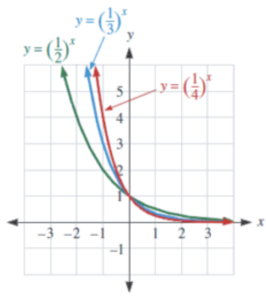
• *моделирует реальные ситуации при помощи формулы вида* $f(x) = l\cdot a^{x-m} + n$;

• *записывает формулу показательной функции по графику.*

Учащимся отводится время для выполнения заданий на рабочих листах или заданий с рабочих листов на доске.

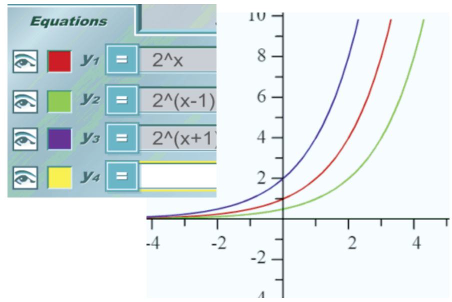
Сначала рассматривается как изменяется график основной функции из семейства показательных функций при изменении значений a.



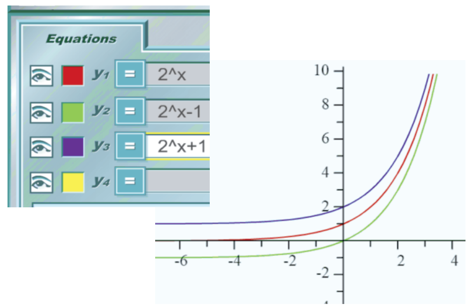


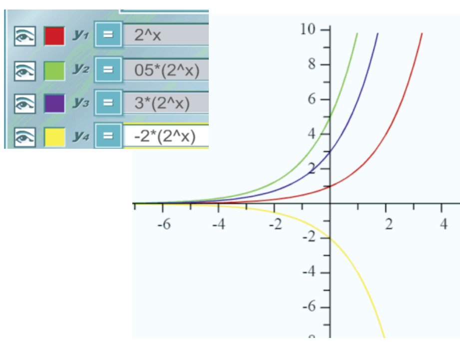
<table>
<tr><th>Функция</th><th>График</th><th>Таблица значений</th><th>Выражение преобразований словами</th></tr>
<tr><td>$y = 2^x + 1$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>$y = 2^x$</th><th>$y = 2^x + 1$</th></tr><tr><td>-1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$y = 2^x - 1$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>$y = 2^x$</th><th>$y = 2^x - 1$</th></tr><tr><td>-1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$y = 2^{x+1}$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>$y = 2^x$</th><th>$y = 2^{x+1}$</th></tr><tr><td>-1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$y = 2^{x-1}$</td><td></td><td><table><tr><th>x</th><th>$y = 2^x$</th><th>$y = 2^{x-1}$</th></tr><tr><td>-1</td><td></td><td></td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

Учащиеся изучают влияние параметра m(при прибавлении или вычитании его к значению x) на преобразование основной функции в функцию вида $y = 2^{x+1}$ и $y = 2^{x-1}$. При этом они должны понять, что смещение зависит от знака параметра. Если $m > 0$, график смещается вправо, если $m < 0$, график смещается влево.

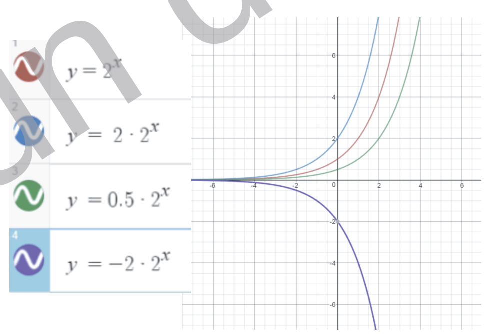


Учащиеся изучают влияние параметра n (при прибавлении или вычитании его к значению y) на преобразование основной функции в функцию вида $y = 2^x + 1$ и $y = 2^x - 1$. При этом они должны понять, что смещение зависит от знака параметра. Если $n > 0$, график смещается вверх, если $n < 0$, график смещается вниз.





Учащиеся изучают влияние параметра l на преобразование основной функции в функцию вида $f(x) = l \cdot a^x$. При этом они должны понять, что этот параметр влияет на растяжение или сжатие по вертикали, а также на отображение относительно оси x. Если $l > 1$, график растягивается по вертикали, если $0 < l < 1$, график сжимается по вертикали, если $l<0$, график отображается относительно оси x.



Рабочий лист № 1

Имя________ Фамилия_______ Дата_______

Упростите выражения при положительных значениях переменной.

$\sqrt{16a^8b^{-2}}$ $\sqrt{24x^6y^{-4}}$ $\sqrt[9]{(4x+2y)^{18}}$

$\sqrt{x^7\cdot x^{\frac{5}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}}$ $(a^{x^3})^{\frac{1}{x}}$ $(c^{\frac{5}{2}}\cdot d^{-\frac{2}{3}})(c^6\cdot d^3)^{\frac{1}{3}}$

$\left(\frac{r^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{1}{5}}}\right)^{\frac{15}{9}}$ $\frac{\sqrt{c^3d^6}}{\sqrt{4c^3d^{-4}}}$ $\frac{\sqrt{a^{-10}b^{-12}}}{\sqrt{a^{14}b^{-4}}}$

Запишите в виде степени с дробным показателем.

$\sqrt[4]{\sqrt[4]{a^3}}$ $\sqrt[5]{t}\cdot\sqrt{16t^5}$ $\sqrt{\sqrt[3]{a^3b^4}}$ $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^3}$

Упростите.

$y^{\frac{1}{2}}(y^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{1}{3}})$ $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{2}})$

$(c^{\frac{5}{6}}-c^{-\frac{6}{5}})^2$ $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$

Расположите числа в порядке восрастания:

8^{-200}; 9^{-150}; 125^{-100} $(\frac{3}{4})^{-\frac{2}{3}}$; $(\frac{16}{9})^{\frac{4}{3}}$; $(\frac{9}{16})^{\frac{1}{4}}$

Вычислите значение вражения:

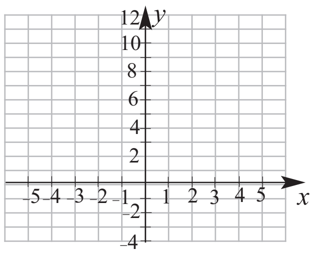
$2^{\sqrt{2}}\cdot 4^{\sqrt{2}+1}:8^{\sqrt{2}}$; $\sqrt{3^{(\sqrt{3}+1)}\cdot 9^{-\sqrt{3}}}$

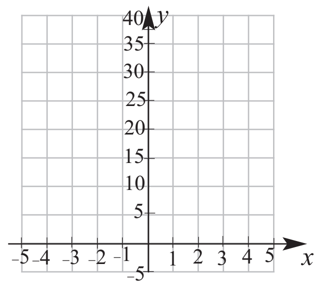
Рабочий лист № 2

Имя________ Фамилия_______ Дата_______

Постройте графики функций.

$y=1{,}5^x$ $y=3\cdot 3^x$

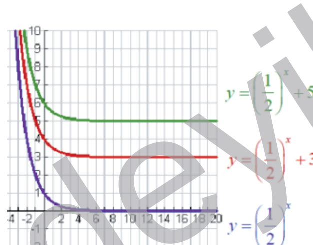




Определите экспоненциально возрастающей или убывающей являются функций, без построения графиков.

1) $y=200\cdot 4^x$ 2) $y=3{,}05(0{,}87)^x$ 3) $y=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{5}\right)^x$ 4) $y=\dfrac{1}{5}\cdot 3^x$

Для графиков на рисунке запишите асимптоты.



Запишите экспоненциальную функцию соответствующую ситуации.

а) Дерево высотой 0,2 м ежегодно вырастает на 8%. Какой высоты достигнет дерево через 10 лет?

б) Цена дома100000 манат и ежегодно увеличивается на 2%. Сколько будет стоить дом через 10 лет?

в) Цена нового автомобиля 35000 манат. Ежегодно цена автомобиля снижается на 5%. За сколько манат можно будет продать автомобиль через 5?

Урок 132. Учебник стр. 246, 247. Показательная функция. Число *e*. 1 час

Содержательный стандарт

2.2.6. Знает определение показательной функции и строит её график.

Навыки формирующиеся у учащихся

- *объясняет число е на примере формулы сложного процентного роста;*
- *строит график функции $y = e^x$ при помощи графкалькулятора*
- *решает прикладные задачи при помощи функции $y = e^x$.*

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Математический словарь:

число е

Расстраивается представленный в учебнике пример изменения денежной суммы при сложном процентном росте. После определённого этапа возникает необходимость разделить процентный рост на более маленькие интервалы по времени. Это показано в таблице ниже. Поэтому если принять сложный процентный рост как непрерывный процесс, то его можно вычислить по формуле $S = S_0e^{rt}$. Для этого можно предложить учащимся выполнить задания дома.

Формула вычисления процента *n* раз за год (месяц, квартал и т.д..д.): $S = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

Формула непрерывного процента при начислении один раз в конце года: $S = S_0e^{rt}$

Вычислим сумму которая получится через t = 10 лет, при r = 4%, если P = 1000ман. по каждому виду процентного роста.

Интервальный способ: $S = 1000\left(1+ \frac{0{,}04}{n}\right)^{10n}$

Непрерывный способ: $S = 1000e^{0{,}04\cdot 10}$

n	1	2	4	12	365	Непрерывный способ
A	3200,21	3205,09	3207,57	3209,23	3210,04	3210,06

Аналогично, вычисляются следующие суммы. Вычисления производятся при помощи клавиши *e* на инженерном калькуляторе.

а) P = 2000манат, $r = 3\%$, $t = 20$ лет б) P = 1000 манат, $r = 6\%$, $t = 30$ лет

Число е используется при изучении многих физических процессов и применяется в инженерных проектах.

