



ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР
АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Çap için değil

Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов

МАТЕМАТИКА 8

Учебник по предмету “Математика” для
8 класса общеобразовательных школ

Замечания и предложения, связанные с этим изданием,
просим отправлять на электронные адреса:
radius_n@hotmail.com и derslik@edu.gov.az.
Заранее благодарим за сотрудничество!



Радиус
Баку-2017

Оглавление

Раздел I

1.1. Рациональные выражения

Рациональные выражения	7
Эквивалентные рациональные выражения	9
Упрощение рациональных выражений ...	10
Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений.....	14
Сложение и вычитание рациональных выражений	17
Действия над рациональными выражениями	23
Степень с целым показателем	25
Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график	29
Обобщающие задания	32

1.2. Четырёхугольники

Четырёхугольники.....	34
Внутренние и внешние углы четырёхугольников.....	35
Параллелограмм	37
Прямоугольник	40
Ромб	41
Трапеция.....	44
Средняя линия треугольника	45
Средняя линия трапеции	46
Координаты середины отрезка.....	48
Обобщающие задания	49

Раздел II

2.1. Иррациональные числа

Функция $y = x^2$ и её график	52
Квадратный корень. Арифметический корень.....	53
Иррациональные числа	56
Функция $y = \sqrt{x}$ и её график.....	59
Приближённое значение квадратного корня.	60
Решение задач. Иррациональные числа.....	61
Квадратный корень произведения и отношения	62
Квадратный корень степени.....	64
Преобразование выражений содержащих квадратный корень	65
Обобщающие задания	69

2.2. Теорема Пифагора

Теорема Пифагора.....	71
Применение теоремы Пифагора	74
Обобщающие задания.....	79

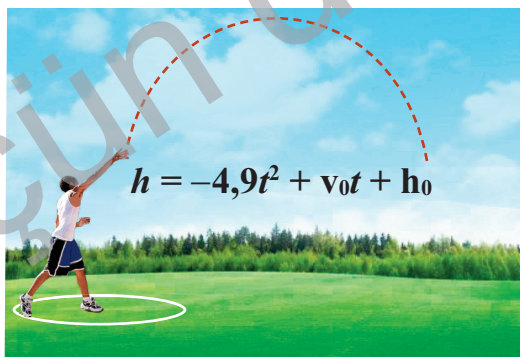
Раздел III

3.1. Квадратные уравнения

Квадратные уравнения	81
Неполные квадратные уравнения.....	82
Решение квадратных уравнений методом разложения на множители	84
Решение квадратных уравнений методом выделений полного квадрата ...	89
Графическое решение квадратных уравнений.....	91
Формула корней квадратного уравнения.....	93
Теорема Виета	97
Уравнения, приводящие к квадратным уравнениям	100
Решение задач с помощью квадратных уравнений.....	101
Обобщающие задания	103

3.2. Площади фигур

Площадь параллелограмма	105
Площадь треугольника	107
Площадь трапеции	110
Площадь ромба.....	113
Обобщающие задания.....	115



Раздел IV

4.1. Рациональные уравнения

Рациональные уравнения	118
Решение задач с помощью рациональных уравнений	120
Обобщающие задания	123

4.2. Подобие фигур

Преобразование фигур. Поворот.	125
Пропорция, отношения	129
Масштаб	131
Пропорциональные отрезки	132
Подобные четырёхугольники, подобные треугольники	134
Признаки подобия треугольников	136
Признаки подобия прямоугольных треугольников	140
Применение подобия треугольников	143
Задачи на построение	147
Свойство медиан	148
Преобразование подобия, гомотетия	149
Площади подобных фигур	151
Обобщающие задания	153



Раздел V

5.1. Неравенства

Неравенства	156
Свойства неравенств	159
Сложение и умножение неравенств	164
Числовые промежутки	166
Решение линейных неравенств с одной переменной	168
Решение двойных неравенств	172
Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля	175
Обобщающие задания	177

5.2. Тригонометрические соотношения

Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения	179
Применения тригонометрических отношений при решении задач	182
Тригонометрические тождества	186
Уравнение прямой, проходящей через две точки	187
Обобщающие задания	190

5.3. Сбор и представление информации

Действия над множествами	192
Сбор информации	193
Сбор и представление информации	195
Точечная диаграмма	199
Обобщающие задания	201
Меры центральных тенденций и наибольшая разность	202
Вычисление вероятностей	204
Число возможных событий	206
Зависимые и независимые события	207
Обобщающие задания	210
Обобщающие задания по разделам	212
Проверь себя	217
Ответы	219

1.1. Рациональные выражения

1.2. Четырехугольники

В этом разделе вы научитесь:

- упрощать рациональные выражения;
- выполнять действия над рациональными выражениями;
- решать задачи, которые требуют составления рациональных выражений;
- классифицировать четырехугольники;
- проводить классификацию параллелограммов;
- исследовать общие и различные свойства параллелограммов;
- решать задачи, применяя свойства четырехугольника.

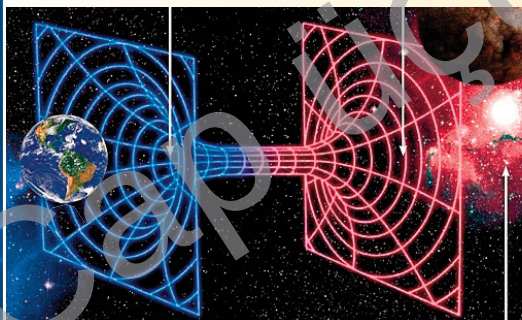
Рациональные выражения широко используются для решения проблем в различных областях, таких как экономика, медицина, транспорт, космические исследования, энергетика, акустика и т.д.

Знания о четырехугольниках, наряду с применением в повседневной жизни, широко применяются в строительстве, в дизайне, при производстве мебели и т.д.

Это интересно!

Бельгиец Марсель Толковский в 21 год придумал точную математическую модель для огранки бриллиантов. В ней он определил такие пропорции, при которых камень был прозрачен, имел идеальную круглую форму и при этом свет, входящий в бриллиант, отражался максимально.

Благодаря математической модели Марселя Толковского процесс огранки бриллиантов был автоматизирован. На сегодняшний день Бельгия является ведущей страной по обработке бриллиантов.

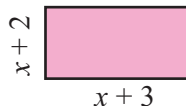


Рациональные выражения

Исследование. Опишите общие и различные свойства выражений.

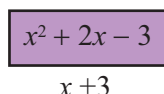
1) Площадь прямоугольника со сторонами $(x + 2)$ и $(x + 3)$:

$$S = (x + 2) \cdot (x + 3) = x^2 + 5x + 6$$



2) Ширина прямоугольника с площадью $x^2 + 2x - 3$ и длиной $(x + 3)$:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$$



Рациональные выражения

Сумма, разность и произведение многочленов, также является многочленом. Отношение многочленов не всегда является многочленом. Например, отношение многочлена $(x^4 - 4)$ к $(x^2 + 2)$ является многочленом, т.к. существует такой многочлен, произведение которого с многочленом $(x^2 + 2)$ равно $(x^4 - 4)$:
 $(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 4$.

Однако отношение многочленов $(x^4 + 4)$ и $(x^2 + 2)$ не является многочленом, т.к. нет такого многочлена, произведение которого с $(x^2 + 2)$ равно $(x^4 + 4)$.

Отношение двух многочленов называется рациональным выражением.

Например: $\frac{a}{3-b}, \frac{a+b}{b+c}, \frac{2y^3+y^2-1}{4y^2}, \frac{3}{x-5}$

Любой многочлен можно представить в виде дроби со знаменателем 1. Например, $3x^2 + x + 4 = \frac{3x^2 + x + 4}{1}$. Таким образом, многочлен также является рациональным выражением. Сумма, разность, произведение и отношение рациональных выражений также являются рациональными выражениями, то есть их можно преобразовать в дробь, у которой числитель и знаменатель-некоторые многочлены (в частном случае одночлены).

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называются областью допустимых значений переменных (ОДЗ).

Многочлен имеет смысл при всех значениях переменной (то есть, при любом значении переменной можно найти соответствующее значение выражения). Однако, рациональное выражение может не иметь смысла при некоторых значениях переменной.

Например, выражение $\frac{x+3}{x-1}$ не имеет смысла при $x = 1$, так как при $x = 1$ знаменатель превращается в нуль.

На нуль делить нельзя! Поэтому, если знаменатель дроби содержит одну или несколько переменных, то они не могут принимать значения, которые обращают знаменатель в нуль.

Пример: найдём возможные значения переменного в рациональном выражении $\frac{3}{x(x-1)}$

Чтобы найти при каких значениях x , знаменатель дроби обращается в нуль, надо решить уравнение $x(x-1) = 0$. Данное уравнение имеет два корня: 0 и 1. Значит допустимыми значениями являются любые числа, кроме 0 и 1. Для рациональной дроби $\frac{3}{x(x-1)}$ ОДЗ записывается как $x \neq 0$ и $x \neq 1$.

Рациональные выражения

Обучающие задания

- 1**» Запишите выражения в виде дроби (при помощи дробной черты).
- а) $(x^2 + 7) : (x - 2)$ б) $(2x + 5) : (x + 1)$ в) $(5x^2 - 1) : (2x - 3)$
- 2**» Из следующих выражений выберите многочлены и запишите их в тетрадь.
- а) $2x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - 7$ б) $\frac{2}{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}x + 5$ в) $3x^2 - \frac{1}{4}x + 2$
- 3**» Лятиф утверждает, что выражение $\frac{x+6}{3}$ не является рациональным выражением, а выражение $\frac{3}{x+6}$ является. А как думаете вы? Для каждого выражения запишите ОДЗ.
- 4**» Какое численное значение не может принимать переменная в выражениях?
- а) $(x + 3) : x$ б) $(x + 5) : (x - 3)$
в) $(a + 5) : (a - 1)$ д) $(x^2 + 2x + 5) : (2x + 1)$
- 5**» Какое численное значение не может принимать переменная?
- а) $\frac{2x+1}{x-2}$ б) $\frac{3x^2-3}{x}$ в) $\frac{a^2+1}{a-1}$ д) $\frac{c^3+8}{c+2}$
- 6**» Найдите значение дроби $\frac{y-3}{y}$ при $y = 3; 1; -1$.
- 7**» При каком значении переменной значение дроби $\frac{x-2}{x-1}$ равно:
- а) 2; б) 0; в) -1; д) 0,5?
- 8**» Запишите такие рациональные выражения, которые не имеют смысла при: а) 1; б) -2.
- 9**» Поезд за t часов прошёл s километров. Выразите среднюю скорость v (км/ч) через s и t и найдите значение скорости v при:
- а) $t = 4; s = 180$ б) $t = 1,5; s = 120$
- 10**» На путь по течению реки моторная лодка затратила 3 часа. Найдите сколько времени t (часов) потребуется лодке на обратный путь, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде v (км/ч).
Найдите t при: а) $v = 14$ км/ч б) $v = 10$ км/ч
- 11**» Автомобиль Мусы на каждые 12 км на магистральной дороге и на каждые 8 км в городе расходует 1 литр бензина. Муса за день израсходовал, a литров бензина на магистральной дороге и b литров бензина в городе. Запишите выражение, которое показывает, сколько в среднем километров можно проехать, используя 1 литр бензина.
- 12**» У Сулеймана в аквариуме есть золотые рыбки. Он поместил в аквариум ещё 5 дискуссов. Запишите выражение, которое показывает, какую часть дискуссы составляют от всех рыб. Если Сулейман купит ещё 4 неоновые рыбки и поместит их в аквариум, то какую часть будут составлять дискуссы от всех рыб?



Эквивалентные рациональные выражения

Тождественно равные (эквивалентные выражения)

Два выражения называются тождественно равными или эквивалентными, если они имеют одинаковые значения при всех допустимых значениях переменных. Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число отличное от нуля, т.е. при $b \neq 0$ и $c \neq 0$ справедливо следующее равенство $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, а это значит, что данная дробь умножается на дробь $\frac{c}{c}$, т.е. на 1. Аналогичное свойство верно и для рациональных выражений. При умножении или делении числителя и знаменателя рационального выражения на одно и то же отличное от нуля выражение, получается дробь, эквивалентная данному выражению при всех допустимых значениях переменной.

Пример: Покажем эквивалентность дробей $\frac{2}{x}$ и $\frac{2x+2}{x^2+x}$.

1. Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{2}{x}$ на выражение $(x+1)$ (здесь $x \neq -1$).

Получим $\frac{2}{x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2x+2}{x^2+x}$, где $x \neq 0$ и $x \neq -1$.

2. Разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{2x+2}{x^2+x}$ на выражение $(x+1)$ (здесь $x \neq -1$).

Получим $\frac{2x+2}{x^2+x} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{2}{x}$, где $x \neq 0$ и $x \neq -1$.

Внимание! При определении возможных значений переменных *эквивалентных выражений* надо учитывать существование каждой из дробей в левых и правых частях равенства.