Число е равно бесконечной сумме членов следующей последовательности :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n} + \ldots$$

Сумма членов последовательности, представленной ниже выражает значение числа *e* с точностью до трёх знаков после запятой.

$$e \approx 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} +$$

$$+ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} =$$

$$= 1 + 1 + 0{,}5 + 0{,}16667 + 0{,}04167 + 0{,}00833 + 0{,}00139 + 0{,}000198 = 2{,}718$$

Урок 133,134. Учебник стр. 248, 249. Логарифм числа. 2 часа

Содержательный стандарт

2.2.7. Знает и применяет определение логарифма числа и правила логарифмирования.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Математический словарь:

логарифм, основание логарифма, логарифмическая функция

- *объясняет понятие логарифма на примерах, различает общие, десятичные и натуральные логарифмы;*
- *объясняет логарифмическую шкалу на реальных ситуациях и решает задания;*
- *строит график логарифмической функции и применяет свойства;*
- *применяет свойства логарифмов при вычислениях;*
- *моделирует задачи реальной ситуации при помощи логарифмической функции.*

1-ый час. Учащимся задаются вопросы об изученных арифметических действиях- сложении-вычитании, умножении- делении, возведении в степень и извлечении из под корня. Понятие логарифма вводится нахождением показателя степени из равенства, содержащего переменную в показатели степени ($5^x = 5$, $x = 1$; $5^x = 25$, $x = 2$; $5^x = 125$, $x = 3$). Выражения $x = \log_a y$ и $y = a^x$ эквивалентны, по определению логарифма при $x > 0$ и $a > 0$, $a \neq 1$. Выполняются задания преобразования выражений из логарифмической в показательную(экспоненциальную) формы и наоборот. При выполнении первых заданий рекомендуется изображать стрелками изменение экспоненциальной и логарифмической формы записи между членами стрелками. Это поможет в течении долгого времени сохранить в памяти данное понятие.

показатель

$$5^2 = 25 \longleftrightarrow 2 = \log_5 25$$

основание

Значит, возведение основания (числа) в степень и нахождение логарифма числа по данному основанию являются обратными действиями.

Для вычисления логарифма на калькуляторе есть специальная кнопка. Логарифм впервые был использован шотландским математиком Непером и с 1600 -1990-гг логарифмы вычислялись при помощи инструмента, который назывался логарифмическая линейка. В настоящее время данный инструмент является музейным экспонатом.

Логарифмическая линейка на картинке является экспонатом музея HP www.hpmuseum.org. Несмотря на то, что в настоящее время логарифмическая линейка практически не используется, существует ряд логарифмических шкал, которые широко используются и в настоящее время.

Рабочий лист № 3

Имя________ Фамилия_______ Дата_______

1) Запишите равенства в экспоненциальной форме.

$\log_6 36=2$ $\log_{14}\frac{1}{196}=-2$ $\log_{289} 17=\frac{1}{2}$ $\log_3 81=4$

2) Запишите равенства в логарифмической форме.

$64^{\frac{1}{2}}=8$ $12^2=144$ $9^{-2}=\frac{1}{81}$ $\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{144}$

3) Запишите равенства в экспоненциальной форме.

$\log_\mu \frac{15}{16}=\nu$ $\log_\nu u=4$ $\log_{\frac{7}{4}} x=y$ $\log_2 v=\mathrm{u}$

4)Запишите равенства в логарифмической форме.

$u^{-14}=\nu$ $8^b=a$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x=y$ $6^y=x$

5) Вычислите.

$\log_6 216$ $\log_{343} 7$ $\log_3\frac{1}{243}$

$\log_4 16$ $\log_6\frac{1}{216}$ $\log_{64} 4$

6) Упростите.

$12^{\log_{12}144}$ $5^{\log_5 17}$

$5^{\log_5 7}$ $9^{\log_3 20}$

Урок 135,136. Учебник стр. 250-253. Логарифмическая функция Логарифмическая шкала и решение задач. 2 часа

Содержательный стандарт

2.2.8. Знает определение и свойства логарифмической функции и строит её график.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

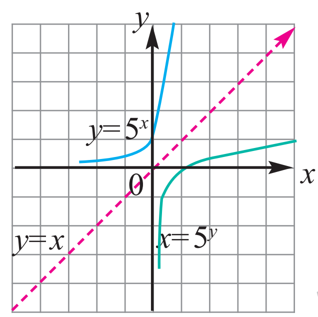
Рабочие листы

- *объясняет сложный процентный рост при помощи числа е;*
- *строит график функции* $y = e^x$ *при помощи графкалькулятора;*
- *решает задачи при помощи функции* $y = e^x$.

Построив таблицу значений и графики функций $y = a^x$ и обратной неё функции $x = a^y$, *т.е. функции* $y = \log_a x$ в одной системе координат можно увидеть, что эти функции являются взаимно обратными. Графики этих функций симметричны относительно прямой $y = x$.

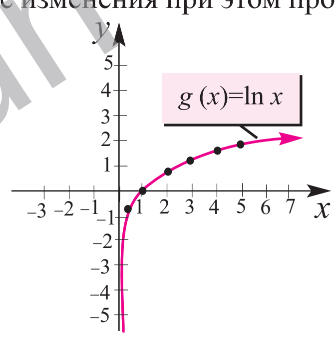
$f(x) : y = 5^x$	
x	y
–3	0,008
–2	0,04
–1	0,2
0	1
1	0
2	25
3	125

$f^{-1}(x) : x = 5^y$	
x	y
0,008	–3
0,04	–2
0,2	–1
1	0
0	1
25	2
125	3



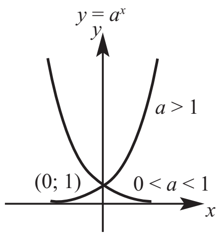
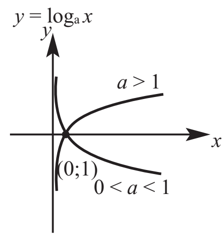
Целесообразно, выбрав удобную точку, построить график функции $y = \ln x$. Это можно легко сделать при помощи графкалькулятора. С его помощью учащиеся могут получить больше возможности проследить как члены(параметры), входящие в формулу функции влияют на преобразование графиков функций и ещё лучше смогут понять, какие изменения при этом происходят.

x	$g(x)$
	$g(x)=\ln x$
0,5	–0,7
1	0
2	0,7
3	1,1
4	1,4
5	1,6



Целесообразно для сравнения свойств двух функций составить таблицу значений.

Графики функций

Экспоненциальная функция	Логарифмическая функция
	

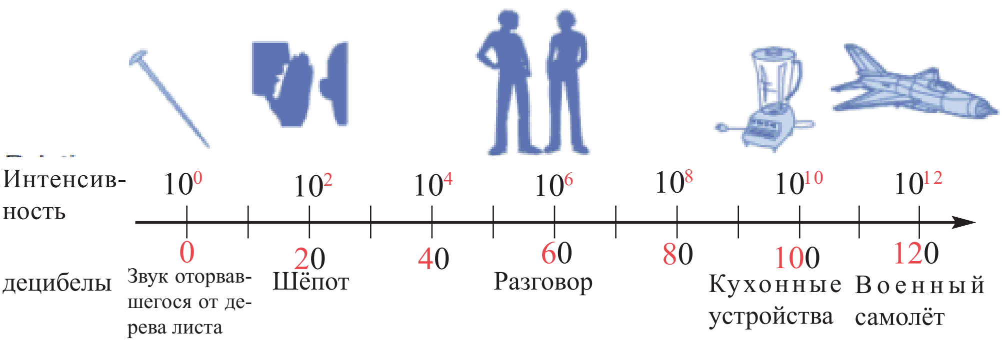
	Показательная функция	Логарифмическая функция
Пример Область определения	$f(x) = 2^x$; $f(x) = e^x$ множество всех действительных чисел	$g(x) = \log_2 x$; $g(x) = \ln x$ множество всех положительных действительных чисел
Множество значений	множество всех положительных действительных чисел при возрастании x возрастает $f(x)$ при уменьшении x $f(x)$ приближается к оси x	множество всех действительных чисел при увеличении x $g(x)$ возрастает при приближении x к нулю $g(x)$ приближается к оси y
Удобные (referens) точки	$f(x) = 2^x$ $(-1;\frac{1}{2})$; (0;1); (1;2) $f(x) = e^x$ $(-1;\frac{1}{e})$; (0;1); $(1;e)$	$g(x) = \log_2 x$ $(\frac{1}{2};-1)$; (1;0); (2;1) $g(x) = \ln x$ $(\frac{1}{e}; -1)$; (1; 0); $(e;\ 1)$

2-ый час. При помощи логарифмической функции можно смоделировать много задач реальной жизненной ситуации. Можно показать некоторые группы этих задач.

1. Определение уровня pH жидкости(воды): $pH = -\lg[H^+]$
2. Мощность звука(децибелы); $L = 10\lg\frac{İ}{İ_0}$
3. Амплитуда землетрясения: $M = \lg\frac{A}{A_0}$

При помощи логарифмов можно преобразовывать большие числа в маленькие. Это можно увидеть на примере шкалы Ph, звуковой шкалы в децибелах, шкалы Рихтера(силу землетрясения).

Ниже представлен пример шкалы изменения звука в децибелах. Как видно при изменении значения на единицу, интенсивность увеличивается в 10 раз.



? Решение некоторых заданий из учебника.

У.3. Сила землетрясения (по шкале Рихтера) вычисляется по формуле $M=\lg\frac{A}{A_0}$

а) Максимальное значение амплитуды (A) землетрясения в $10^{7,1}$ раз больше значения A_0, т.е. $\frac{A}{A_0}=10^{7,1}$. Тогда по формуле Рихтера $M=\lg\frac{A}{A_0}=\lg 10^{7,1}=7,1$. Значит сила землетрясения составила 7,1 балла.

б) Амплитуда сейсмической волны землетрясения силой 4,7 балла удовлетворяет отношению $\frac{A_1}{A_0}=10^{4,7}$, а силой 4 балла отношению $\frac{A_2}{A_0}=10^4$.

Отсюда $\frac{A_1}{A_2}=10^{4,7-4}=10^{0,7}\approx 5$

Т.е.амплитуда сейсмической волны землетрясения силой 4,7 баллов приблизительно в 5 раз больше землетрясения силой в 4 балла.