Обучающие задания

1 В закрашенные квадраты впишите такие числа или выражения, чтобы выражения были попарно эквивалентны.

a) $\frac{3}{5}$, $\blacksquare$ c) $\frac{2}{5}$, $\frac{\blacksquare}{35x}$

b) $\frac{4}{\blacksquare}$, $\frac{20}{35}$ d) $\frac{x+2}{x-3}$, $\frac{4x+8}{\blacksquare}$

2 Проверьте эквивалентность пар заданных выражений. Объясните, как одна из дробей была преобразована в другую. Укажите ОДЗ.

a) $\frac{10x}{15x^2}$, $\frac{2}{3x}$

c) $\frac{2x}{x^2-x}$, $\frac{2}{x-1}$

b) $\frac{24ax}{18a^2}$, $\frac{4x}{3a}$

d) $\frac{2(x+1)}{x^2-1}$, $\frac{2}{x-1}$

3 Для следующих дробей запишите по три эквивалентные дроби, умножив или разделив числитель и знаменатель на одно и то же выражение. Укажите ОДЗ.

a) $\frac{4xy}{6x^2}$

b) $\frac{12x^2y}{18xy}$

c) $\frac{2x}{x^2+x}$

d) $\frac{2x-4}{8x}$

4 Зохра утверждает, что равенство $\frac{2x}{x^2-2x} = \frac{2}{x-2}$ верно при всех значениях, кроме $x = 2$. Что вы думаете по этому поводу?

5 Для одного и того же рационального выражения можно записать несколько эквивалентных выражений. Например, выражение $\frac{2x}{3}$, эквивалентно как выражению $\frac{10x}{15}$, так и выражению $\frac{4x^3-2x^2}{6x^2-3x}$ при $x \neq 0$, $x \neq 0,5$. Покажите, каким образом данные выражения были получены из выражения $\frac{2x}{3}$.

Упрощение рациональных выражений

Упрощение рациональных выражений

Для упрощения рациональных выражений надо:

1. Разложить числитель и знаменатель на множители (если это возможно);
2. Определить общий множитель;
3. Разделить числитель и знаменатель на общий множитель.

Пример 1 а) $\frac{2x^2 + 4x}{2x^2} = \frac{\cancel{2x}(x+2)}{\cancel{2x}x} = \frac{x+2}{x}, x \neq 0,$

б) $\frac{x^2 - 36}{x^2 + 6x} = \frac{(x-6)\cancel{(x+6)}}{x\cancel{(x+6)}} = \frac{x-6}{x}, x \neq -6, x \neq 0$

Пример 2

$$\frac{1-y}{y^2-1} = \frac{(1-y)}{(y-1)(y-1)} = \frac{\cancel{-(y-1)}}{(y+1)\cancel{(y-1)}} = \frac{-1}{y+1} = -\frac{1}{y+1}, y \neq \pm 1.$$

Внимание! При изменении знака числителя (или знаменателя) дроби и знака перед дробью, получается дробь эквивалентная данной.

Обучающие задания

6 Упростите.

а) $\frac{aby}{abx}$

с) $\frac{21a(b+3)}{14b(b+3)}$

б) $\frac{-6p}{3q}$

д) $\frac{x(y-3)}{5(y-3)}$

8 Упростите.

а) $\frac{3a-12b}{6ab}$

б) $\frac{15b-10c}{10b}$

с) $\frac{2a+4}{3(a+2)}$

д) $\frac{5xy+15x}{6y+18}$

е) $\frac{10a-10b}{15b-15a}$

7 Сократите дробь, разложив числитель и знаменатель на множители.

а) $\frac{y^2-16}{3y+12}$

с) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$

б) $\frac{(c+2)^2}{5c^2+10c}$

д) $\frac{3x^2-9yx}{x^2-9y^2}$

9 Найдите значение выражения.

а) $\frac{12a^2+8ab}{3ab+2b^2}$

$a=0,5$
 $b=0,2$

б) $\frac{x^2-6xy+9y^2}{2x^2-6xy}$

$x=1,5$;
 $y=-0,5$

10 Укажите множество допустимых значений переменных и упростите выражение.

а) $\frac{x^2-9}{3x+9}$

б) $\frac{x^2-4}{2x-4}$

с) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$

д) $\frac{7y-49}{y^2-49}$

11 Из следующих выражений $\frac{-x}{-y}$; $\frac{-x}{y}$; $\frac{x}{-y}$; $-\frac{-x}{y}$ выберите те, которые:

а) равны выражению $\frac{x}{y}$;

б) противоположны выражению $\frac{x}{y}$.

12 В каких рациональных выражениях числитель и знаменатель тождественно равны, а в каких – противоположны? Упростите выражения.

а) $\frac{-a+3}{3-a}$

б) $\frac{x^2-1}{1-x^2}$

с) $\frac{y^2-xy-3}{3+xy-y^2}$

д) $\frac{x^2-3+y}{y+x^2-3}$

Упрощение рациональных выражений

13 Упростите.

$$a) \frac{2x + cx - 2y - cy}{4x - 4y} \quad b) \frac{x^2 + 2ax + a^2}{a^2 + ax - ac - cx}$$

14 Запишите частное в виде дроби и сократите её.

$$a) (4x^2 - a^2) : (2x - a) \quad b) (x^3 - 8) : (x^2 + 2x + 4) \quad c) (x^2 + 3x) : (x^3 + 27)$$

15 Упростите.

$$a) \frac{3a + 36}{12b + ab} \quad b) \frac{25 - x^2}{3x + 15} \quad c) \frac{2 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$$

16 Упростите.

$$a) \frac{(2x - 6)^2}{x - 3} \quad b) \frac{(3a + 6)^2}{a + 2} \quad c) \frac{4x^2 - 4}{(2x - 2)^2}$$

17 Упростите.

$$a) \frac{a^5 + a^3}{a^4 + a^2} \quad b) \frac{b^6 + b^4}{b^4 + b^2} \quad c) \frac{y^7 - y^4}{y^2 - y^5}$$

Разложение трёхчлена на множители и упрощение рациональных выражений

Если числитель или знаменатель рационального выражения является трёхчленом, то для сокращения дроби применяют различные методы разложения на множители. Если для трёхчлена $x^2 + bx + c$ возможно найти такие числа m и n , чтобы их произведение было равно c , а сумма была равна b , то в этом случае:

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n).$$

На самом деле, если $m \cdot n = c$, $m + n = b$, тогда можно записать, что $x^2 + bx + c = x^2 + (m + n)x + m \cdot n = x^2 + mx + nx + mn = x(x + m) + n(x + m) = (x + m)(x + n)$.

Понятно что, если b и c являются целыми числами, то числа m и n надо искать среди делителей числа c .

Пример 1. Для сокращения дроби $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3}$ сначала надо разложить числитель и знаменатель на множители.

Для разложения на множители трёхчлена $x^2 + 5x + 6$ надо найти два положительных числа, произведение которых равно 6, а сумма 5. Это числа 2 и 3: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$.

Множители числа 6	Сумма множителей
1 и 6	7
2 и 3	5

Для разложения на множители трёхчлена $x^2 + 2x - 3$ надо найти два числа, произведение которых равно -3 , а сумма 2. Так как, эти числа 3 и -1 , тогда имеем $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

Множители числа -3	Сумма множителей
-3 и 1	-2
3 и -1	2

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{x + 2}{x - 1} \quad x \neq -3, \quad x \neq 1$$

Для разложения на множители трёхчлена $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), надо найти такие числа m и n , чтобы $mn = ac$, а $m + n = b$. Тогда $ax^2 + bx + c = ax^2 + mx + nx + c = x(ax + m) + (nx + c) = x(ax + m) + \frac{n}{a}(ax + m) = (ax + m)(x + \frac{n}{a})$

Пример 2. Сократим дробь

$$\frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3}$$

Для $2x^2 + x - 6$ $mn = 2 \cdot (-6) = -12$, $m + n = 1$

$$2x^2 + x - 6 = 2x^2 + 4x - 3x - 6 = 2x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(2x - 3)$$

$$\frac{2x^2 + x - 6}{2x - 3} = \frac{(x + 2)(2x - 3)}{2x - 3} = x + 2 \quad x \neq \frac{3}{2}$$

Множители числа -12	Сумма множителей
-2 и 6	4
-3 и 4	1

Упрощение рациональных выражений

Обучающие задания

18» Упростите выражения, разложив числитель и знаменатель на множители.

a) $\frac{x^2 - 7x + 12}{4x^2 - 12x}$ б) $\frac{x^2 - x - 6}{2x - 6}$ в) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}$

д) $\frac{2x^2 + 5x - 3}{4x - 2}$ е) $\frac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$ ф) $\frac{4x^2 + 5x - 6}{x^2 - 2x - 8}$

19» Сократите дробь, разложив многочлены на множители различными способами.

a) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}$ б) $\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 2x - 8}$ в) $\frac{x^2 - 6x + 9 - y^2}{x^2 - 3x + xy}$

20» Упростите и укажите ОДЗ.

a) $\frac{(x+4)^2 - 4(x+4) + 4}{x^2 - 4}$ б) $\frac{(x+2)^2 - 2(x+2) - 8}{x^2 - 16}$

21» В решении следующего задания допущены ошибки. Запишите заново решение и найдите эти ошибки.

$$\frac{6x^2 - x - 1}{9x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1) - (3x - 1)}{(3x + 1)(3x - 1)} = \frac{2x^2 + 1}{3x + 1}, \quad x \neq -\frac{1}{3}$$

22» Приведите следующие дроби, к знаменателю $12a^2b$.

a) $\frac{5b}{6a}$ в) $\frac{2a}{3b}$

б) $\frac{3}{4ab}$ д) $\frac{5b}{12}$

Пример. Приведём дробь $\frac{3b}{4a}$ к знаменателю $12a^2b$.

Так как $12a^2b = 3 \cdot 4 \cdot a \cdot a \cdot b$, то числитель и знаменатель дроби надо умножить на дополнительный множитель $3ab$.

$$\frac{3b}{4a} \cdot \frac{3ab}{3ab} = \frac{9ab^2}{12a^2b}$$

23» а) Представьте дробь $\frac{7x}{6y}$ в виде дроби со знаменателем $12x^2y^3$.

б) Представьте дробь $\frac{4}{x-y}$ в виде дроби со знаменателем $y-x$.

в) Представьте дробь $\frac{a}{a-1}$ в виде дроби со знаменателем a^2-1 .

24» Упростите.

a) $\frac{2x-2}{x^2+9x-10}$ б) $\frac{y^2-6y+8}{y^2+3y-10}$ в) $\frac{2x^2+2x-12}{4x^2+12x}$ д) $\frac{3x-6}{2x^2+x-10}$

25» Покажите, что выражения $\frac{x^2+2x-15}{x-3}$ и $x+5$ эквивалентны. Какое условие должно выполняться для этого?

Упрощение рациональных выражений

Прикладные задания

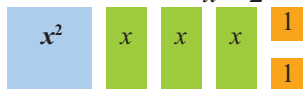
- 26** При помощи алгебраических карт разложите трёхчлен на множители и упростите рациональные выражения.

а) $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

б) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

в) $\frac{x^2 + 7x + 6}{x + 1}$

Пример: $\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

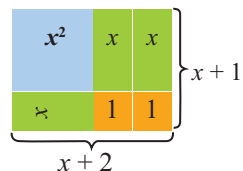


Расположите данные алгебраические карты так, чтобы получился прямоугольник со стороной $(x + 1)$.

Тогда другая сторона будет $(x + 2)$.

Значит, $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} = \frac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{\cancel{x+1}} = x + 2$$



- 27** Площадь прямоугольника равна $(x^2 + 5x + 4)$ кв. ед., а ширина равна $(x + 1)$ ед. Запишите выражение для нахождения периметра.

- 28** На листе квадратной формы начертите круг с наибольшим радиусом. Сторону квадрата обозначьте через $2x$.

а) Запишите рациональное выражение, которое показывает отношение площади квадрата к площади круга. б) Сколько процентов приблизительно занимает круг на данном листе? Ответ округлите до десятых.

- 29** В мешке n красных шаров и m белых. В мешок положили жёлтые шары, по количеству равных удвоенному значению количества всех шаров. Запишите рациональное выражение, которое показывает вероятность того, что вынутый случайным образом из мешка шар будет: а) красным; б) белым; в) жёлтым. Упростите, если возможно, полученное выражение.

- 30** Запишите две задачи, при решении которых требуется составить рациональные выражения. Задачи могут быть на нахождение площади, на движение, на вероятность и т.д.

Творческое применение. Как посчитать, сколько метров ковровина в рулоне?

- 31** Для определения длины ковровина в рулоне выполните следующие шаги.

1. Обозначьте радиус картонного цилиндра вокруг, которого скатан рулон через r , а радиус всего рулона через R . Запишите выражение, для нахождения площади лицевой части (поперечного сечения) ковровина круглой формы.

2. Обозначьте толщину ковровина через d , а длину ковровина в одном рулоне через l . Запишите выражение, которое показывает площадь прямоугольника с размерами l и d .