У 6. Биологи могут по размеру следа слона приблизительно определить его возраст. Для этого они используют формулу $l=45-25,7e^{-0,09a}$. Найдите возраст слона, если длина следа слона 28 см; 36 см.

Решение: решите показательные уравнения относительно переменной *a*.

1) $28=45-25,7\cdot e^{-0,09a}$
$25,7\cdot e^{-0,09a}=17$ $\qquad e^{-0,09a}=0,6615$
$-0,09a=\ln 0,6615$ $\qquad -0,09a\approx -0,413$
$a\approx 4,6$ лет

2) $36=45-25,7\cdot e^{-0,09a}$
$25,7\cdot e^{-0,09a}=9$ $\qquad e^{-0,09a}=0,350$
$-0,09a\approx -1,05$
$a\approx 11,7$ лет

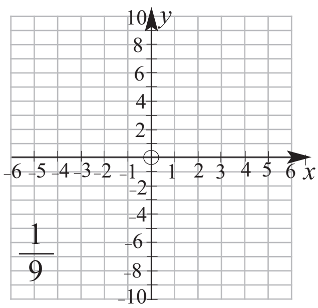
Рабочий лист № 4

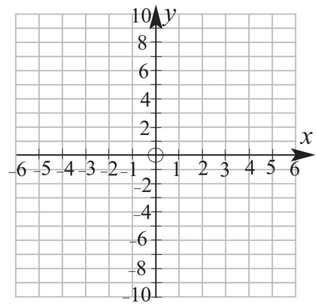
Имя________ Фамилия_______ Дата_______

1) Постройте графики функций, определив как минимум координаты трёх точек и асимптоты. Запишите область определения, множество значений и асимптоты.

$y = \log_2(x + 2)$

$y = 3(\frac{1}{2})^x + 2)$





Область определения: _______________ Область определения: _______________

Множество значений: _____________ Множество значений: _____________

Асимптота (ты): _____________ Асимптота (ты): _____________

2) Запишите формулу функции вида $y = l{\cdot}a^x$, проходящей через точки (1;1) и $(3; \frac{1}{9})$. Запишите функцию в логарифмическом виде.

Рабочий лист № 5

Имя________ Фамилия_______ Дата_______

Решите задание зная, что мощность звука вычисляется в децибелах по формуле:

$$L = 10\lg \frac{I}{I_0}$$

Пример. а) Если при движении автомобиля интенсивность звука равна 10^{-4} ватт/м^2 , то сколько децибелы составляет мощность звука?
б) Мощность звука самолёта 150 dB. Найдите интенсивность звука.

Решение: а) Вычислим мощность звука автомобиля.
$I_1 = 10^{-4}$ ватт/м^2 и $I_0 = 10^{-12}$ ватт/м^2 $I_1 / I_0 = 10^{-4}/10^{-12} = 10^8$; $I_1/I_0 = 10^8$

$$M = 10\ \lg 10^8 = 10 \cdot 8 = 80\ dB$$

б) Найдём интенсивность звука автомобиля.
Так как $150 = 10 \cdot \lg(I_2/I_0)$, то $\lg(I_2/I_0) = 15$ или $I_2/I_0 = 10^{15}$,
$I_2 = 10^{15} \cdot 10^{-2} = 10^{13}$ ватт/м^2

а) Интенсивность звука молотка равна $3{,}2 \times 10^{-3}$ ватт/м^2 . Найдите мощность звука. Выразите интенсивность звука (I) в 120 dB через величину I_0.
б) Найдите мощность звука гитары (в децибелах) на концерте, если интенсивность звука равна 10^{-3} ватт/м^2 .

д) Во сколько раз интенсивность звука усилителя с мощностью 60 dB больше интенсивности звука усилителя с мощностью 40 dB?

е) Найдите интенсивность звука интенсивность которого в 45 раз меньше мощности звука в 80 dB.

Урок 137-138.Учебник стр. 254-257. Свойства логарифмов. 2 часа

Содержательный стандарт

2.2.7. Знает и применяет определение логарифма числа и правила логарифмирования

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *знает и применяет свойства произведения, частного и степени логарифмов;*
- *упрощает выражения используя формулу перехода к новому основанию и свойства логарифмов.*

Свойства логарифмов эффективнее изучать в сравнении со свойствами степени.

1.	**Логарифм произведения**	$\log_c xy = \log_c x + \log_c y$	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2.	**Логарифм частного**	$\log_c \dfrac{x}{y} = \log_c x - \log_c y$	$a^x : a^y = a^{x-y}$
3.	**Логарифм степени**	$\log_c x^y = y \cdot \log_c x$	$(a^x)^y = a^{xy}$

! При упрощении выражения $\dfrac{\log_2 27}{\log_2 9}$ учащиеся могут записав $\log_2(27:9)$ получить $\log_2 3$ или просто 3. Конечно учащиеся интуитивно могут найти значение $\log_2 8$, но только не до конца понимая смысл понятия логарифма, может совершить ошибку как показано первом примере.

Рабочие листы могут быть использованы для формативного оценивания навыков умения применять свойства логарифмов.

Урок 139-141. Учебник стр. 258-264. Показательные уравнения. Логарифмические уравнения. 3 часа.

Содержательный стандарт

2.2.8. Знает определение и свойства логарифмической функции и строит её график.

2.3.2.Решает показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *решает показательные уравнения различными методами;*
- *решает логарифмические уравнения различными методами*

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся ошибки применения свойств логарифмической и показательной функций при решении уравнений.

Задача. Формула $P = 10\cdot(2)^{\frac{t}{60}}$ показывает увеличение количества зайцев. По этой формуле их количество увеличивается каждые 60 дней в 2 раза. Через сколько дней их количество станет равным 320? Ниже представлено одно верное, а другое не верное решение задачи.

Не верное решение

$$320=10(2)^{\frac{t}{60}}$$

$$\lg 320=\frac{t}{60}\lg 20$$

$$60\lg 320= t\lg 20$$

$$t=\frac{60\lg 320}{\lg 20} \qquad t\approx 115{,}53$$

Верное решение

$$P=10(2)^{\frac{t}{60}}$$

$$320=10(2)^{\frac{t}{60}}$$

$$320=2^{\frac{t}{60}}$$

$$2^5=2^{\frac{t}{60}}$$

$$5=\frac{t}{60} \qquad t=300$$

Как видно, учащиеся разделили обе части уравнения на 10 и привели к основанию 2. Создавая такие ситуации и объясняя их можно заранее предотвратить возникновение ошибок при решении.

Рассмотрим еще одну довольно часто встречающуюся ошибку..

При решении уравнения $10^x = 50$ учащиеся могут умножив обе части на 5 записать, что $2^{5x} = 2^{25}$. Это является ошибкой и необходимо заранее объявить этот момент.

Для того, чтобы определить на каком уровне учащиеся поняли свойства показательной и логарифмической функции при оценивании можно использовать следующие задания. По результатам выполнения которых можно выбрать аналогичные задания из учебника и предложить их для повторного выполнения. Эти задания могут быть записаны на доске, или показаны при помощи проектора, или представлены на рабочих листах.

$10^x=50 \qquad 10\cdot 5^x=250$

$3^x=\frac{1}{9} \qquad x^{\frac{2}{3}}=9 \qquad 9^{x+1}=27^x$

$\log_5 25=x \qquad \log_5 x=4 \qquad 4^{x^2+4x}=2^{-6}$

? Решение некоторых заданий из учебника.

У.4 b) $2^{x+4}+2^{x+2}=5^{x+1}+3\cdot 5^{x+2}$

Решение: вынесем с обоих сторон общий множитель за скобку

$2^{x+2}\cdot(2^2+1)=5^x\cdot(5+3)$. Получим уравнение $5\cdot 2^{x+2}=5^x\cdot 8$.

Каждую из двух сторон разделим на $5\cdot 8=40$, получим уравнение $2^{x-1}=5^{x-1}$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=1 \text{ или } \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^0$$

отсюда $x=1$

У.5 а) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$

Решение: разделим обе части уравнения на 9^x. Получим уравнение:

$3 \cdot (\frac{4}{9})^x + 2 = 5 \cdot (\frac{6}{9})^x$ или $3 \cdot (\frac{2}{3})^{2x} + 2 = 5 \cdot (\frac{2}{3})^x$. Выполним замену: $(\frac{2}{3})^x = t$

Получим уравнение $3t^2 - 5t + 2 = 0$.

$t_1 = 1$, $t_2 = \frac{2}{3}$. - корни уравнения.

Выполним замену $(\frac{2}{3})^x = 1$, $x = 0$

$(\frac{2}{3})^x = \frac{2}{3}$, $x = 1$

т.е. корни уравнения равны $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

У.6 а) $125^x = 5 \cdot 5^3 \cdot 5^5 \cdot .....5^{17}$

Решение: применим к уравнению свойства степени

получим уравнение $5^{3x} = 5^{1+3+5+......17}$.

Степени с правой стороны равны сумме нечётных чисел от 1 до 17.

$1+3+5+......17 = (\frac{1+17}{2}) \cdot 9 = 81$

Получим уравнение $5^{3x} = 5^{81}$.

Отсюда $3x = 81$, $x = 27$

У.9. Зависимость температуры от времени при остывании некоторого вещества задаётся формулой Ньютона $T = (T_O - T_r)e^{-rt} + T_r$. Здесь

T - температура в расстраиваемый момент времени,

T_O - температура в начальный момент времени,

T_r - температура окружающей среды,

r - скорость остывания,

t - время.

Температура воды в комнате с температурой 22°C изменилась с 80°C до 60°C за 10 минут.

а) Найдите коэффициент r.

б) Через сколько минут температура станет равной 35°C ?

Решение:

а) По условию задачи $T_O = 80°C$, $T_r = 22°C$, $T = 60°C$, $t = 10$ мин.