3. Для ковровина толщиной d запишите выражение, которое показывает длину ковровина l . Какая связь между d, l, R, r ?



Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений

Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений

Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений выполняется по тем же правилам, что и соответствующие действия с обыкновенными дробями.

Умножение рациональных выражений. $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$ здесь A, B, C, D некоторые многочлены.

Пример 1. $\frac{8ab}{5cd} \cdot \frac{6cx}{7ay} = \frac{8\cancel{ab} \cdot 6\cancel{c}x}{5\cancel{c}d \cdot 7\cancel{a}y} = \frac{48bx}{35dy}$

Деление рациональных выражений.

Чтобы разделить дробь на дробь надо делимое умножить на дробь обратную делителю.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Это правило верно и, если делимое или делитель являются многочленами.

Пример 2. $\frac{x-2}{x+1} : \frac{x^2-4}{x^2+x} = \frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x}{x^2-4} = \frac{(x-2) \cdot x(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$

Возведение рациональных дробей в степень: $\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$

Пример 3. $\left(\frac{2x^2}{y}\right)^3 = \frac{(2x^2)^3}{y^3} = \frac{2^3(x^2)^3}{y^3} = \frac{8x^6}{y^3}$

Обучающие задания

1» Выполните умножение.

a) $\frac{9a}{8b} \cdot \frac{4b}{3}$

b) $\frac{6b^2}{15} \cdot \frac{10}{3b^2}$

c) $\frac{x^2}{21c} \cdot \frac{14c}{xb}$

d) $\frac{9a}{6b} \cdot 12b$

2» Выполните деление.

a) $\frac{5a}{4b} : \frac{25a^2}{8}$

b) $\frac{3ab}{4xy^2} : \left(-\frac{21ab}{10x^2y}\right)$

c) $\left(-\frac{6x^2}{m^3n}\right) : \left(-\frac{x}{3mn^2}\right)$

3» Выполните действия.

a) $\frac{2ab}{3x} \cdot \frac{6x^2y}{4ax^2} \cdot \frac{6a}{15b}$

b) $\frac{12m^2n^2}{35p^2} \cdot \frac{14n^2}{m^3} \cdot \frac{5mp}{21n^6}$

c) $\frac{3x}{5y^2} : \frac{9x^2}{2y} : \frac{3x}{5y}$

4» Возведите в степень.

a) $\left(\frac{x}{2a}\right)^2$

b) $\left(\frac{3a}{b}\right)^3$

c) $\left(\frac{2n^2}{a^3}\right)^2$

5» Выполните действия.

a) $\left(\frac{8x}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{ab}{4x}\right)^3$

b) $\left(\frac{9y}{c^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{3y}\right)^3$

c) $\left(\frac{2x^2}{3y}\right)^2 : \left(\frac{4x^3}{3y^2}\right)$

6» Выполните действия.

a) $-\frac{5x}{16a^2b} \cdot 12ab^2$

b) $\frac{11a^4}{6b^2} \cdot \frac{5a}{6b^3} : \frac{11b^3}{12a^3}$

c) $-\frac{3x^2}{5y^3} : \frac{9x^3}{2y^2} \cdot \frac{5y}{3x}$

Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений

7» Выполните умножение.

a) $\frac{x^2 - 2x}{y} \cdot \frac{y^2}{x}$

b) $\frac{a-b}{ab} \cdot \frac{3ab}{ab-b^2}$

c) $(3x-15y) \cdot \frac{4}{x^2-25y^2}$

d) $\frac{a}{a^2-4} \cdot (a^2-4a+4)$

e) $\frac{c^2-16}{15bc} \cdot \frac{5b}{c+4}$

f) $\frac{(x+3)^2}{2x-4} \cdot \frac{x^2-4}{3x+9}$

8» Выполните деление.

$(10x-15y) : \frac{(2x-3y)^2}{2x} \quad \left| \quad \frac{a^2-3ab}{3b} : (7a-21b) \quad \right| \quad (a^2-4b^2) : \frac{5a-10b}{a}$

9» Выполните действия.

a) $\frac{b-a}{a} \cdot \frac{3a}{a^2-b^2}$

b) $\frac{a^2-1}{a-b} \cdot \frac{3a-3b}{a^2+a}$

c) $\frac{6a}{x^2-x} : \frac{3ax}{2x-2}$

d) $\frac{(a+2)^2}{a^2-9} \cdot \frac{2a-6}{2a+4}$

e) $\frac{c^2+2c}{c^2-1} : \frac{2c+4}{3c-3}$

f) $\frac{(x+1)^2}{2x+4} : \frac{x^2-1}{3x+6}$

10» Упростите выражение и найдите соответствующее значение при заданном значении переменной.

a) $\frac{(x+1)^2}{2x+4} \cdot \frac{4x+8}{x^2-1}$ при $x=1,5$;

b) $\frac{c^2+3c}{c^2-4} : \frac{2c+6}{c-2}$ при $c=-1,5$.

11» Упростите.

$\frac{x-1}{x^2-x+1} \cdot \frac{x^3+1}{x^2-1} \quad \left| \quad \frac{x+1}{x^2+x+1} : \frac{x^2+2x+1}{x^3-1} \quad \right| \quad \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} : \frac{a^2+ab+b^2}{2a+2b}$

12» Выполните действия.

a) $\frac{2a-8}{3a+3} \cdot \frac{2a^2-4a-16}{a+1}$

b) $\frac{2x+4}{x^2-7x+10} \cdot \frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$

c) $\frac{a^3+b^3}{-3a+3b} : \frac{a^2-b^2}{ab-a^2-b^2}$

13» a) Запишите дробь $\frac{2}{x}$ в виде произведения двух дробей.

b) Запишите выражение, показывающее отношение дроби $\frac{x^2}{x^2-9}$ к дроби $\frac{x}{x-3}$.

Прикладные задания

14» Площадь комнаты Гюльназ равна $(x^2 + 3x + 2)$ кв.ед. Для покраски пола, площадью $(x^2 + 2x + 1)$ кв.ед. достаточно одной банки краски. Запишите рациональное выражение, которое показывает сколько банок краски необходимо для того, чтобы покрасить пол в комнате Гюльназ.

Умножение, деление и возведение в степень рациональных выражений

- 15» Доски рассортированы по толщине и сложены в блоки. Высоту блока с количеством досок равным $(2n + 1)$ можно выразить по формуле $\frac{4n^2 - 1}{n + 2}$. Выразите толщину досок в блоке.



- 16» Разберите пример. Упростите выражение. Запишите значения переменных, при которых выражение имеет смысла. Равны ли, значения переменных, которые обращает в нуль знаменатель в данном выражении и в выражении после упрощения?

a) $\frac{2x^2 - 10x}{x + 1} \cdot \frac{x + 2}{3x^2 - 15x}$

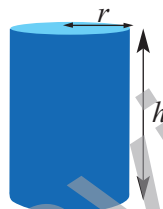
b) $\frac{x^2 - 14x + 48}{x^2 - 6x} : (x^2 - 8x)$

Пример: $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 9} : \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-4)(x+4)}{(x-3)(x+3)} : \frac{(x-4)^2}{(x-1)(x-3)} =$
 $= \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)(x-1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)\cancel{(x-4)}(x-4)} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)(x-4)} \quad (x \neq \pm 3, x \neq 4, x \neq 1)$

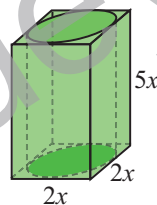
- 17» 1) Площадь полной поверхности сосуда в форме цилиндра находится по формуле $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, а объём по формуле $V = \pi r^2 h$, где r – радиус основания сосуда, а h – его высота.

Чем больше вместимость сосуда, сделанного из тонкого металлического листа, тем он выгоднее. При заданных значениях r и h найдите и сравните площадь металлического листа, который потребуется для изготовления сосудов, а так же объёмы полученных сосудов. Какой сосуд выгоднее:

- a) сосуд, с размерами $r = 12$ см и $h = 16$ см;
b) сосуд, с размерами $r = 16$ см и $h = 5$ см?

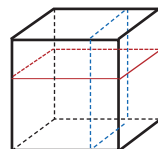


- 18» По данным рисунка найдите отношение объёмов прямоугольного параллелепипеда и цилиндра, вписанного в данный параллелепипед.



- 19» Скульптор отсёк от мраморного блока в виде куба с ребром x сначала пласт толщиной $\frac{1}{2}$ м, а затем с боковой стороны пласт толщиной $\frac{2}{3}$ м.

- 1) Запишите рациональное выражение, которое показывает объём оставшейся части куба.
2) Найдите массу блока до того, как от него отсекли первый пласт, если масса оставшейся части, равна 65 кг.

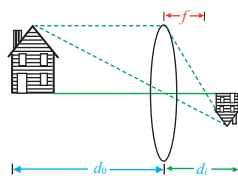


- 20» Упростите.

1) $(x-5) : \frac{x^2 - 11x + 30}{x^2 + 7x + 12} \cdot \frac{x-6}{x+4}$

2) $\frac{a^2 + 11a}{a-4} : (a^2 + 6a) \cdot \frac{a^2 - 4a}{a+11}$

Сложение и вычитание рациональных выражений



Для того, чтобы получить точную фотография важно уметь правильно выбрать фокусное расстояние (расстояние от фокуса, точки, в которой сгущаются параллельные лучи света от объекта, до линзы). Это расстояние можно вычислить по формуле.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i}$$

f - фокусное расстояние,
 d_0 - расстояние от объекта до линзы фотоаппарата,
 d_i - расстояние от линзы фотоаппарата до ленты.

Представьте себе, что расстояние от объекта, который вы хотите сфотографировать, до линзы фотоаппарата 50 см, а расстояние от линзы до ленты 8 см. Чему в данном случае будет равно фокусное расстояние?

Сложение и вычитание рациональных выражений

Сложение и вычитание рациональных выражений выполняется по правилам сложения и вычитания обыкновенных дробей.

Сложение и вычитание рациональных выражений с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$$

здесь A, B, C некоторые многочлены

Пример.

$$\frac{x^2 - 7}{x - 2} + \frac{3}{x - 2} = \frac{x^2 - 7 + 3}{x - 2} = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2, \quad x \neq 2$$

Сложение и вычитание рациональных выражений с разными знаменателями:

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD}{BD} \pm \frac{BC}{BD} = \frac{AD \pm BC}{BD}$$

здесь A, B, C, D некоторые многочлены

Пример. Найдем разность. $\frac{x}{x - 4} - \frac{4}{x + 4}$

Числитель и знаменатель первой дроби умножим на $(x + 4)$, а числитель и знаменатель второй дроби на $(x - 4)$, приведём дроби к общему знаменателю, а затем выполним вычитание.

$$\begin{aligned} \frac{x}{x - 4} - \frac{4}{x + 4} &= \frac{x(x + 4)}{(x - 4)(x + 4)} - \frac{4(x - 4)}{(x + 4)(x - 4)} = \frac{x(x + 4) - 4(x - 4)}{(x - 4)(x + 4)} = \\ &= \frac{x^2 + 4x - 4x + 16}{x^2 - 4^2} = \frac{x^2 + 16}{x^2 - 16}, \quad x \neq \pm 4 \end{aligned}$$

Обучающие задания

1» Выполните действия.

a) $\frac{a}{3} + \frac{b}{3}$

b) $\frac{x}{6} + \frac{a - x}{6}$

c) $\frac{a + c}{a} + \frac{a - c}{a}$

d) $\frac{x + 3}{y} + \frac{2 - x}{y}$

Сложение и вычитание рациональных выражений

2» Выполните действия.

a) $\frac{a-2}{8} + \frac{2a+5}{8} - \frac{3-a}{8}$ b) $\frac{3x-2y}{2x} + \frac{5x-3y}{2x} - \frac{x-5y}{2x}$

3» Упростите.

a) $\frac{16}{x-4} - \frac{x^2}{x-4}$ b) $\frac{25}{b+5} - \frac{b^2}{b+5}$ c) $\frac{y-3}{y^2-64} + \frac{11}{y^2-64}$
d) $\frac{a}{a^2-9} - \frac{3}{a^2-9}$ e) $\frac{x^2+4}{x+2} + \frac{4x}{x+2}$ f) $\frac{a^2-6a}{a-3} + \frac{9}{a-3}$

4» Найдите значение выражения.

a) $\frac{x^2+1}{x-2} - \frac{5}{x-2}$, при $x = 98$; b) $\frac{a-7}{a^2-9} + \frac{4-2a}{a^2-9}$, при $a = 3,1$.

5» Выполните сложение и вычитание.

a) $\frac{2y}{y-1} + \frac{2}{1-y}$ b) $\frac{a^2-8a}{a-4} - \frac{16}{4-a}$ c) $\frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{4}{(2-x)^2}$

6» Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной на ОДЗ выражения.

a) $\frac{3x+1}{2x-3} + \frac{x+4}{3-2x}$ b) $\frac{5x-8}{4x-8} - \frac{3x-8}{8-4x}$ c) $\frac{a^2+1}{a^2-1} + \frac{2}{1-a^2}$

7» Выполните действия.

a) $\frac{a}{2} + \frac{a}{3}$ b) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$ c) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ d) $\frac{8b+y}{4b} - \frac{6y+b}{3y}$
e) $3a - \frac{a}{3}$ f) $\frac{x-2}{2} - x + \frac{x+2}{2}$ g) $\frac{a^2+c}{a} - a$
h) $p - \frac{p^2-1}{p}$ i) $\frac{(a-b)^2}{a} + 4b$ j) $a+b - \frac{a^2+b^2}{a+b}$

8» Выполните действия.

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x}$ b) $\frac{a}{a+1} + \frac{a}{a-1}$ c) $\frac{y}{y-2} - \frac{y}{y+2}$

9» а) Сумма двух чисел равна 20, а сумма чисел противоположных данным равна $\frac{5}{24}$. Найдите произведение этих чисел.
б) Числа x и $x+2$ являются двумя последовательными чётными числами. Разность чисел, обратных данным, равна $\frac{1}{12}$. Найдите произведение данных чисел.

Сложение и вычитание рациональных выражений

Нахождение простейшего общего знаменателя

Часто удаётся найти более простой общий знаменатель, чем произведение знаменателей. Чтобы найти простейший общий знаменатель для дробей с разными знаменателями, сначала необходимо разложить знаменатель каждой дроби на множители. Простейший общий знаменатель равен произведению, составленному из НОК коэффициентов знаменателей и различных множителей, взятых с большей степенью.

Пример 1. Сложим дроби $\frac{7x}{15y^2}$ и $\frac{y}{18xy}$. Тогда простейший общий знаменатель будет: $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot x \cdot y^2 = 90xy^2$

Каждое рациональное выражение запишем в виде эквивалентной дроби со знаменателем $90xy^2$ и выполним сложение.

$$\frac{7x}{15y^2} + \frac{y}{18xy} = \frac{7x \cdot 6x}{15y^2 \cdot 6x} + \frac{y \cdot 5y}{18xy \cdot 5y} = \frac{42x^2}{90xy^2} + \frac{5y^2}{90xy^2} = \frac{42x^2 + 5y^2}{90xy^2}$$

Пример 2. Найдём разность дробей $\frac{x+12}{4x-16}$ и $\frac{x+4}{2x-8}$.

$$\begin{aligned} \frac{x+12}{4x-16} - \frac{x+4}{2x-8} &= \frac{x+12}{4(x-4)} - \frac{x+4}{2(x-4)} = \frac{x+12}{4(x-4)} - \frac{2(x+4)}{2 \cdot 2(x-4)} = \\ &= \frac{(x+12) - 2(x+4)}{4(x-4)} = \frac{x+12-2x-8}{4(x-4)} = \frac{-x+4}{4(x-4)} = \frac{-(x-4)}{4(x-4)} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Разложим знаменатель на множители *Простейший общий знаменатель: $4(x-4)$*

Приведём к общему знаменателю и раскроем скобки *Приведём подобные члены* *Сократим общие множители*

10 Запишите простейший общий знаменатель для дробей.

$$\frac{1}{6a^2b} \text{ и } \frac{1}{4ab^3} \quad \left| \quad \frac{1}{x^2-2x} \text{ и } \frac{1}{(x-2)^2} \quad \left| \quad \frac{2}{a^2-a} \text{ и } \frac{1}{a^2-1} \right.$$

11 Выполните действия.

$$\text{a) } \frac{5a-3}{3a} + \frac{a+2}{2a} \quad \text{b) } \frac{x+6}{14x} + \frac{2x-9}{21x} \quad \text{c) } \frac{2b+1}{4b} - \frac{3b-2}{6b}$$

12 Выполните сложение и вычитание.

$$\frac{b}{a^2} + \frac{1}{a} \quad \left| \quad \frac{5a-3b}{a^2b} + \frac{4a-5b}{ab^2} \quad \left| \quad \frac{2xy-1}{2x^3} - \frac{3y+4}{3x^2} \quad \left| \quad \frac{b}{2x} - \frac{b}{x^2} \right.$$

13 Выполните действия.

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{x}{3(a-1)} - \frac{x}{4(a-1)} \quad & \text{b) } \frac{a}{2(a+2)} - \frac{a}{a(a+2)} \quad & \text{c) } \frac{3x}{2(x+y)} - \frac{2y}{3(x+y)} \\ \text{a) } \frac{b}{a(a-b)} - \frac{a}{b(a-b)} \quad & \text{e) } \frac{x}{2x+2} - \frac{x}{3x+3} \quad & \text{f) } \frac{x}{5x-10} + \frac{x}{3x-6} \end{aligned}$$

Сложение и вычитание рациональных выражений

14» Упростите.

$$\text{a) } \frac{x+5}{5x-25} - \frac{3x+5}{x^2-25} \quad \text{b) } \frac{y-8}{4y-16} + \frac{4}{y^2-4y} \quad \text{c) } \frac{b-6}{4-b^2} + \frac{2}{2b-b^2}$$

15» Выполните сложение и вычитание.

$$\text{a) } \frac{a^2-9}{3a-9} - \frac{(a+3)^2}{3a+9} \quad \text{b) } \frac{(y+5)^2}{y^2+5y} + \frac{(y-5)^2}{y^2-5y} \quad \text{c) } \frac{y^2+4y+4}{y^2-4} - \frac{y^2-4}{y^2+4y+4}$$

16» Упростите.

$$\text{a) } \frac{1}{x^2+xy} + \frac{1}{xy+y^2} \quad \text{b) } \frac{1}{x^2-xy} - \frac{1}{xy-y^2} \quad \text{c) } \frac{a+6}{a^2-4} - \frac{2}{a^2+2a}$$

17» Упростите и найдите соответствующие значения при заданных значениях переменной.

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x-1}{x^2+x} \quad \text{при } x=3 \quad \text{b) } \frac{2}{c^2-4} - \frac{1}{c^2-2c} \quad \text{при } c=0,5.$$

18» Выполните действия.

$$\text{a) } \frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1} + \frac{8}{x^2-1} \quad \text{b) } \frac{a}{a-2} - \frac{1}{a+2} + \frac{a^2}{4-a^2} \quad \text{c) } \frac{4k-12}{k^2+k-12} + \frac{k}{k+4} \\ \text{d) } \frac{2}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2+3x} - \frac{x+1}{x^2-9} \quad \text{e) } \frac{2}{x^2-x} + \frac{1}{x^2+x} - \frac{x+3}{x^2-1}$$

19» Выполните сложение и вычитание дробей.

$$\text{a) } \frac{a}{a^2-9} - \frac{3}{9-a^2} \quad \text{b) } \frac{a^2}{a-1} + \frac{1}{1-a} \quad \text{c) } \frac{10a-12}{2a-6} + \frac{6a}{6-2a} \\ \text{d) } \frac{b-16}{2b-12} - \frac{-3b+8}{2b-12} \quad \text{e) } \frac{15x}{5x+1} + \frac{-3}{-1-5x} \quad \text{f) } \frac{2}{x+7} - \frac{-5}{x+7}$$

20» Выполните действия.

$$\text{a) } \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} \quad \text{b) } \frac{7}{6a^2} + \frac{5}{3a} \quad \text{c) } \frac{x^2-1}{x+1} - \frac{x^2+1}{x-1} \quad \text{d) } \frac{18}{y^2-9} + \frac{3}{3-y} \\ \text{e) } \frac{3a+3}{6-3a} - \frac{a+2}{a^2-4} \quad \text{f) } \frac{1-x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x+1} \quad \text{g) } \frac{x+1}{(x-1)^2} + \frac{x+4}{x^2+3x-4}$$

21» а) Составьте два рациональных выражения с переменной n , одно из которых не имеет смысла при $n = -1$, а другое при $n = 2$ и найдите их сумму.

б) Составьте два различных рациональных выражения с переменной x , которые не имеют смысла при $x = -1$ и $x = 2$ и найдите их разность.

Сложение и вычитание рациональных выражений

22 Докажите, что при всех допустимых значениях переменной, значение выражения не зависит от переменной.

а) $\frac{4x+5}{2x-1} + \frac{6x+4}{1-2x}$ б) $\frac{5x+1}{x-4} + \frac{x+17}{4-x}$ в) $\frac{3x+5}{2x+2} + \frac{4x+7}{3x+3}$

23 Представьте следующие рациональные выражения в виде суммы или разности двух рациональных, используя тождества $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$

а) $\frac{a+3}{b}$ б) $\frac{x^2-3}{x}$ в) $\frac{12a+x}{6ax}$

Прикладные задания

24 Фермера беспокоит малый вес новорожденных телят. Для того, чтобы увеличить вес телёнка на m кг за каждую неделю, он перевел телят на особый режим кормления. В результате фермер заметил, что вес за каждую неделю увеличивается на $(m+2)$ кг. Решите следующие задачи, зная, что прибавка в весе у телёнка в среднем должна составить 20 кг.

1) Какую информацию содержат выражения $\frac{20}{m}$ и $\frac{20}{m+2}$?

2) Запишите выражение, которое показывает разность между запланированным и фактическим временем (количеством недель). Упростите полученное выражение.

25 В Древнем Египте использовались дроби, у которых в числителе присутствовала только единица $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$. Все другие дроби представлялись только при помощи таких дробей. Например, $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. При упрощении следующих дробей должны получиться рациональные выражения с числителем равным единице. Проверьте данное предположение.

а) $\frac{5x+6}{10x^2+12x} - \frac{2x}{8x^2}$ б) $\frac{3x-2}{9x^2-6x} + \frac{4x}{24x^2}$ в) $\frac{2x+1}{4x^2+2x} - \frac{3x}{9x^2}$

26 По данным рисунка запишите выражения, для нахождения периметра фигуры.

$\frac{2t+1}{t+2}$ $\frac{2t+1}{t+2}$
 $\frac{2t}{t+2}$

$\frac{2h-14}{h+1}$
 $\frac{5h+1}{h+1}$ $\frac{5h+1}{h+1}$
 $\frac{8h}{h+1}$

$\frac{2a+3b}{3a+7b}$ $\frac{4a+5b}{3a+7b}$
 P Q
 S R

27 Для прямоугольника, запишите выражение, соответствующее:

а) стороне; б) периметру.

$S = x^2 - 4$

 $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} x^2 - x - 2 \\ x + 1 \end{array}$

28 а) Вычислите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ при $\frac{a-b}{b} = 3$.

б) Вычислите значение выражения $\frac{6ab}{2a+b}$ при $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 4$.

Сложение и вычитание рациональных выражений

29» а) При скольких целых значениях k значение выражения $\frac{2k^2 - 3k + 6}{k}$ является целым числом?

б) При скольких целых значениях m значение выражения $\frac{4m - 8}{m^2 - 3m + 2}$ является целым числом?

30» Используя различные алгоритмы можно убедиться в правильном принципе работы калькулятора. Значения эквивалентных выражений проверяются для заданных значений переменных.

Для заданных пар выражений докажите, что второе эквивалентно первому.

1) $\frac{A}{B} + \frac{C}{D}$; $\frac{\frac{AD}{B} + C}{D}$ 2) $AB + DG + EF$; $\left[\left(\frac{AB}{D} + G \right) \frac{D}{F} + E \right] F$

31» 1) Самир, Гюляр и Орхан хотят представить $\frac{x^2 + 7x - 25}{x - 5}$ в виде суммы или разности многочлена и дроби. Какой из представленных ответов верен?

Самир

$$x + 5 + \frac{7x}{x + 5}$$

Гюляр

$$x + 12 + \frac{35}{x - 5}$$

Орхан

$$x + 8 + \frac{4x + 15}{x - 5}$$

2) Представьте $\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ в виде суммы или разности многочлена и дроби.

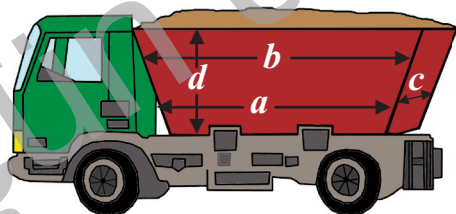
32» Дорога между пунктами А и В состоит из подъёма и спуска. Длина дороги на подъёме составляет s км, а на спуске $2s$ км. Скорость пешехода на подъёме v км/ч, а на спуске $2v$ км/ч. Сколько времени t (в часах) затратит пешеход на дорогу из пункта А в пункт В и обратно?

33» Для закладки фундамента при строительстве нового дома строительная площадка должна быть очищена от мусора. Мусор должен вывозиться на грузовой машине, изображенной на рисунке. Вместимость грузовой машины можно вычислить по формуле $V = \frac{d(a + b)}{2} c$.

1) Выразите вместимость грузовой машины в кубических метрах, если размеры грузовой машины по технической документации равны

$a = 10$ фут, $b = 17$ фут, $c = 4$ фут, $d = 3,5$. 1 фут $\approx 0,3$ м (фут единица измерения длины, которая используется в некоторых странах Европы и США).