Подставим данные в формулу. Получим,

$60 = (80 - 22)e^{-10} + 22$

Отсюда $58e^{-10r} = 38$, $e^{-10r} = \frac{38}{58}$, $-10r \approx ln\frac{38}{58}$, $-10r = -0{,}42$, $r = 0{,}042$

б) Зная, что $r \approx 0{,}042$ запишем формулу в виде $T = (T_O - T_r)\, e^{0{,}042t} + T_r$ и найдём через сколько минут температура станет равной 35°C :

$35 = (80 - 22) \cdot e^{-0{,}042t} + 22$

$58 \cdot e^{-0{,}042t} = 13$, $e^{-0{,}042t} = \frac{13}{58}$, $-0{,}042t = \ln\frac{13}{58}$

$-0{,}042t \approx -1{,}495$ $t \approx 35{,}4$ минут.

У.2 з) $\log_3(1+\log_3(2^x-7)=1$

Решение: выполним следующие действия и применим определение логарифма.

$3+\log_3(2^x-7)=3$

$\log_3(2^x-7)=2$

$2^x-7=3^2$

$2^x=16,\ 2^x=2^4,\ x=4$

У.5 а) $x^{\log_2^{x-2}}=8$

Решение: прологарифмируем обе части уравнения по основанию 2:

$$\log_2 x^{\log_2 x}=\log_2 8$$

Отсюда получим уравнение $(\log_2 x-2)\cdot\log_2 x=3$. В последнем уравнении выполнив замену $\log_2 x=t$ получим квадратное уравнение $t^2-2t-3=0$ Отсюда находим $t_1=-1$, $t_2=3$.

Выполним обратную замену $\log_2 x=-1$ и $\log_2 x=3$, получим $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=8$.

Задача. при извержении вулкана в углях сгоревших деревьев осталось 45% вещества Углерод 14. Сколько лет назад произошло извержение вулкана?

Время полураспада изотопа Карбон 14 составляет 5730 лет. Количество оставшегося изотопа через t лет находится по формуле $A(t)=A_0(\frac{1}{2})^{t/5700}$.

По условию задачи в углях оставалось 45% Углерода 14,т.е. $A(t)=0{,}45A_0$

Из этих двух уравнений можно написать $A_0(\frac{1}{2})^{t/5730}=0{,}45A_0$ равенство.

$$\frac{1}{2}^{t/5730}=0{,}45 \qquad \frac{t}{5730}\lg\frac{1}{2}=\lg 0{,}45$$

$$\lg\frac{1}{2}^{t/5730}=\lg 0{,}45 \qquad t=5730\,\frac{\lg 0{,}45}{\lg 0{,}5}$$

Задача. Температура воды в чашке изменилась со 100°C до 20°C (средняя температура). Каждые 5 минут температура изменялась на 25% в экспоненциальной зависимости.

а) Смоделируйте зависимость температуры от времени в виде $y=ab^x+c$.

б) Через сколько минут температура достигнет среднего значения?

Решение: уменьшение температуры на 25% означает, что она составит $\frac{3}{4}$. Значит, в уравнении $y=ab^x+c$, $b=\frac{3}{4}$. Член x выражает время и, если за каждые 5 минут оно уменьшается на 25%, то $x=\frac{t}{5}$. Обозначим температуру через T, тогда зависимость температуры от времени будет T(t). По условию вода должна остыть до средней температуры, т.е. с = 20

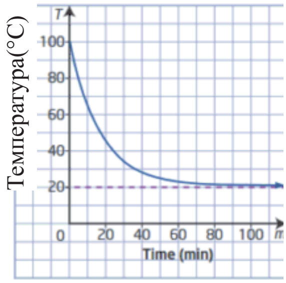
Запишем формулу функции $T(t) = a\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{5}} + 20$.

Если начальная температура воды $t = 0$, то $T = 100°$ и это точка является точкой пересечения с осью y.

Запишем эти значения в уравнение и найдём a.

$100 = a\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{0}{5}} + 20$; $100 = a + 20$; $a = 80$

Тогда формула будет иметь вид $T(t) = 80\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{5}} + 20$.



У.18. а) Из останков костей слона исчезло 36% Углерода 14. Сколько лет тому назад жил слон?

Решение: если количество Углерода 14 в останках обозначим через m_0 то, по условию оно составляет 64%-i, т.е. $0{,}64m_0$.

Из формулы $m = m_o\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ имеем $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} = 0{,}64$ (здесь T = 5730)

Отсюда $\frac{t}{5730} = \log_{\frac{1}{2}} 0{,}64$ $t \approx 3689$ лет назад.

У.20. Решение: данные задачи используем в формуле $N = N_o(1+2)^t$:

$173 \cdot 10^6 = 151 \cdot 10^6 \cdot (1 + r)^{10}$

отсюда $(1 + r)^{10} = \frac{173}{151}$

$1 + r = 1{,}0137$ $r = 0{,}0137$

В формуле $N = N_o(1 + 0{,}0137)^t$ запишем $N_o = 173 \cdot 10^6$.

Тогда записав вместо $N = 220 \cdot 10^6$ найдём через сколько лет численность составит 220 млн. $1{,}0137^t = 1{,}272$.

Через $t = \frac{\ln 1{,}272}{\ln 1{,}0137} \approx 17{,}7$ лет

Урок 142-145. Учебник стр. 265-271. Показательные неравенства. Логарифмические неравенства.Обобщающие задания. 4 часа

Содержательный стандарт

2.2.8. Знает определение и свойства логарифмической функции и строит её график.

2.3.2.Решает показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Навыки формирующиеся у учащихся

- *решает логарифмические уравнения и неравенства;*
- *решает задачи при помощи логарифмических уравнений и неравенств.*

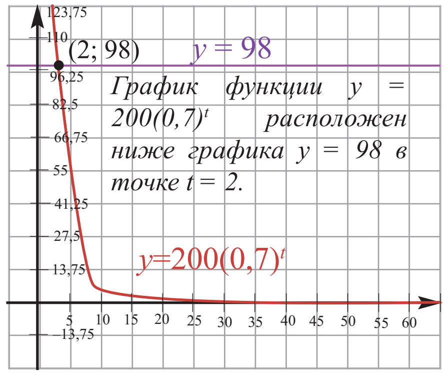
Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Неравенства. Надо обратить внимание, что показательные и логарифмические неравенства решаются с применением свойств соответствующих функций. Задачи, которые решаются при помощи логарифмических уравнений и неравенств решаются с объяснением.

Можно рассмотреть следующие задания

Задача. Лекарство, которое дают больному содержит кальций, скорость поглощения которого меняется по формуле $A(t) = 200(0,7)^t$. Врач рекомендует больному не принимать пищу до тех пор, пока уровень кальция в крови больше 98 мг. Через какое наименьшее количество часов больной может выпить молоко?



Если больной может решать экспоненциальные неравенства, то он может определить это сам.

$A(t) = 200(0,7)^t$ должно быть меньше 98.

Решим неравенство и найдём это время

$200(0,7)^t \leq 98$

$(0,7)^t \leq 0,49 \quad t > \log_{0,7} 0,49$

Рекомендуется и неравенство, и уравнение решить графически. Графическое решение можно выполнить при помощи графкалькулятора дома.

По графику найдём решение неравенства $200(0,7)^t \leq 98$, найдя точки пересечения графиков $y = 200(0,7)^t$ и $y = 98$.

У.4. Найдите область определения функции.

б) $y = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} - \left(\frac{9}{25}\right)^{x}}$

Решение: квадратный корень имеет смысл, при $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} - \left(\frac{9}{25}\right)^{x} \geq 0$

Отсюда найдём возможные значения x.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} \geq \left(\frac{9}{25}\right)^{x} \text{ или } \left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}$$

Решим последнее неравенство

Так как функция $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}$ убывающая, то $x + 2 \leq 2x$.

Тогда $x \geq 2$. Таким образом, областью определения данной функции является промежуток $[2 : +\infty)$.

У.7. j) $|1 - \log_3 x^2| < 3$

Решение: данное неравенство сводится к решению двойного неравенства ($x \neq 0$)

$$-4 < -\log_3 x^2 < 2$$
$$4 > \log_3 x^2 > -2$$
$$4 > 2\log_3 |x| > -2$$
$$2 > \log_3 |x| > -1$$
$$9 > |x| > \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} < |x| < 9$$

Ответ: $\left(-9 ; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3} ; 9\right)$.

Рабочий лист № 6

Имя________ Фамилия_______ Дата_______

Напишите в раскрытой форме.

$\log_{13}(8\cdot 5^4\cdot 9^3)$ $\log_7 \frac{8}{9^3}$ $\log_8 \frac{7^6}{3}$

$\log_7(d\cdot h\cdot n)$ $\log_6(b^2\cdot z^3)$ $\log_{11}(u\cdot q\cdot b)^{\frac{1}{3}}$

Запишите в виде $\log_a N$.

$3\log_{12}r+\log_{12}z$ $\log_4 z+\log_4 n$ $3\log_{15}n - 3\log_{15}x$

Найдите значение выражения.

Например: $\log_2 8+\log_3 9$

$$\log_2 8+\log_3 9 = \log_2 2^3+\log_3 3^2$$
$$= 3 \log_2 2+2\log_3 3^2$$
$$= 3 \log_2 2+2\log_3 3$$
$$= 3\cdot 1+2\cdot 1=5$$

$$\log_a b^c = c\cdot\log_a b$$
$$\log_a a = 1$$

$2\log_5 25-\log_4 16$	
Ответ:	

$\log_9(\frac{1}{3})\cdot\log_7 49$	
Ответ:	

$\frac{\log_3 27}{2\log_2 4}$	
Ответ:	

$\log_6 36+5\log_9 81$	
Ответ:	

$\frac{1}{2}\log_2 16-\log_4 64$	
Ответ:	

$\log_5 125\cdot\log_2 32$	
Ответ:	

$\frac{2\log_4 16}{\log_7 49}$	
Ответ:	

$\frac{1}{3}\log_3 27+\log_8 64$	
Ответ:	

Рабочий лист № 7

Имя________ Фамилия_______ Дата_______

1) Решите показательные уравнения.

$5^x=625$

$4^x=64$

$2^{x+1}=\frac{1}{8}$

$9^x=3$

$8^x=2$

$3^{2x-1}=27$

$3^x=7$

$5^x=30$

$4^{x+1}=12$

$3^{2x}=5$

$7^{3x+1}=50$

$6^{x-3}=21$

$5^{3x-1}=15$

$8^{2x+1}=20$

$4^x=15^{x+1}$

$5^x=2^{x+2}$

$2^{x+1}=3^{x-1}$

$3^{2x+1}=5^{x+1}$

2) Решите показательные неравенства.

$4^{x+3}<8^x$

$8^{2x-1}\leq 16^x$

$(\frac{1}{4})^{x+3} > \frac{1}{64}$

$(\frac{1}{9})^{2x-3} \leq (\frac{1}{27})^x$

Рабочий лист № 8

Имя________ Фамилия_______ Дата_______

1) Решите логарифмические уравнения

$\log_2(16+2b)=\log_2(b^2-4b)$

$\ln(n^2+12)=\ln(-9n-2)$

$\log_3 x+\log_3 8=2$

$\lg x-\lg 2=1$

$\lg 2+\lg x=1$

$\log_2 x+\log_2 7=\log_2 37$

$\log_8 2+\log_8 4x^2=1$

$\log_9(x+6)-\log_9 x=\log_9 2$

$\log_6(x+1)-\log_6 x=\log_6 29$

$\log_5 6+\log_5 2x^2=\log_5 48$

$\ln 2-\ln(3x+2)=1$

$\ln(3x-1)-\ln 7=2$

2) Решите логарифмические неравенства.

$\log_3(5x-1)> \log_3 7$

$\log_{0,1}(2x+3)\geq \log_{0,1}5$

$\log_2(x^2-x)< 1$

$\log_2(x-1)+ \log_2 3 > 3$

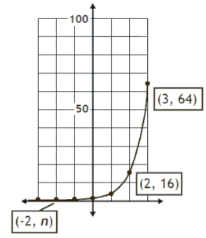
Показательная и логарифмическая функции

Таблица критериев суммативного оценивания

№	Критерии	Примечание
1	Строит график показательной функции и представляет её свойства.	
2	Преобразовывает выражения, содержащие показательные функции применяя свойства степени.	
3	Выполняет соответствующие преобразования показательных функций.	
4	При помощи показательной функции моделирует различные ситуации (радиоактивный распад, численность населения,количество денег и т.д.).	
5	Понимает сущность логарифма как математического действия.	
6	Решает задачи при помощи логарифмической шкалы.	
7	Строит график логарифмической функции.	
8	Применяет свойства логарифмов.	
9	Решает показательные уравнения.	
10	Решает логарифмические уравнения.	
11	Решает показательные неравенства.	
12	Решает задачи при помощи логарифмических уравнений и неравенств.	

Урок 146. **Задания для суммативного оценивания**

1) Составьте и запишите формулу, соответствующую графику функции. Найдите значение n.



2) Запишите область определения и множество значений для функции $y = 2^x + 3$.

3) Точка $(-1; \frac{5}{2})$ расположена на графике функции $y = l \cdot 5^x$. Найдите значение l.

4) Какие две функции являются одинаковыми?

$y = 16(4)^x$ и $y = 2^{2x+4}$ $\qquad$ $y = \frac{27}{64}\left(\frac{3}{4}\right)^{-x}$ и $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{x}$ $\qquad$ $y = 25(5)^{-x}$ и $y = 5^{x+2}$

5) Решите уравнения.

$2^{x+1} + 0{,}5^{x-2} = 9$ $\qquad$ $4^{2x} - 3 \cdot 4^x + 2 = 0$

6) Решите уравнения.

$4^{3x} = 12$ $\qquad$ $6^{x+2} = 18$

$5^{4x-2} = 120$ $\qquad$ $2{,}4^{x+4} = 30$

7) Вычислите.

$\log_2 16$ $\qquad$ $\log_4 \frac{1}{32}$ $\qquad$ $\log_{1/4} \frac{1}{2}$

8) Решите уравнения.

$\log_5 4 + \log_5 2x = \log_5 24$ $\qquad$ $3 \log_4 6 - \log_4 8 = \log_4 x$

9) Решите неравенства.

$7^{3x-1} \geq 21$ $\qquad$ $6{,}5^{2x} \geq 200$ $\qquad$ $\log_3(2x-5) \leq 2$

10) Вычислите концентрацию водорода по формуле $pH = -\lg(H^+)$, если при проведении химических лабораторных исследований, уровень кислотности составил $pH = 4{,}1$. При вычислениях используйте калькулятор.

11) Формула $y = ae^{-0{,}00012t}$ помогает определить по количеству Углерода 14 в останках животных, сколько лет тому назад оно погибло. Здесь a количество изотопа Углерода 14 в останках, t - количество лет останков, y - количество оставшегося в останках изотопа Углерод 14 через t лет и его можно вычислить по формуле $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$. Период полураспада Углерода 14 равен T = 5730. Определите возраст останков, при потери 95% изотопа Углерода 14.

10.Комплексные числа

Таблица планирования

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учебник стр.
1.1.1. Знаком с понятием комплексного числа. 1.1.2. Представляет комплексное число в алгебраической и тригонометрической форме. 1.2.1. Выполняет арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме. 1.2.2. Находит любую степень и корень любой степени комплексного числа.	147-149	Комплексные числа. Действия над комплексными числами.	3	273-276
	150	Геометрическое представление комплексного числа.	1	277
	151	Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.	1	278-279
	152	Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.	1	280- 281
	153-154	Корень *n*-ой степени комплексного числа. Обобщающие задания.	2	282-284
	155	Комплексные числа. Задания для суммативного оценивания.	1	
	Всего		9	

Урок 147-149. Учебник стр. 273-276. Комплексные числа. Действия над комплексными числами. 3 часа

Содержательный стандарт

1.1.1. Знаком с понятием комплексного числа.
1.1.2. Представляет комплексное число в алгебраической и тригонометрической форме.
1.2.1. Выполняет арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Математический словарь: комплексные числа, действительные числа, мнимые числа

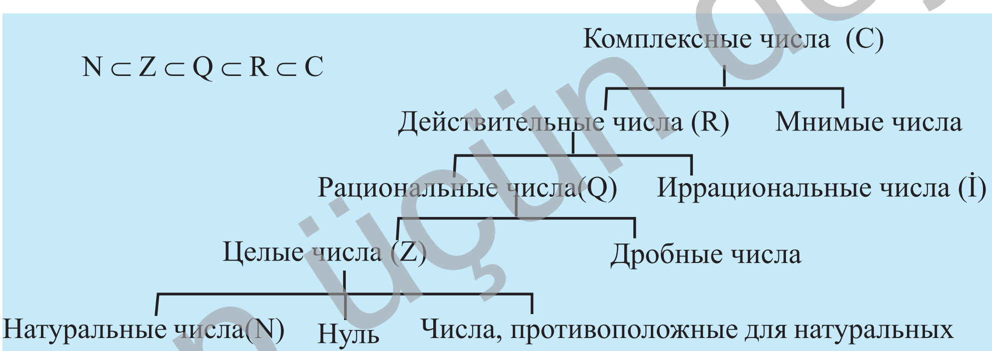
Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *объясняет понятие комплексного числа на примерах;*
- *выполняет действия над комплексными числами;*
- *применяет свойства вычислительных действий над комплексными числами .*

Проводится беседа об исторической информации “Это интересно” , представленной в учебнике. Представляется информация о том с какими трудностями и спорами появлялась каждая система математических понятий в науке. Например, великий Пифагор продолжительное время утверждал, что не существует действительного числа, квадрат которого равен 2, т.е., что уравнение $x^2 = 2$ не имеет действительных корней. Для принятия такого решения нужны были числа, отличные от рациональных, т.е. существование новых, иррациональных чисел, которые являются корнями уравнения $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$. Споры начались в 570-275-гг, т.е. в те года, когда жил Пифагор, и продолжались до XIX века. И даже введение иррациональных чисел не создало системы чисел, которые являются решением любого уравнения. Споры велись вокруг вопроса о том, каким числом выражается корень уравнения “$x^2 = -1$.

На рисунке ниже представлена схема связи множества комплексных чисел с другими множествами. Учащимся рекомендуется перечертить схему в тетрадь.



Рекомендуется собрать информацию и создать презентацию о математиках имена которых связаны с понятием комплексного числа. Представление презентаций можно организовать в классе или на уровне школы.

Числа $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-23}$, которые многие считали бессмысленными, Декарт назвал мнимыми. Позже свой вклад для того, чтобы комплексные числа нашли своё место в математической науке, внесли Эйлер и Гаусс.
До сведения учащихся доводится, что комплексное число в алгебраической форме записывается в виде $a+ib$, где a и b действительные числа, i - мнимая единица. Однако отмечается, что i не равна 1. Часть учащиеся принимают i за 1. Отмечается также, что действия над комплексными числами идентичны свойствам арифметических операций. Учащиеся озвучивают эти свойства и записывают в тетради примеры для действительных чисел. Эти же свойства они применяют и для комплексных чисел. Тождества и действия над комплексными числами записываются в общем виде.
1. Тождество: $a + bi = c + di$ возможно тогда и только тогда, если $a = c$ и $b = d$.
2. Сложение комплексных чисел: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3. Умножение комплексных чисел: $(a + bi)(c + \mathrm{d}i) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Урок 150-151. Учебник стр. 277-279. Геометрическое представление комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма комплексного числа.2 часа

Содержательный стандарт
1.1.1. Знаком с понятием комплексного числа.
1.1.2. Представляет комплексное число в алгебраической и тригонометрической форме.
1.2.1. Выполняет арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

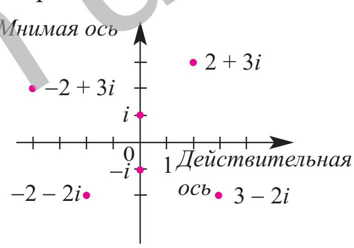
Математический словарь: комплексные числа, действительные числа, мнимые числа

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *представляет комплексное число, как точку на комплексной плоскости и объясняет его понятие на примерах ;*
- *представляет на примерах абсолютное значение и аргумент комплексного числа.*

Каждому комплексному числу $z = a + bi$ на плоскости соответствует точка с координатами $(a;b)$. Координатная плоскость, на которой представляются комплексные числа называется комплексной плоскостью.