2) Если на стройплощадке 40 м^3 мусора, то сколько рейсов должна сделать грузовая машина, чтобы очистить площадку?



Упрощение рациональных выражений

Рассмотрим примеры на различные действия над рациональными выражениями.

Пример 1. Выполните действия. $x + 1 - \frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x}$

1. Выполним умножение $\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x} = \frac{(x-3)(\cancel{x+3})}{(\cancel{x+3}) \cdot x} = \frac{x-3}{x}$

2. Вычтем результат из многочлена $(x+1)$

$$x + 1 - \frac{x-3}{x} = \frac{x(x+1) - (x-3)}{x} = \frac{x^2+3}{x}$$

Пример 2. Упростите.

$$\frac{\frac{x^2y^2}{a}}{\frac{x^2y}{a^3}} = \frac{x^2y^2}{a} : \frac{x^2y}{a^3} = \frac{x^2y^2}{a} \cdot \frac{a^3}{x^2y} = \frac{x^{\cancel{2}}y^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} \cdot \frac{a^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}y} = a^2y$$

Представим в виде частного Выполним умножение Сократим

Обучающие задания

1» Выполните действия.

a) $\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) \cdot \frac{bc}{b-c}$

b) $\frac{3a-18}{a^2-25} \cdot \left(1 - \frac{1}{6-a}\right)$

c) $\left(\frac{a}{a+1} + 1\right) : \frac{2a}{a+1}$

d) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{2ab}{a^2-b^2}$

e) $\frac{1-2x}{2x+1} + \frac{x^2+3x}{4x^2-1} : \frac{3+x}{4x-2}$

f) $\frac{2x-y}{xy} - \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)$

2» Упростите.

a) $\frac{\frac{m^3}{3n}}{-\frac{m^4}{9n^2}}$

b) $\frac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

c) $\frac{\frac{p^3}{2q}}{-\frac{p^2}{4q}}$

d) $\frac{\frac{6y^2-6}{8y^2+8y}}{\frac{3y-3}{4y^2+4y}}$

3» Упростите, умножив числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение.

a) $\frac{\frac{m+n}{5}}{\frac{m^2-n^2}{5}}$

b) $\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}$

c) $\frac{\frac{2a-b}{b} + 1}{\frac{2a+b}{b} - 1}$

d) $\frac{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$

4» Докажите, что при всех допустимых значений переменной, значение выражения не зависит от переменной.

$$\left(\frac{2}{n} + 1\right) \cdot \left(n + \frac{4}{n} - 2\right) : \left(\frac{8}{n^2} + n\right)$$

$$\frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2}$$

Упрощение рациональных выражений

5» Упростите рациональные выражения.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{(x+y) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)}{(x-y) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)} \quad \text{b) } \frac{\frac{n-3}{n+3} + \frac{n+3}{n-3}}{\frac{4n}{n^2-9}} \quad \text{c) } \frac{\frac{1}{x-1} + \frac{4-x}{x^2-x}}{\frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2-x}} \end{array}$$

6» Упростите.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{1 - \frac{9}{t}}{1 - \frac{81}{t^2}} \quad \text{b) } \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{c) } \frac{x+4 + \frac{9}{x-2}}{x+6 + \frac{15}{x-2}} \end{array}$$

7» Упростите рациональные выражения.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{2 - \frac{6}{x}}{1 - \frac{9}{x^2}} \quad \text{b) } \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{t}}{\frac{t}{t+6} - \frac{1}{t}} \quad \text{c) } \frac{\frac{3}{m} - \frac{3}{2m+3}}{\frac{3}{m^2} + \frac{1}{2m+3}} \quad \text{d) } \frac{\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-4}}{\frac{x}{x^2-16} + \frac{1}{x+4}} \end{array}$$

8» Значение какого выражения не зависит от переменной?

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{a}{1 - \frac{3}{a}} + \frac{a}{\frac{3}{a} - 1} \quad \text{b) } \frac{a - \frac{3}{2}}{b} - \frac{a + \frac{2}{3}}{b} \quad \text{c) } \frac{\frac{1}{2} + 2a}{b-1} + \frac{2a + \frac{1}{2}}{1-b} \end{array}$$

Прикладные задания

9» Представьте в виде дроби.

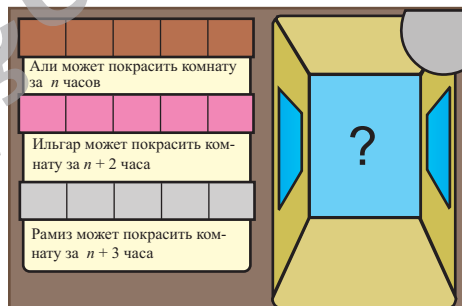
$$\begin{array}{l} \text{a) } 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} \quad \text{b) } 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}} \quad \text{c) } 3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{x}}} \end{array}$$

10» Выразите переменную y через π , r , x , если $y = \frac{2\pi}{d}$ и $x = dr$.

11» Али, Ильгар и Рамиз представили в виде рисунка информацию о том, как быстро каждый из них может покрасить комнату.

а) Запишите выражение, которое показывает за какое время покрасят комнату двое из них (рассмотрите все возможные варианты).

б) Какие два мальчика смогут закончить эту работу за 2 часа при $n = 3$?



Степень с целым показателем

Степень с целым отрицательным показателем

Запишем последовательно $0; 1; 2$ и т.д. степени числа $10: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$. В этой строке каждое число в 10 раз меньше следующего. Если продолжить запись влево, в соответствии с данным правилом, то получим следующее: перед числом 10^0 стоит число $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$, перед числом $\frac{1}{10^1}$ число $\frac{1}{10^2}$ и т.д.

$$\dots \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$$

Степень каждого числа в этой строке от числа 10^0 справа, на единицу меньше степени следующего числа. Применив данное правило к числам, стоящим слева от числа 10^0 , получим отрицательные степени числа 10 , которые запишем так: вместо $\frac{1}{10^1}$ запишем 10^{-1} , вместо $\frac{1}{10^2}$ запишем 10^{-2} и т.д.

Обобщив полученное, примем $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ при $a \neq 0$.

На самом деле, приняв во внимание основное свойство степени при $a \neq 0$, имеем $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$, а отсюда получим, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Пример. а) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ б) $(-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$ в) $(-4)^{-3} = \frac{1}{(-4)^3} = -\frac{1}{64}$

Обучающие задания

- 1** Замените степень с целым отрицательным показателем дробью.
а) 10^{-4} б) a^{-2} в) $(ab)^{-3}$
- 2** Замените дробь степенью с целым отрицательным показателем.
а) $\frac{1}{10^5}$ б) $\frac{1}{a^3}$ в) $\frac{1}{a}$
- 3** а) Представьте числа $16; 8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$ в виде степени с основанием 2 .
б) Представьте числа $\frac{1}{27}; \frac{1}{9}; \frac{1}{3}; 1; 3; 9; 27$ в виде степени с основанием 3 .
- 4** Вычислите.
а) 6^{-2} б) $(-1)^{-10}$ в) $(-3)^{-4}$ г) $(\frac{1}{2})^{-5}$ д) -4^{-2} е) $(-4)^{-2}$ ж) $-(-3)^{-2}$ з) $(\frac{1}{2})^{-5}$ и) $(-1\frac{1}{2})^{-3}$
- 5** Сравните с нулём.
а) 7^{-3} б) $1,6^{-4}$ в) $(-3,2)^{-2}$ г) $(-6,1)^{-5}$
- 6** Верно ли, что:
а) если $a > 0$ и n - целое число, то $a^n < 0$;
б) если $a < 0$ и n - отрицательное чётное число, то $a^n > 0$;
в) если $a < 0$ и n - отрицательное нечётное число, то $a^n < 0$;
- 7** Представьте выражения в виде дроби, не содержащей степень с отрицательным показателем. а) $2 \cdot x^{-3}$ б) $5ab^{-3}$ в) $3 \cdot (x + y)^{-1}$
- 8** Представьте дробь в виде произведения.
а) $\frac{2}{b^2}$ б) $\frac{3}{x^4}$ в) $\frac{a}{(b-1)^3}$
- 9** Вычислите.
а) $10 \cdot 2^{-2}$ б) $3 \cdot 10^{-2}$
в) $2^{-2} + 3^{-1}$ г) $0,5^{-2} + 0,2^{-1}$
- 10** Упростите.
а) $(a^{-1} - b^{-1}) \cdot (a - b)^{-1}$ б) $(a - b)^{-2} \cdot (a^2 - b^2)$

Степень с целым показателем

Свойства степени с целым показателем

Для любого $a \neq 0$ и любых целых чисел m и n справедливы равенства

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Для любых $a \neq 0$, $b \neq 0$ и для любого целого числа n справедливы равенства

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Действия над степенями с целым показателем, выполняются по тем же правилам, что и над степенями с натуральным показателем.

Пример 1. $a^{-14} \cdot a^{17} = a^{-14+17} = a^3$

К такому же результату можно прийти по определению степени с отрицательным показателем и по свойству степени $a^{-14} \cdot a^{17} = \frac{1}{a^{14}} \cdot a^{17} = \frac{a^{17}}{a^{14}} = a^3$ с натуральным показателем.

Пример 2. $(3a^2b^{-3})^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot (a^2)^{-2} \cdot (b^{-3})^{-2} = \frac{1}{9} a^{-4}b^6 = \frac{b^6}{9a^4}$

Обучающие задания

11 Найдите значение выражения.

a) $5^{-2} \cdot 5^4$

b) $2^{-6} \cdot 2^4 \cdot 2^0$

c) $3^5 \cdot 3^{-3}$

d) $2^2 : 2^{-3}$

e) $3^{-2} : 3^{-4}$

f) $(2^3)^{-2} \cdot (2^{-2})^{-4} \cdot (2^{-2})^0$

12 В закрашенные ячейки впишите соответствующие числа.

$$a^{\blacksquare} a^4 = a^3$$

$$(a^{\blacksquare})^4 = a^{-8}$$

$$(a^2b^{\blacksquare})^4 = a^8b^{-12}$$

$$(a^3b^6)^{\blacksquare} = \frac{1}{a^9b^{18}}$$

$$(b^2)^{-4} = \frac{1}{b^{\blacksquare}}$$

$$a^{\blacksquare} \cdot a^8 = a^6$$

13 Представьте выражение в виде произведения степеней с одинаковым основанием и найдите его значение.

a) $16 \cdot 2^{-3}$

b) $\frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$

c) $8^{-1} \cdot 4^2$

d) $9^{-4} \cdot 27^3$

14 Вычислите.

a) $8^{-2} \cdot 4^3$

b) $9^{-2} \cdot 27^2$

c) $\frac{16^{-12}}{4^{-21} \cdot 8^{-3}}$

d) $\frac{3^{-12} \cdot 9^4}{27^{-2}}$

15 Упростите.

a) $2ab^{-3} \cdot 5a^{-2}b$

b) $3 \frac{1}{3} a^5b^{-16} \cdot 0,6a^{-1}b^{18}$

c) $2,4 a^{-5}b^2 : (0,2a^{-3}b^{-2})$

16 Преобразуйте в произведение. a) $(2^{-3} \cdot b^3)^{-2}$ b) $(6a^{-3}b)^{-1}$ c) $\left(\frac{2}{3}x^{-5}q^2\right)^{-2}$

17 Докажите, что $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, при $a \neq 0$, $b \neq 0$.

18 Вычислите.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

c) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$

d) $\left(-1 \frac{4}{5}\right)^{-3}$

19 Упростите.

a) $\frac{9x^{-5}}{y^{-6}} \cdot \frac{y^2}{12x^{-8}}$

b) $\frac{56a^2}{2b^{-4}} : \frac{7a^{-1}}{18b^3}$

c) $\left(\frac{2x^{-1}}{3x^{-2}}\right)^{-2} \cdot 4x^{-1}y$

Степень с целым показателем

Стандартный вид числа

В науке и технике наряду с очень большими положительными числами встречаются и очень маленькие положительные числа. Например, объём Земли выражается гигантским числом $1083000000000 \text{ км}^3$, а диаметр молекулы очень маленьким числом $0,0000000003 \text{ м}$. Большие и малые числа неудобно записывать в виде обыкновенных или десятичных дробей и выполнять какие-либо действия над ними. В этом случае их представляют в виде $a \cdot 10^n$.

Например, $137000 = 1,37 \cdot 10^5$ или $0,0000012 = 1,2 \cdot 10^{-6}$

Запись числа в виде $a \cdot 10^n$ называется стандартным видом числа, где $1 \leq a < 10$ и n целое число, число a называется значащей частью, n - порядком.

Пример. 1) $4350000 = 4,35 \cdot 10^6$ (порядок равен 6).
2) $0,00000028 = 2,8 \cdot 10^{-7}$ (порядок равен -7).

1 Выразите числа в виде степени числа 10.

- a) 0,01 b) 10000000 c) 0,000001 d) 0,00000001

2 Запишите числа в стандартном виде.