Здесь y называется ***мнимой осью***, x ***действительной осью.*** Абсолютное значение комплексного числа или модуль, является расстоянием от начала координат до точки с координатами $(a;b)$.

Правильное и ясное восприятие этих понятий поможет в дальнейшем осознать более сложные понятия-тригонометрическая форма комплексного числа, нахождение корня n-ой степени. Поэтому необходимо держать под особым контролем каждого учащегося.

Урок 152. Учебник стр. 280, 281. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. 1 час

Содержательный стандарт

1.1.2. Представляет комплексное число в алгебраической и тригонометрической форме.

1.2.1. Выполняет арифметические действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Математический словарь: комплексные числа, действительные числа, мнимые числа

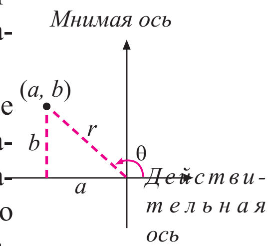
Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

- *представляет комплексные числа в тригонометрической форме;*
- *выполняет действия над комплексными числами в тригонометрической форме.*

Выполняются задания для комплексных выражений комплексного числа и действий над комплексными числами, заданных в алгебраической форме.



Особое внимание уделяется заданиям, где комплексное число, заданное в тригонометрической форме надо преобразовывать в алгебраическую форму и наоборот. Полезно записать примеры на большом листе бумаги и прикрепить его к доске, для того, чтобы он находился перед глазами учащихся.

Запишите число $z = -2-2\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме.

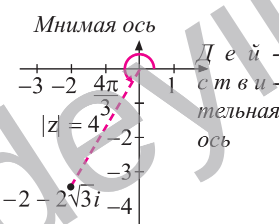
$r = |-2-2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$

θ` referens угол

$\operatorname{tg}\theta` = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$

$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ $z = -2-2\sqrt{3}i$ расположено в III четверти

угол θ $\theta = \pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$



Для комплексного числа $z = -2-2\sqrt{3}i$ тригонометрической формой является

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 4\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

Аналогичным образом надо привести пример преобразования комплексного числа из тригонометрической формы в алгебраическую(стандартную)форму.

Выполняются задания требующие изображения комплексного числа, заданного в тригонометрической форме на комплексной плоскости, а также арифметических действий над ними.

Урок 153,154. Учебник стр. 282-284 . Корень *n*-ой степени комплексного числа. Обобщающие задания. 2 часа

Содержательный стандарт

1.2.2. Находит любую степень и корень любой степени комплексного числа.

Математический словарь: *n-ая* степень, корень *n-ой* степени

Навыки формирующиеся у учащихся

- *определяет корня n-ой степени комплексного числа.*

Дополнительные ресурсы

Рабочие листы

Понятие комплексного числа можно задать для корня *n*-ой степени.

Учащиеся находят корни уравнения $x^6 - 1 = 0$

$$x^6 - 1 = 0$$

$$(x^3 - 1)(x^3 + 1) = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x = \pm 1, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \quad \text{и} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}.$$

Найденные корни являются корнями 6-ой степени числа 1.

Для комплексного числа $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ существует *n* корней *n-ой* степени. *Для* $k = 0,1,2,..., n-1$, как показано ниже.

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right),$$

Например, как показано ниже для числа 64 существует 6 корней 6-ой степени.

$$\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0}{6} + i\sin\frac{0}{6}\right) = 2$$

$$\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+2\pi}{6} + i\sin\frac{0+2\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+4\pi}{6} + i\sin\frac{0+4\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+6\pi}{6} + i\sin\frac{0+6\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -2$$

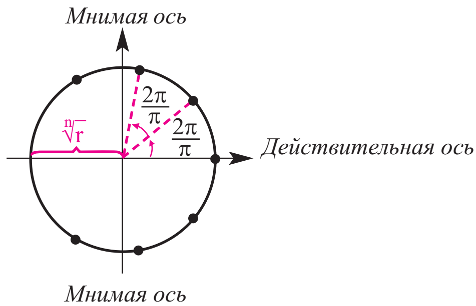
$$\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+8\pi}{6} + i\sin\frac{0+8\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$$

$$\sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{0+10\pi}{6} + i\sin\frac{0+10\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

Корень *n*-ой степени для комплексного числа широко используется при решении рациональных уравнений. Иногда задётся вопрос:”Где комплексные числа используются в реальной жизни?”. -Моделирование многих физические и химические процессов, инженерных и технических проектов требует решения рациональных уравнений. Выполняя эти работы на компьютере решается много рациональных уравнений. При этом находятся и действительны и комплексные числа, которые являются корнями уравнения.

Корень *n-ой* степени комплексного числа может быть ясно представлен геометрически.

Для комплексного числа z все модули корней *n-ой* ступни равны $\sqrt[n]{r}$ и все они расположены на окружности радиуса $\sqrt{r}$,центр которой находится в начале координат. Аргумент корня *n-ой* степени равен $2\pi/n$ расположен вдоль окружности на одинаковых расстояниях. Это изображение представлено на рисунке.



Покажем для числа 1 все корни 6-ой степени
Запишем 1 в тригонометрической форме.
$1 = 1\ (\cos 0 + i\sin 0)$
При $n = 6,\ r = 1$ получаем формулу:

$$\sqrt[6]{1}\ \cos\left(\frac{0+2\pi k}{6} + i\sin\frac{0+2\pi k}{6}\right) = \cos\frac{\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi k}{3}$$

Найдём последовательно значения при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$\cos 0 + i\sin 0 = 1$$

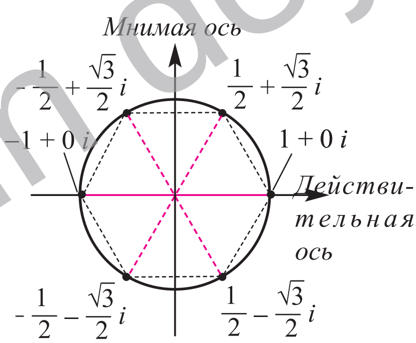
$$\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\pi + i\sin\pi = -1$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



Геометрически на окружности располагается 6 равных друг другу точек.

Рабочий лист № 1

Имя _____ Фамилия _______ Дата_________

1) Комплексное число, заданное в алгебраической форме представьте в тригонометрической форме.

а) $5 + 5i$

б) $-2\,(1 - \sqrt{3i}\,)$

в) $7i$

2) Комплексное число, заданное в тригонометрической форме представьте в алгебраической форме.

а) $3\cos(150°) + 3\sin(150°)i$

б) $9\cos\frac{3\pi}{2} + 9\sin\frac{3\pi}{2}\,i$

3) Выполните действия.

а) $[3\,(\cos\frac{4\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\,i)\,][\frac{1}{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\,i)\,]$

б) $\dfrac{32(\cos 150° + \sin 150° i)}{24(\cos 20° + \sin 20° i)}$

4) Представьте комплексное число в алгебраической форме.

$3(\cos 120° + i\sin 120°)$

$5(\cos 135° + i\sin 135°)$

$\frac{3}{2}(\cos 300° + i\sin 300°)$

$\frac{1}{4}(\cos 225° + i\sin 225°)$

$3{,}75\,(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$

Комплексные числа

Таблица критериев оценивания

N	Критерии	Примечание
1	Представляет комплексное число в алгебраической форме.	
2	Выполняет действия над комплексными числами.	
3	Представляет комплексное число на комплексной плоскости.	
4	Выражает комплексное число в тригонометрической форме.	
5	Преобразовывает комплексное число из тригонометрической формы в алгебраическую и наоборот.	
6	Находит корень *n*-ой степени комплексных единиц.	
7	Находит корень *n*-ой степени комплексного числа.	

Урок 155. Комплексные числа
Задания для суммативного оценивания

1) Выполните действия. Результат представьте в виде $a + bi$.

а) $(3 + 4i) + (5 - 6i)$ б) $(3 - 2i)(2 + 3i)$ в) $\dfrac{-4i}{7 - 2i}$

2) Найдите модуль комплексного числа.

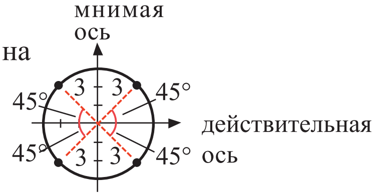
1. $-7i$
2. $-4 + 4i$
3. -7
4. $5 - 12i$

3) Представьте комплексные числа в тригонометрической форме.

4) Представьте числа в тригонометрической форме.

а) $-3 - i$ б) $1 + \sqrt{3}i$

5) Корни каких комплексных чисел изображены на рисунке?



6) Найдите произведение комплексных чисел z_1 и z_2 .

$$z_1=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \qquad z_2=8\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

7) Найдите отношение комплексных чисел z_1 и z_2 .

$$z_1=24(\cos300^\circ+i\sin300^\circ) \qquad z_2=8(\cos75^\circ+i\sin75)$$

8) Изобразите числа на комплексной плоскости.

1) $-8i$ 2) $4i$
3) $-7+4i$ 4) $5-i$

9) Вместо x и у запишите такие действительные числа, чтобы неравенства стали верными.

$2x+3yi=6-3i$ $\qquad 2-5i=-x+10yi$
$4x-2yi=4+8i$ $\qquad 4+7i=6x-14yi$

10) Изобразите комплексное число на комплексной плоскости и запишите его в алгебраической форме.