- a) 48000000 b) 287000 c) 0,0000063 d) 0,00029
e) $57 \cdot 10^4$ f) $682 \cdot 10^7$ g) $0,21 \cdot 10^{-4}$ h) $127 \cdot 10^{-8}$

3 Выполните действия.

- a) $(3,5 \cdot 10^4) \cdot (4 \cdot 10^{-3})$ b) $(8,5 \cdot 10^{-3}) \cdot (4 \cdot 10^7)$ c) $(8,4 \cdot 10^6) : (2 \cdot 10^{-3})$

Пример. 1) $(2,5 \cdot 10^5) \cdot (6 \cdot 10^{-8}) = (2,5 \cdot 6) \cdot (10^5 \cdot 10^{-8}) = 15 \cdot 10^{-3} = 1,5 \cdot 10^{-2}$

2) $(8,2 \cdot 10^{-8}) : (4 \cdot 10^{-10}) = (8,2 : 4) \cdot (10^{-8} : 10^{-10}) = 4,05 \cdot 10^2$

4 Расположите числа в порядке возрастания.

- $8,5 \cdot 10^{-1}$ $3,6 \cdot 10^8$ $5,85 \cdot 10^{-3}$ $2,5 \cdot 10^{-1}$ $8,5 \cdot 10^8$

5 Числа, представленные в нестандартном виде, запишите в стандартном виде

- 1) $50 \cdot 10^{-5}$ 2) $8,1 \cdot 10^{-2}$ 3) 1 200 000 4) $0,2 \cdot 10^3$ 5) $35 \cdot 10^{-6}$

6 Выполните действия.

- a) $8,5 \cdot 10^{-6} + 4,2 \cdot 10^{-6}$ b) $2,3 \cdot 10^{-4} - 1,8 \cdot 10^{-4}$
c) $6,3 \cdot 10^{-8} - 1,8 \cdot 10^{-9}$ d) $5,4 \cdot 10^{-7} + 2,3 \cdot 10^{-8}$

Пример.

1) $4,5 \cdot 10^{-7} + 8,2 \cdot 10^{-7} = (4,5 + 8,2) \cdot 10^{-7} = 12,7 \cdot 10^{-7} = 1,27 \cdot 10^{-6}$

2) $6,4 \cdot 10^{-3} - 4,1 \cdot 10^{-4} = 64 \cdot 10^{-4} - 4,2 \cdot 10^{-4} = (64 - 4,2) \cdot 10^{-4} = 59,8 \cdot 10^{-4} = 5,98 \cdot 10^{-3}$

Прикладные задания

7 Плотность железа $7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Найдите массу железной пластины длиной 5 м, шириной $8 \cdot 10^{-1} \text{ м}$ и толщиной $2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

8 Один астрономический световой год - это расстояние длиной $9,461 \cdot 10^{12} \text{ км}$, которое проходит свет за 1 год. Сколько цифр содержит число, выражающее это расстояние в километрах?

Степень с целым показателем

- 9» **Баррель** - мера объёма жидких веществ, которая в основном используется для измерения объёма нефти. 1 баррель нефти приблизительно равен 159 л. Запишите данные из текста в стандартном виде. «По трубопроводу БТД в августе прошлого года из терминала Джейхан в Турции было отправлено в целом 2 миллиарда баррелей нефти. В течение 2014 года посредством трубопровода БТД было экспортировано 34,8 млн. тонн (218 млн. баррелей) сырой нефти, которая в Джейхане была погружена на 362 танкера». Сколько баррелей нефти было погружено на каждый танкер, если известно, что на каждый из них было погружено одинаковое количество нефти?

- 10» **Здоровье.** У Рейхан аллергия на цветочную пыльцу. Диаметр цветочной пыльцы колеблется от $1,2 \cdot 10^{-5}$ м до $9 \cdot 10^{-5}$ м. Фильтр кондиционера может нейтрализовать частицы пыли больше $3 \cdot 10^{-7}$ м. Сможет ли этот фильтр нейтрализовать частицы цветочной пыльцы?



- 11» **Миля** - единица длины, которую используют в США и Великобритании. 1 миля $\approx 1,6$ км. Световой луч за секунду проходит 186000 миль или $3 \cdot 10^5$ км. Найдите путь, пройденный световым лучом за: а) $5 \cdot 10^5$ секунд; б) 365 дней (1 год) и выразите его в километрах и милях. Ответ запишите в стандартном виде.

- 12» **Физика.** Самая маленькая частица вещества - атом состоит из более мелких частиц: протонов, электронов и нейтронов.

Масса протона: $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, масса нейтрона: $1,68 \cdot 10^{-27}$ кг,

масса электрона: 0,0000000000000000000000000000911 кг.

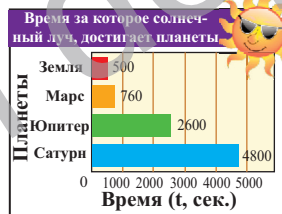
Какая из частиц легче?

- 13» **Компьютер.** В таблице даны единицы измерения информации памяти компьютера.

Объём CD-ROM 700 MB, объём DVD-ROM 4,7 GB. Во сколько раз объём DVD больше объёма CD?

Память компьютера	
1 килобайт (KB)	≈ 1000 байт
1 мегабайт (MB)	≈ 1 миллион байт
1 гигабайт (GB)	≈ 1 миллиард байт

- 14» **Астрономия.** Солнечный луч за минуту проходит приблизительно $3 \cdot 10^8$ м. На барграфе показано время, за которое солнечный луч достигает каждую планету. На основе этих данных вычислите расстояние между Солнцем и планетами.



- 15» **Биология.** Тело новорожденного ребёнка состоит приблизительно из 26 000 000 000 клеток. В теле молодого человека этих клеток приблизительно в $1,9 \cdot 10^3$ раз больше. Сколько клеток в теле молодого человека?

- 16» **Состав крови.** Тромбоциты участвуют в процессе свёртывания крови. На каждый миллиметр крови приблизительно приходится $2,7 \cdot 10^8$ тромбоцитов. а) Сколько тромбоцитов в 6 миллилитрах крови? б) В теле подростка приблизительно 5 литров крови. Сколько приблизительно тромбоцитов у человека в этом возрасте? Ответ запишите в стандартном виде.

Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

Исследуем зависимость между сторонами прямоугольника с площадью 6 см². Выразив длину через x см, а ширину через y см, эту зависимость можно записать в виде $y = \frac{6}{x}$. Так как в данном задании x и y выражают измерения длины и ширины прямоугольника, то они могут принимать только положительные значения. Составим таблицу, в которой будем задавать значения x и находить соответствующие значения y . Из таблицы видно, что во сколько раз значение x увеличивается, во столько же раз значение y уменьшается, т.е. переменные x и y связаны обратно пропорциональной зависимостью.

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

На координатной плоскости отметим точки, указанные в таблице, и соединим их плавной линией, как показано на рисунке.

Произведение абсциссы и ординаты (длины и ширины прямоугольника) любой точки на графике остаётся постоянным и в данном случае равно 6-ти (площади прямоугольника).

Если переменные x и y связаны обратно пропорциональной зависимостью, то по заданным значениям можно определить формулу данной зависимости.

Пример 1. Переменные x и y связаны обратно пропорциональной зависимостью и при $x=4$, $y=7$. Запишите формулу данной зависимости.

Так как произведение переменных, связанных обратно пропорциональной зависимостью, всегда остаётся постоянным, то обозначим эту постоянную через k , тогда $xy=k$. В нашем случае $k = 4 \cdot 7 = 28$. Тогда соответствующую зависимость можно записать в виде формулы так: $y = \frac{28}{x}$.

Рассмотрим функцию, заданную формулой $y = \frac{k}{x}$, в которой переменная принимает как положительные, так и отрицательные значения.

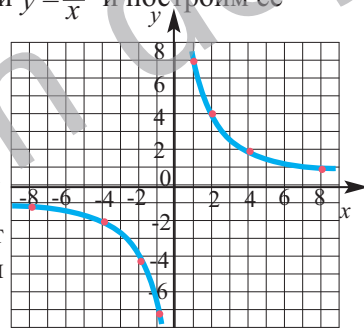
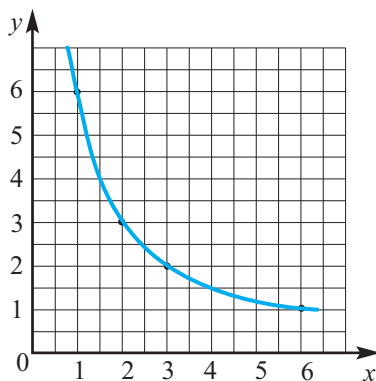
Пример 2. Составим таблицу значений функции $y = \frac{8}{x}$ и построим её график.

x	-8	-4	-2	-1	0	1	2	4	8
y	-1	-2	-4	-8	Не определена	8	4	2	1

Определение: функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, называется **обратно пропорциональной функцией**.

Где x - независимая переменная, k - число отличное от нуля. Функция $y = \frac{k}{x}$ определена для всех x , кроме нуля ($x \neq 0$).

График функции $y = \frac{k}{x}$ симметричен относительно начала координат. Если точка $A(a;b)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$, то точка $B(-a;-b)$ также принадлежит графику функции. График функции $y = \frac{k}{x}$ называется **гиперболой**. Гипербола состоит из двух ветвей. При $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III четверти, а при $k < 0$ расположены во II и IV четверти. Чем больше абсолютное значение абсциссы на графике, тем ближе эта точка расположена к оси абсцисс.

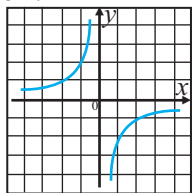


Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

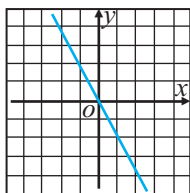
Обучающие задания

- 1» Составьте таблицу значений для функций $y = \frac{4}{x}$ и постройте её график.
- 2» Постройте график функции $y = \frac{-8}{x}$. По графику найдите:
- а) соответствующие значения y при $x = 4; 2,5; -2,5$;
 - б) соответствующие значения x при $y = 8; -2$.
- 3» Переменные x и y изменяются в обратно пропорциональной зависимости.
- а) если при $x = 8, y = 24$, то найдите y при $x = 6$.
 - б) если при $y = 2,7, x = 8,1$, то найдите x при $y = 0,9$.
 - с) если при $x = \frac{1}{2}, y = 16$, то найдите x при $y = 32$.
- 4» Зная, что точка $A(3;4)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$, найдите k и постройте график этой функции.
- 5» Точка $A(6;2)$ принадлежит графику функции $y = \frac{k}{x}$. Запишите в цветные клетки соответствующие координаты, если точки $B(\text{розовый}; 4)$, $C(-4; \text{зеленый})$, $D(0,5; \text{синий})$ принадлежат данному графику.

- 6» На каком рисунке изображён график прямо пропорциональной функции, а на каком - обратно пропорциональной?



а)



б)

Прикладные задания

- 8» В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{6}{x}$ и $y = 7 - x$. С помощью графика определите координаты точек пересечения.
- 9» Два человека стоят на концах доски, находящейся в равновесии. Масса одного из них 50 кг и он находится на расстоянии 1,5 м от центра равновесия. На каком расстоянии от центра должен находиться другой человек, массой 60 кг, чтобы не нарушить равновесия?
- 10» Запишите зависимости между двумя величинами в виде функции.
- а) x и y связаны обратно пропорциональной зависимостью так, что при $x = 5, y = 40$. Найдите y при $x = 8$.
 - б) x и y связаны прямо пропорциональной зависимостью так, что при $x = 5, y = 10$. Найдите y при $x = 20$.

- 7» Какие из зависимостей относятся к прямо пропорциональным, какие к обратно пропорциональным, а какие вообще ни к одной из вышеуказанных?

а) $y = 5x$ б) $y = \frac{2}{x}$ д) $y = \frac{1}{2}x$

с) $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x}$ е) $y = \frac{1}{3}x + 3$

Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график

- 11** Шестеро работников магазина могут заполнить и украсить витрины за 8 часов. 1) Если сегодня на эту работу отведено 6 часов, то сколько работников нужно привлечь дополнительно? 2) Если сегодня на работу не пришли двое работников, сколько времени потребуется оставшимся для того, чтобы выполнить данную работу?

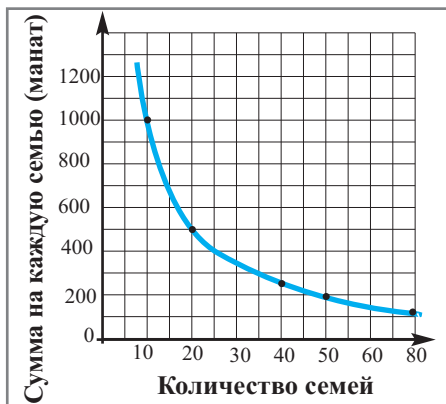
- 12** Жители посёлка решили отремонтировать футбольное поле. Расходы на ремонт составляют 10 000 манат. Чем больше жителей поддержат данный план, тем меньше будут расходы каждой семьи. Эта зависимость представлена в виде графика. Используя график, выполните следующие задания:

1) Сколько манат израсходует каждая семья, если в ремонте примут участие:
а) 10 семей; б) 20 семей?