а) $5(\cos120^\circ+i\sin120^\circ)$ б) $2(\cos330^\circ+i\sin330^\circ)$

11. Прогнозирование информации

Таблица планирования

Содержательный стандарт	Урок №	Тема	Кол-во часов	Учеб-ник стр.
5.1.1. Различает ошибки (результаты) систематических и случайных измерений. 5.2.1. Вычисляет вероятность события при помощи схемы Бернулли.	156-160	Совокупность и выборка. Случайная выборка и её виды. Представление информации.	5	286-296
	161-162	Разложение бинома.	2	297-300
	163-165	Испытания Бернулли Биномиальное распределение. Обобщающие задания.	3	301-306
	166	Прогнозирование информации.Задания для суммативного оценивания.	1	
	167-172	Обобщающие задания. Задания для суммативного оценивания за год.	6	
	Всего		17	

Урок 156-160. Учебник стр. 286-296. Совокупность и выборка. Случайная выборка и её виды.Представление информации 5 часов

Содержательный стандарт

5.1.1. Различает ошибки (результаты) систематических и случайных измерений.

Математический словарь: совокупность, выборка, случайная выборка, дискретная информация,непрерывная информация.

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы

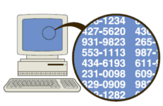
Рабочие листы

- *определяет выборку для совокупности;*
- *применяет информацию о выборке к совокупности;*
- *объясняет виды выборок на примерах.*

С учащимися проводится беседа о важности статистики и вероятности в современном периоде. Статистика наука, в которой изучается информация и и эта область науки охватывает сбор, анализ, систематизацию и результат полученной информации. В результате полученных на основе статистических исследований показатели широко используются в различных областях, в частности в медицине, фармацевтике, генетике и т.д., государственной политике, финансах. В последнее время на основе статистических исследований даются различные экологические прогнозы, например по поводу глобального потепления. Если статистика может по выборке давать прогноз для совокупности, то вероятность может делать прогноз для выборки из совокупности.

По совокупности можно дать информацию о виде выборки.Учащиеся на примерах представляют различные техники выборки.

- Простая случайная выборка
- Систематическая случайная выборка
- Кластерная случайная выборка
- Разноуровневая случайная выборка

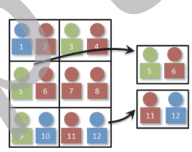


Простая случайная выборка
Выбор каждого элемента имеет равный шанс.

Компьютер случайным образом выбирает номер телефона, которому достанется выигрыш.

Систематическая случайная выборка
Выбирается каждый *k*-ый элемент.

Разноуровневая выборка
Совокупность разбивается как минимум на 2 части, в каждой из которой проводится выборка.



Кластерная выборка
Случайный выбор из определённого группы элементов

Удобная выборка
Выбор из родственных элементов.
В классе у детей спрашивают с кем бы они хотели работать в группе?

Информацию можно разделить на два типа: по количеству и по категориям. Здесь надо отметить интересный факт. В каждом из двух случаев информация выражается числом. Для исследуемого объекта информация делится на две группы. Например, исследование по поводу того, какого цвета автомобиль покупают больше всего является категориальной информацией, а ответ на вопрос "Какой урожай собран с яблони за 5 лет?" является количественной информацией.
Для того, чтобы учащиеся осознали понятия совокупность и выборка надо создавать различные ситуации. Выборка является верной в том случае, если она охватывает характеристики примеров и качество совокупности.
Например, сколько человек с каждого класса надо выбрать, если при разноуровневой выборке из 180 учащихся 8-х классов и 120 учащихся 10 -х классов надо выбрать 20? Общее количество учащихся 300. Из 8-х классов надо выбрать $(180/300)\times 20 = 12$ учащихся, из 10-х $(120/300)\times 20 = 8$ учащихся.
Рассмотрим на примерах разницу между кластерной и разноуровневой выборкой. Кластерная выборка: некоторое исследование проводится только среди учащихся старших классов. Каждый их них имеет равный шанс при выборке. Разноуровневая выборка: выборка производится среди всех учащихся школы. В каждом классе учащиеся имеют равный шанс для выбора. Учащимся предлагается показать неверный выбор в различных ситуациях:

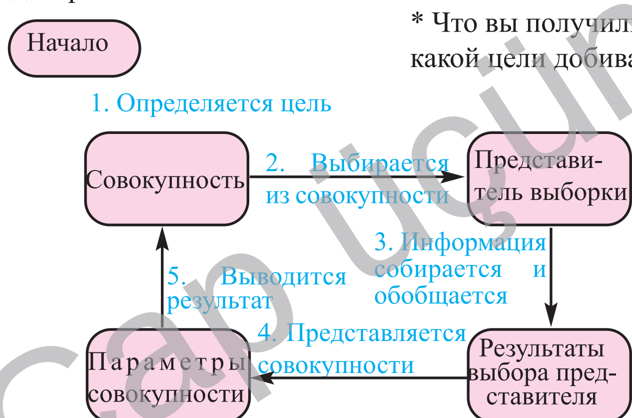
1. Верно ли что из кожи животных можно шить одежду?
2. Правда ли, что экзотических животных можно содержать как домашних?

Ответ на первый вопрос было бы неверно искать среди покупателей магазина одежды из кожи и тех кто уже носит одежду из кожи.

Постановка вопроса также влияет на результат.

Обсуждаются формы представления информации.
* Таблица частот
* Барграф
* Гистограмма
* Диаграмма рассеивания
Небольшая база данных
* диаграмма "ствол-листья"

При сборе информации особое внимание надо уделять следующим моментам:
* Кто занимается сбором информации
* Какая совокупность исследуется
* Определение представителя выборки
* Какой вопрос исследуется
* Применение результатов выборки к совокупности
* Что вы получили в результате исследования, какой цели добивались?



Урок 161-162. Учебник стр. 297-300. Разложение бинома. 2 часа

Содержательный стандарт

5.2.1. Вычисляет вероятность события при помощи схемы Бернулли.

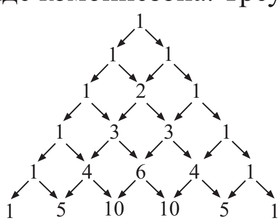
Математический словарь: бином, степень бинома, разложение бинома, треугольник Паскаля

Навыки формирующиеся у учащихся

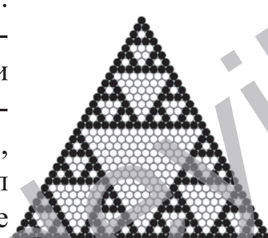
Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *на примерах представляет закономерность степени бинома при разложении;*
- *выражает при помощи комбинезона члены в биномиальном разложении ;*
- *связывает коэффициенты членов биномиального разложения с треугольником Паскаля.*

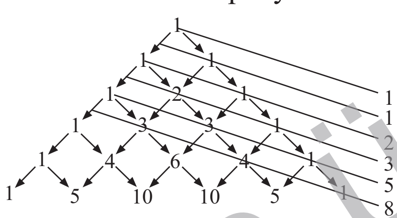
Объясняется закономерность разложения бинома. Учащимся предлагается самостоятельно провести несколько разложений. Надо постараться, чтобы каждый учащийся понял, что коэффициенты разложения могут быть записаны в виде комбинезона. Треугольник Паскаля обладает интересными свойствами.



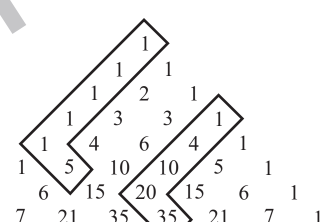
РУчащиеся могут выполнить исследование самостоятельно как маленький проект и подготовить презентацию . В треугольнике Паскаля **числа расположены симметрично.** . Числа слева и справа, расположенные по прямой линии от вершины(1) одинаковы. Числа треугольника Паскаля, расположенные параллельно боковой стороне 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Т.е. по количеству этих чисел можно из любых предметов создать равнобедренные треугольники. Если в треугольнику Паскаля нечётные числа изобразить чёрным кружочком, а чётные белым, то получится картинка, как показано на рисунке. У этого изображения также есть интересное свойство.



Например, все номера кружочков чёрного ряда 0 ,1, 3, 7, 15, 31, ... на 1 меньше целой степени 2. В треугольнике Паскаля также спрятаны числа Фибоначчи. Если двигаясь по прямой в любой момент времени повернуть на 90° , то число которое вы встретите равно сумме двух чисел на прямой.



1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . .



Особое внимание учащиеся уделяют умению связывать биномиальные элементы с количеством возможных событий. Например, для группы из 7 человек ставится условие, что как минимум 3 из них девочки. Как минимум 3 означает, что 4, 5, 6, 7 девочек также удовлетворяет условию. Значит, для решения этого задания надо найти сумму соответствующих членов бинома $(q + o)^7$.

$$(q + o)^7 = q^7 + 7q^6 o + 21q^5 o^2 + 35q^4 o^3 + 35q^3 o^4 + 21q^2o^5 + 7qo^6 + o^7$$

Коэффициенты членов $q^4 o^3, q^3 o^4, q^2o^5, qo^6, o^7$ показывают возможные варианты, т.е. 3 мальчика 4 девочки 35, 3 девочки 4 мальчика 35 вариантов, 2 девочки 5 мальчиков 21 вариант, 1 девочка 6 мальчиков 7 вариантов, 7 мальчиков 1 вариант. Количество возможных вариантов равно их сумме 35+35+21+7+1=99.

Урок 163-165. Учебник стр. 301-306. Испытания Бернулли. Биномиальное распределение. Обобщающие задания 3 часа

Содержательный стандарт

5.2.1. Вычисляет вероятность события при помощи схемы Бернулли.

Математический словарь: бином, степень бинома, биномиальное разложение, треугольник Паскаля

Навыки формирующиеся у учащихся

Дополнительные ресурсы
Рабочие листы

- *представляет основные условия испытания Бернулли;*
- *представляет на примерах испытания Бернулли;*
- *создаёт связь между испытаниями Бернулли и коэффициентами в разложении бинома .*

Биномиальное распределение или испытания Бернулли верны только при следующих условиях:.

- Каждое испытание имеет только два результата.
- Количество испытаний известно.
- Испытания независимы.
- Каждое испытание равновероятно.

Придумываются различные ситуации которые имеют только два результата. Например, в мешке есть шары двух цветов. Здесь можно дать прогноз по схеме Бернулли. Если в мешке будут шары трёх цветов, то схема Бернулли здесь не работает. Однако, если условие строится на том, что выйдет или не выйдет один цвет, то схема Бернулли снова работает. То есть для схемы Бернулли есть успешный или неудачный результат.