2) Сколько семей должны принять участие в ремонте, если расход каждой семьи будет: а) 400 манат; б) 200 манат?

3) Составьте таблицу, в которой будет отражена информация о точках на графике. Запишите соответствующую обратно пропорциональную зависимость.

4) Представьте информацию, соответствующую координатам (5;2000).



- 13** Решите задачи на обратно пропорциональную зависимость. Объясните, какой информации в каждой задаче соответствует постоянная k ?

а) Запас корма, имеющегося на ферме, хватит 60 коровам на 10 дней. На сколько дней хватит этого корма, если фермер продаст 10 коров?

б) Водитель может проехать расстояние между двумя пунктами за 7 часов, двигаясь со скоростью 60 км/ч. Но он подумал, что если будет ехать со скоростью 75 км/ч, то сэкономит минимум 1,5 часа. Верно ли его предположение?

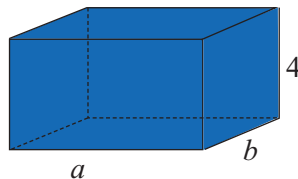
в) Ширина дачного участка прямоугольной формы 14 м, а длина 60 м. Длина второго участка, площадь которого равна площади первого, равна 42 м. Сколько метров составит ширина второго участка?

- 14** Какая из зависимостей является обратно пропорциональной зависимостью?

1) Для школьного праздника было запланировано купить подарков на 200 манат. Число подарков зависит от их цены;

2) Студентка Наили ежедневно тратит на обед 2 маната. Расходы Наили зависят от количества учебных дней.

- 15** Объём прямоугольного параллелепипеда 8 куб.ед. По данным рисунка запишите формулу зависимости b от a .



Обобщающие задания

- 1» При каких условиях рациональное выражение имеет смысл?

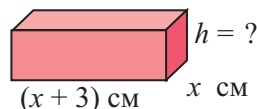
a) $\frac{2(x-1)}{x^2-x}$ б) $\frac{2d(d+1)}{(d+1)(d-4)}$ в) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-b^2}$

- 2» Речные пристани А и В, между которыми курсирует катер, расположены на расстоянии s км друг от друга. Скорость катера в стоячей воде равна v км/ч, а скорость течения реки равна 5 км/ч. Сколько времени t (в часах) потребуется катеру на путь от А до В и обратно? Найдите t , если: а) $s = 60$; $v = 25$; б) $s = 120$; $v = 35$.

- 3» Запишите два рациональных выражения, которые не имеют смысла при значении переменной, равной: а) -2 ; б) -4 и 2 .

- 4» Составьте рациональное выражение, содержащие переменную a в знаменателе, чтобы оно имело смысл при всех значениях переменной a .

- 5» На рисунке указаны размеры основания прямоугольного параллелепипеда. Найдите высоту параллелепипеда, если объём равен $(x^3 + 5x^2 + 6x) \text{ см}^3$.



- 6» Учитель математики обобщил ошибки, которые учащиеся допускали при сложении и вычитании дробей. Найдите ошибки, исправьте и объясните их.

а) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$ б) $\frac{ac+bc}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$ в) $\frac{1}{b-a} = \frac{-1}{a+b}$
д) $\frac{1}{1-\frac{a}{b}} = \frac{1}{a-b}$ е) $\frac{c}{5} - \frac{4-b}{5} = \frac{c-4-b}{5}$

- 7» Зная, что $a^2 - 2a - 6 = 0$, найдите значение выражения $\frac{a^3 + 8}{2a + 4}$.

- 8» Найдите значение выражения $\frac{6-ab^2}{3+b^2} + \frac{2b^2-3a}{3+b^2}$ при $a = -3$, $b = 0,5$.
Есть ли в задании лишние данные?

- 9» Выполните действия.

а) $\frac{x^2-x-6}{4x+4} \cdot \frac{x+1}{x^2-6x+9}$ б) $\frac{2d+8}{d^2+5d+6} : \frac{d+4}{d^2-4}$
в) $\frac{x^3+5x^2-x-5}{x^2-25} : (x+1)$ д) $\frac{n^3-m^3}{n^2-m^2} \cdot \frac{n^2+2nm+m^2}{n^2+nm+m^2}$

- 10» Выполните действия.

а) $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$ б) $\frac{12}{a^2-9} - \frac{3}{a+3} + \frac{2}{3-a}$

Обобщающие задания

11» Выполните действия.

a) $\frac{k^2 - 4}{k^2 - 2k} - \frac{k^2 - 4}{k^2 + 2k}$ б) $\frac{m^2 - 1}{(m + 1)^2} - \frac{m^2 - 1}{(m - 1)^2}$ в) $\frac{a}{a^2 + 2a} + \frac{a}{a^2 - 2a}$
д) $a - \frac{a^2 - 1}{a}$ е) $\frac{a^2}{a + 1} - a + 1$ ф) $\frac{-3}{a - 6} - \frac{-18}{a^2 - 6a}$

12» Упростите.

a) $\frac{x + 1}{x + 2} - \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x}$ б) $\frac{2 - x}{x - 4} + \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4x}$

13» Найдите a и b из тождества $\frac{5}{x^2 + x - 6} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 3}$.

14» Самир и Фидан ищут способ, при помощи которого на числовой оси можно найти число, расположенное на одинаковом расстоянии от двух заданных чисел. Наконец, они установили, что такое число является средним арифметическим данных чисел. Покажите, на различных примерах, что данное предположение верно, а также найдите дробь, равноудалённую от дробей $\frac{4}{x}$ и $\frac{5}{2x}$.

15» Представьте в виде дроби.

a) $yx^{-1} + xy^{-1}$ б) $4 + (4 + m^2) \cdot m^{-1}$ в) $(a + b^{-1}) : (a^{-1} + b)$

16» Упростите.

a) $\frac{a^3 + a^7}{a^{-3} + a^{-7}}$ б) $\frac{x^2 + x^3 + x^4}{x^{-2} + x^{-3} + x^{-4}}$ в) $\frac{x + 1}{x - 1 - 2x^{-1}}$

17» Упростите.

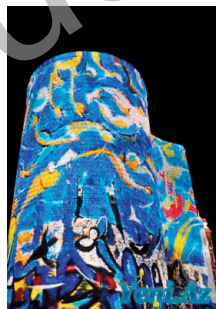
a) $\left(1 + \frac{2}{k(k + 3)}\right) \cdot \left(\frac{k + 1}{k + 3}\right)^{-1}$ б) $\left(1 + \frac{1}{n(n + 2)}\right)^{-1} \cdot \frac{n + 2}{n + 1}$

18» Порядок числа x , заданного в стандартном виде равен 8, а порядок числа y равен -5 . Какой порядок может иметь произведение xy ?

19» При каких значениях k и b гипербола $y = \frac{k}{x}$ и прямая $y = kx + b$ пересекаются в точке: а) $A(2; 1)$; б) $B(-1; 2)$?

20» В рамках третьего Международного фестиваля Искусств «Девичья Башня», проводимого в Баку по инициативе Фонда Гейдара Алиева, при помощи видео-мэппинг (3D mapping) технологий на Девичьей Башне были созданы цветные изображения. Для того, чтобы охватить все 360° поверхности Девичьей Башни вокруг памятника в 7 различных точках были установлены 30 проекторов, с помощью которых проецировалось изображение.

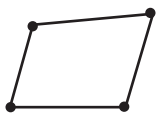
Во время освещения проектором интенсивность света на экране была обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника: $I = \frac{k}{d^2}$, где k постоянная, d расстояние. Проекторы А и В освещают Девичью Башню с одинаковой интенсивностью. Расстояние от А до экрана составляет 5 м, от В до экрана 8 м. Если коэффициент k проектора А равен 27 ед., определите коэффициент k проектора В.



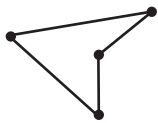
Четырёхугольники

Четырёхугольники

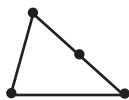
Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. При этом, никакие три из указанных точек не должны быть расположены на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются вершинами четырёхугольника, а соединяющие их отрезки – сторонами четырёхугольника.



Четырёхугольник



Четырёхугольник



Не является
четырёхугольником



Не является
четырёхугольником

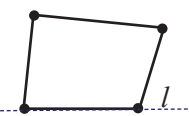
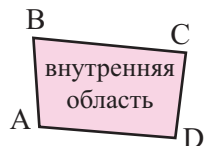
Вершины, являющиеся концами одной стороны четырёхугольника, называются соседними, а вершины, не принадлежащие одной стороне – противоположными. Стороны, имеющие общую вершину, называются соседними сторонами, а не имеющие общих вершин – противоположными сторонами. Отрезки, соединяющие противоположные вершины, называются диагоналями четырёхугольника.

Точки, принадлежащие четырёхугольнику, делят плоскость на два множества, которые образуют две области – внутреннюю и внешнюю.

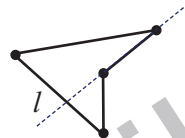
Четырёхугольник называется выпуклым, если все точки, принадлежащие внутренней области, находятся в одной полуплоскости от линии, содержащей любую сторону четырёхугольника, если эти точки находятся в разных полуплоскостях, то четырёхугольник называется невыпуклым (*вогнутым*).

Если соединить любые две точки внутренней области выпуклого многоугольника, то отрезок, соединяющий эти точки, целиком находится во внутренней области четырёхугольника.

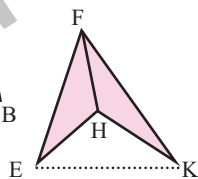
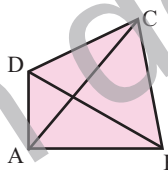
Диагонали выпуклого четырёхугольника находятся во внутренней области. У невыпуклого четырёхугольника одна из диагоналей находится во внешней области. Каждая из двух диагоналей выпуклого четырёхугольника делит его на два треугольника, а у невыпуклого только одна диагональ, делит его на два треугольника.



выпуклый



невыпуклый
(вогнутый)

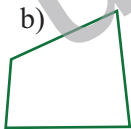


1» Какие из данных фигур являются четырёхугольниками?

a)



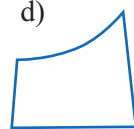
b)



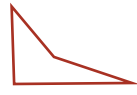
c)



d)



e)

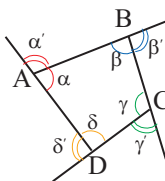


2» Начертите в тетради выпуклый и невыпуклый четырёхугольник и проведите диагонали.

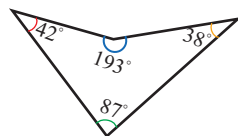
Внутренние и внешние углы четырёхугольника

Внутренние и внешние углы

Угол, смежный любому углу выпуклого четырёхугольника, называется внешним углом. Из любой вершины четырёхугольника можно провести два внешних угла, которые являются вертикальными углами и соответственно равны друг другу. Поэтому, говоря о внешнем угле четырёхугольника, мы будем иметь в виду, один из них. На рисунке для внутренних углов $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, углы $\alpha', \beta', \delta', \gamma'$ являются внешними.

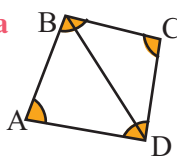


Каждый внутренний угол выпуклого четырёхугольника меньше 180° . Градусная мера внутреннего угла невыпуклого четырёхугольника может быть больше 180° .



Сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника

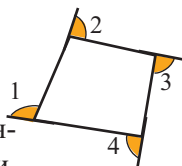
Теорема. Сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360° . $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$



Докажите теорему, основываясь на том, что сумма внутренних углов треугольника равна 180° . Доказательство представьте в виде двухстолбчатой таблицы.

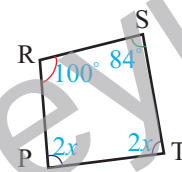
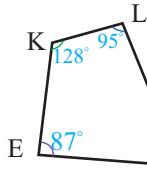
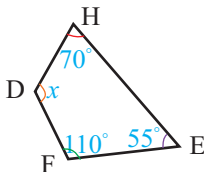
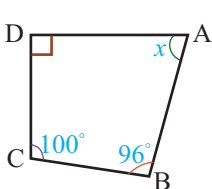
Сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника

Теорема. Сумма внешних углов выпуклого четырёхугольника равна 360° .

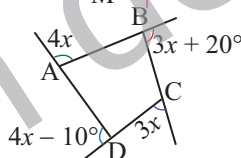


Докажите теорему, опираясь на то, что внешний и внутренний угол, при каждой вершине являются смежными углами.

- 3» Найдите градусную меру неизвестного угла четырёхугольника.