При решении задач биномиального разложения, как и испытаний Бернулли, возникает необходимость вычислять комбинезоны. Исследование целесообразно проводить при решении нижеследующих примеров, отмечая свойства комбинезонов.

Пример.. Докажите, что ${}_{n}C_{r} + {}_{n}C_{r-1} = {}_{n+1}C_{r}$.
Решение:

Упростим левую часть. ${}_{n}C_{r} + {}_{n+1}C_{r-1} =$

$$= \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r+1)!} =$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot r\cdot(n-r)!} + \frac{n!}{(n-r+1)\cdot(r-1)!\cdot(n-r)!} =$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}\cdot\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{(n-r+1)}\right] =$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}\cdot\left[\frac{n-r+1+r}{r\cdot(n-r+1)}\right] =$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\cdot(n-r)!}\cdot\left[\frac{n+1}{r(n-r+1)}\right] =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{r\cdot(r-1)!\cdot(n-r)!(n-r+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\cdot(n-r+1)!} =$$

$$= {}_{n+1}C_{r}$$

$${}_{n}C_{r} + {}_{n}C_{r-1} = {}_{n+1}C_{r}$$

Прогнозирование информации
Критерии суммативного оценивания

N	Критерии	Примечание
1	Определяет технику выборки для совокупности.	
2	Выбирает график соответствующей формы для представления информации.	
3	Записывает разложения степени бинома.	
4	Находит биномиальные коэффициенты.	
5	Решает задачи на вероятность при помощи схемы Бернулли.	

Урок 166. Прогнозирование информации
Задания для суммативного оценивания

1) По диаграмме “ствол-листья” ответьте на вопросы:
а) максимальное значение
б)минимальное значение
в) сколько информации имеет значение как минимум 60?
г) сколько информации имеет значение менее 55?

3	8 9
4	0 3 6 7 7 8
5	1 3 4 5 5 6 7 9 9
6	2 2 5 6 7 7 8 8 9
7	0 0 1 2 4 5 6 8
8	
9	1

7| 0 → 70

2) Покажите совокупность и выборку.
a) Для участия в конференции были выбраны 20 учащихся.
b) На сцену пригласили 5 зрителей выбранных случайным образом.
c) Сделан звонок по 5 адресам из телефонной книги.
d) На странице отмечены 5 слов, содержащих букву “а”.

3) Группа студентов университета по проведённому исследованию представило результат, что 38% студентов в стране занимаются спортом. Это исследование они провели среди 500 студентов университета, где они обучаются, выбранных случайным образом. Они считают, что получили верный результат. Как считаете вы? Обоснуйте своё мнение. Запишите совокупность и выборку для этого исследования.

4) Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 8, и 9 ?

a) 100 b) 60 c) 48 d) 125

6) Запишите четвертый член в разложении бинома $(2x^2 + 3y)^4$.

7) Найдите n.

а) ${}_nP_3 = 120$ б) ${}_nC_2 = 4 \cdot {}_nC_1$

8) Монету подбросили 5 раз. Найдите вероятность события P(как минимум 4 раза на сторону с гербом) .

9) Гамид в каждом из 10 тестов может выбрать один из 4-х вариантов. Найдите вероятность того, что Гамид случайным образом ответит верно на 6 тестов.

10) Вероятность выигрыша баскетбольной команды равна $\frac{2}{3}$. Найдите вероятность того, что команда победит в 3 играх их следующих 5.

11) Запишите разложение бинома $(a + 1)^6$.

12) В следующей таблице представлен результат опроса “Какие прохладительные напитки более употребляемы?” .

	Кола	Лимонад	Фруктовый сок
21 <	40	25	20
21 – < 40	30	35	30
40-dan >	20	30	25

а) Найдите вероятность, что выбранный случайным образом человек предпочитает сок и его возраст более 40 лет.

б) Найдите вероятность того, что случайным образом выбранный человек предпочитает колу или лимонад, и его возраст менее 40 лет.

Урок 167-171. Обобщающие задания. 5 часов.

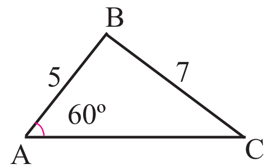
Урок 172. Задания для суммативного оценивания за год

1) Для функций $f(x) = 2x - 1$ и $g(x) = x^2 + 2$ запишите формулу сложной функции а) $f(g(x))$ б) $g(f(x))$

2) Из точки M к плоскости проведена наклонная, которая составляет с плоскостью угол 30°. Найдите длину наклонной, если дина проекции наклонной на плоскость равна 2 см.

3) На единичной окружности покажите углы поворота, удовлетворяющие равенству $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

4) Найдите неизвестные углы и стороны треугольника.



5) Расстояние от точки M в пространстве до всех вершин прямоугольника ABCD нравно 26 см. Стороны прямоугольника равны 12 см и 16 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости прямоугольника.

6) Постройте график функции $y = 3\sin 2x$ по 5-ти основным точкам.

7) Запишите функцию косинуса амплитуда которой равна 4, а период π.

8) Плоскость, проходящая через прямой угол прямоугольного треугольника параллельна гипотенузе. Проекции катетов на плоскость равны $\sqrt{8}$ см и $\sqrt{15}$ см. Найдите проекцию гипотенузы на плоскость, если расстояние от плоскости до гипотенузы равно 1 см.

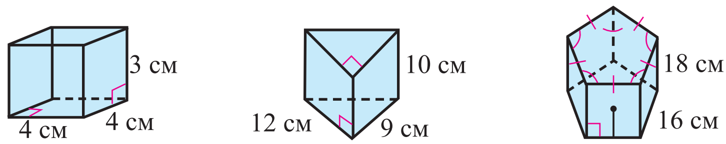
9) Зная, что $\sin\alpha = 0{,}6$, $90º < \alpha < 180º$, найдите значение выражения $\sin 2\alpha$.

10) Найдите значение выражения: $\sin(2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{3})$

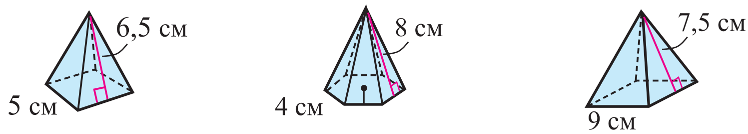
11) Запишите углы поворота, конечные стороны которых совпадают со следующими углами в заданном промежутке.

а) $50°$, $90° \le \theta < 720°$ б) $\frac{2\pi}{3}$, $-2\pi \le \theta < 2\pi$

12) Найдите площади полных поверхностей и объёмы прямых призм.



13) Найдите площадь боковой поверхности и объёмы правильных пирамид.



14) Расположит точки (0; 1), (1; 3), (2; 9) на координатной плоскости и запишите формулу соответствующей функции вида $y = a^x$, график которой проходит через ети точки.

15) Врач наблюдает размножение клеток. Для наблюдения он выбрал 5 клеток и установил, что количество клеток увеличивается в следующей последовательности. Первые 5 клеток

через 1 час -10

через 2 часа - 20

через 3 часа - 40

Запишите формулу размножения клеток в виде $N(t) = l \cdot a^t$.

16) Вычислите.

а) $\log_2(1 + \log_3 27)$ б) $\ln e^{-2}$ в) $\log_5 125$ г) $\log_3 9^4$

17) Примените свойства логарифмов.

а) $\lg(10x^3y)$ b) $\log_8(64x^2)$

18) Решите логарифмические уравнения.

а) $\frac{1}{2}\log_6 25 + \log_6 x = \log_6 20$ b) $\log_2 4 - \log_2(x + 3) = \log_2 8$

c) $\log_{0,5}(x + 3) \geq \log_2 0,5$

19) Мощность звука(в децибелах) можно рассчитать по формуле $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$. Здесь I интенсивность звука (ватт/м^2), I_0 наименьшая интенсивность звука воспринимаемая человеческим ухом (принято считать 10^{-12} ватт/м^2). Мощность каждого усилителя звука 10^{-5} ватт/м^2. На сколько децибел мощность от двух усилителей больше, чем от одного?

20) Представьте комплексное число в геометрической форме.

а) $-5 + 4i$ б) $4 - 3i$

21) Запишите комплексное число в тригонометрической форме.

а) $-3 + 3i$ б) $6i$

22) Определите тип выборки. Случайным образом из 496 учащихся, обучающихся в начальных классах выбрали 49, из 348 учащихся, обучающихся в средней школе выбрали 34 и из 480 учеников старших классов выбрали 48.
а) простая b) разноуровневая c) кластерная d) систематическая

23) Выразите через комбинезон члены строки треугольника Паскаля.
а) 1 5 10 10 5 1

24) Монету подбрасывают 5 раз. Найдите вероятность, что монета упадёт лицом на герб 3 раза.

25)Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что цель будет поражена 2 раза, если стрелок сделал пять выстрелов.

26) Решите уравнения и неравенства:
а) $3^{x+2}-2\cdot 3^{x+1}=9$ b) $9^{2x-1}=27^x$ c) $0{,}4^{x-3} \le 0{,}16^x$

27) Сколько корней имеет уравнение $2\sin^2 x - \sin x = 0$ на отрезке $[0;2\pi]$?

28) Найдите n и запишите разложение бинома $(x+3)^n$, если сумма коэффициентов биномиального разложения равна 16.

Ümumtəhsil məktəblərinin 10-cu sinfi üçün
Riyaziyyat fənni üzrə dərsliyin
METODİK VƏSAİTİ
(Rus dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov

İxtisas redaktoru: **İbrahim Məhərov**
fizika-riyaziyyat elmləri üzrə fəlsəfə doktoru

Tərcüməçi **Viktoriya Abdullayeva**

Kompüter tərtibatı: **Mustafa Qəhrəmanov**
Bədii tərtibatı: **Leyla Bəşirova**
Korrektoru: **Tərlan Qəhrəmanova**

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin qrif nömrəsi: 2017-091

Kağız formatı: $70\times100\ ^1/_{16}$.
Fiziki çap vərəqi 15,0.
Səhifə sayı 240.
Tiraj: 430. Pulsuz.

Radius nəşriyyatı
Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53