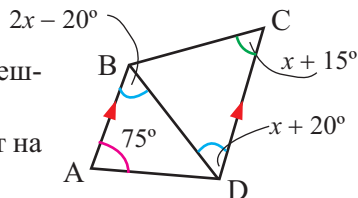
- 4» Найдите градусную меру внутренних и внешних углов четырёхугольника ABCD



- 5» 1) Можно ли построить четырёхугольник со сторонами 5 см, 7 см, 8 см, 11 см и диагональю 13 см?
2) Можно ли построить четырёхугольник со сторонами 3 см, 5 см, 7 см, 14 см и диагональю 13 см?

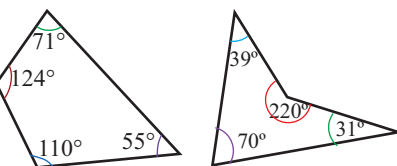
- 6» Найдите градусную меру внутренних и внешних углов четырёхугольника.

Примечание. Стрелка на прямой указывает на то, что прямые параллельны.



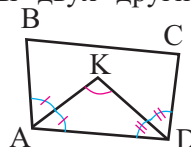
Внутренние и внешние углы четырёхугольника

- 7» Исследование.** Можно ли применить теорему о внешних углах четырёхугольника к невыпуклому четырёхугольнику? При доказательстве используйте полученные вами знания о треугольниках.



- 8» Докажите, что градусная мера одного из углов, образованных биссектрисами двух углов, прилежащих к одной стороне выпуклого четырёхугольника, равна половине градусной меры суммы двух других внутренних углов.**

В четырёхугольнике ABCD отрезок AK и DK — биссектрисы углов A и D соответственно.

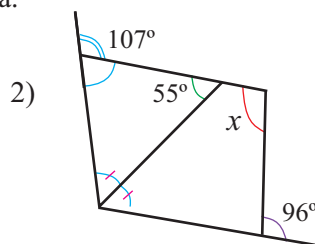
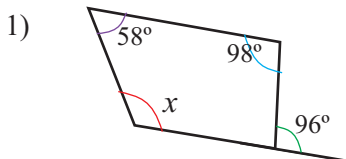


Докажите, что $\angle K = \frac{\angle B + \angle C}{2}$

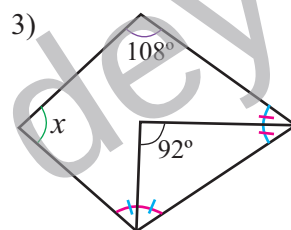
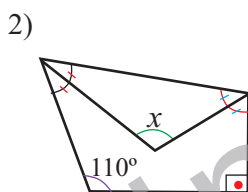
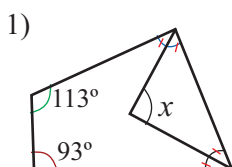
Указание: используйте равенства

$$\angle K + \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle D}{2} = 180^\circ \text{ и } \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle D}{2} = 180^\circ$$

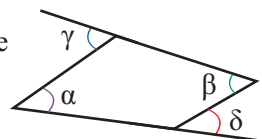
- 9» Найдите значение x , по данным рисунка.**



- 10» Из двух углов, прилежащих к одной стороне четырёхугольника проведены биссектрисы. По данным рисунка найдите значение x .**



- 11» Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.**



- 12» 1)** Градусные меры внутренних углов выпуклого четырёхугольника относятся как 1:2:3:4. Найдите градусные меры внешних и внутренних углов данного четырёхугольника.

2) Существует ли такой выпуклый четырёхугольник, у которого все внутренние углы: а) острые; б) прямые; с) тупые ?

Параллелограмм

Параллелограмм и его свойства

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$

Теорема 1. Противоположные стороны параллелограмма

конгруэнтны. $AB \cong CD, AD \cong BC$

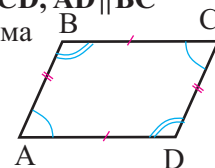
Теорема 2. Противоположные углы параллелограмма

конгруэнтны. $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$

Теорема 3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма

равна 180° . $\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle C + \angle D = 180^\circ$

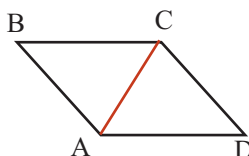
$\angle B + \angle C = 180^\circ, \angle A + \angle D = 180^\circ$



- 1» Доказательство теоремы 1 дополните соответствующими предложениями вместо точек в двухстолбчатой таблице и запишите в тетради.

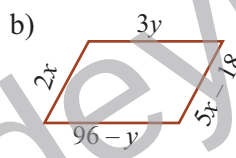
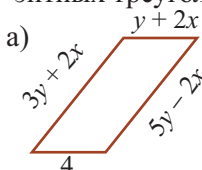
Дано: ABCD – параллелограмм.

Докажите: $AB \cong CD, AD \cong BC$



Предположение	Обоснование
1. ABCD $\square$ - параллелограмм	1. Дано
2. Проведём диагональ AC	2. Через две точки проходит только одна прямая
3. $AB \parallel CD, AD \parallel BC$	3.
4. $\angle BCA \cong \angle DAC, \angle DCA \cong \angle CAB$	4.
5. $AC \cong AC$	5. По свойству конгруэнтности
6. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$	6.
7. $AB \cong CD, AD \cong BC$	7. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников

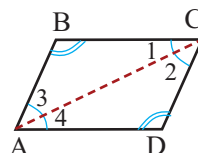
- 2» Для параллелограмма на рисунке найдите значение переменных x и y .



- 3» Докажите теорему 2. Доказательство представьте в виде двухстолбчатой таблицы.

Дано: $\square$ ABCD **Докажите:** $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$.

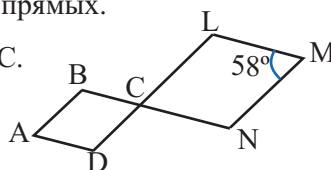
План для доказательства: Доказательство теоремы проведите аналогично доказательству теоремы 1. Используйте конгруэнтность треугольников и свойство накрест лежащих углов при параллельных прямых.



- 4» Отрезки BN и DL пересекаются в точке C. ABCD и CLMN параллелограммы.

Если $\angle M = 58^\circ$, то:

- a) найдите градусную меру $\angle A$;
b) можно ли найти градусную меру $\angle B$?

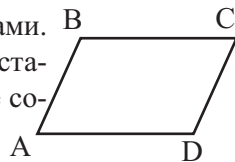


Параллелограмм

- 5» Доказательство теоремы 3 приводится двумя способами.

1-ый способ. Запишите доказательство в тетради, вставив вместо знака вопроса в двухстолбчатой таблице соответствующие предложения.

Дано: $\square ABCD$. **Докажите что,** $\angle A + \angle B = 180^\circ$

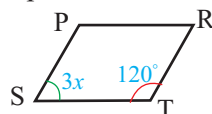


Предположение	Обоснование
1. $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$	1. Противоположные углы параллелограмма
2. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = ?$	2. _____ ? _____
3. $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = ?$	3. По свойству равенства
4. $2(? + ?) = 360^\circ$	4. В соответствии с распределительным законом умножения
5. $\angle A + \angle B = 180^\circ$	5. По свойству равенства

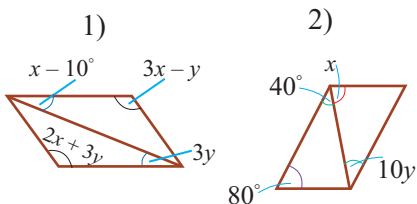
По этому же правилу можно доказать, что сумма углов, прилежащих к другой стороне параллелограмма также равна 180° .

2-й способ. В тетради запишите доказательство, используя свойство углов, образованных секущей и двумя параллельными прямыми.

- 6» Найдите значение переменной x в параллелограмме PRTS.

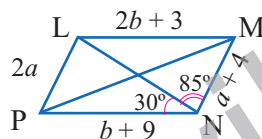


- 7» По данным рисунку найдите значение x и y .



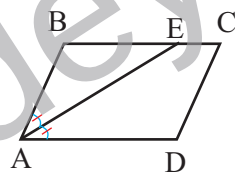
- 8» В параллелограмме PLMN найдите:

- 1) $\angle PLM$
- 2) $\angle LMN$
- 3) PL
- 4) LM

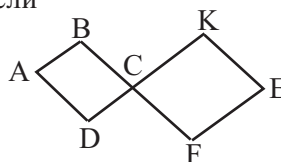


- 9» Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке E.

- 1) Найдите длины отрезков BE и EC, если $AB = 7$ см, $AD = 12$ см.
- 2) Найдите длины сторон параллелограмма, если $BE = 9$ см, $EC = 15$ см.



- 10» **Дано:** Отрезки BF и DK пересекаются в точке C. ABCD и CKEF параллелограммы. **Докажите:** $\angle A \cong \angle E$.



- 11» Биссектриса угла параллелограмма пересекает противоположную сторону под углом 55° . Найдите градусные меры углов параллелограмма.

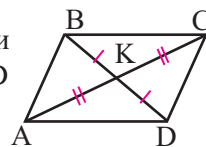
- 12» Один из углов параллелограмма на 40° больше другого. Найдите углы параллелограмма.

Параллелограмм

Свойства параллелограмма

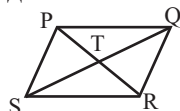
Теорема 4. Диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам. $AK \cong KC$, $BK \cong KD$

Теорема 5. Диагонали параллелограмма делят его на два конгруэнтных треугольника. $\triangle ABC \cong \triangle CDA$

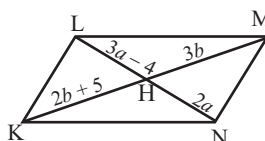


- 13** а) Докажите теорему 4; б) Докажите теорему 5.

- 14** Если $\triangle TSP \cong \triangle TQR$, то докажите, что четырёхугольник PQRS является параллелограммом. Запишите доказательство в виде текста.



- 15** В параллелограмме KLMN найдите длины отрезков:
1) LH 2) LN 3) KH 4) KM



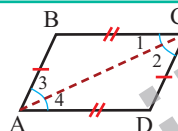
Признаки параллелограмма

Теорема 1. Четырёхугольник у которого две противоположные стороны конгруэнтны и параллельны есть параллелограмм.

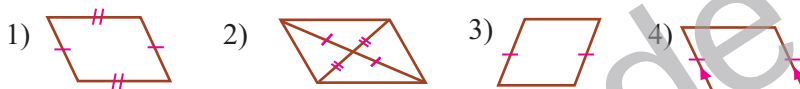
Теорема 2. Четырёхугольник с попарно конгруэнтными сторонами есть параллелограмм.

Теорема 3. Если диагонали четырёхугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник есть параллелограмм.

- 16** Докажите теорему 2. План доказательства теоремы: используйте признаки параллельности прямых и конгруэнтность треугольников.

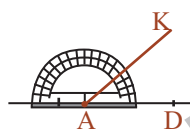


- 17** Данные каких рисунков позволяют установить, что данная фигура действительно является параллелограммом?

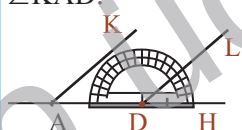


- 18** Исследуйте алгоритм построения параллелограмма по сторонам и углу.

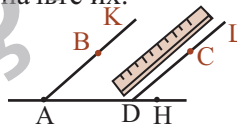
1. Отметьте вершину A и постройте $\angle KAD$.



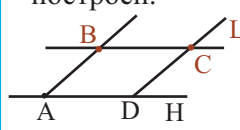
2. Отметьте вершину D и постройте $\angle LDH$, равный $\angle KAD$.



3. На сторонах AK и DL отложите равные отрезки и обозначьте их.



4. Соедините эти точки. Параллелограмм ABCD построен.



- 19** а) Постройте параллелограмм ABCD, если $AB = 5$ см, $AD = 8$ см, $\angle A = 60^\circ$.
б) Постройте параллелограмм ABCD, если $AB = 5$ см, $AD = 8$ см, $BD = 9$ см.

Прямоугольник

Прямоугольник

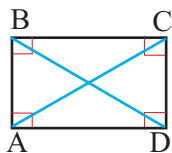
Параллелограмм, все углы которого прямые, называется прямоугольником.

Все свойства параллелограмма относятся к прямоугольнику.

Наряду с этим прямоугольник имеет следующее свойство:

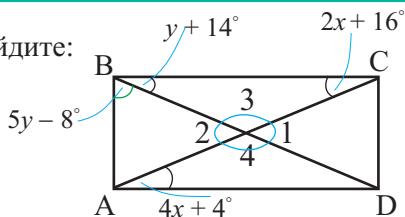
Теорема. Диагонали прямоугольника конгруэнтны. $AC \cong BD$

Признак прямоугольника. Параллелограмм, у которого диагонали конгруэнтны есть прямоугольник.



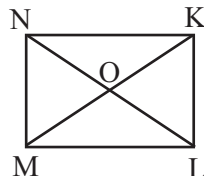
1» По данным прямоугольника ABCD найдите:

- 1) Значения x и y ;
- 2) Углы $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.



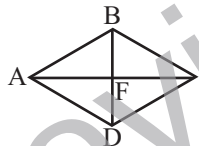
2» MNKL прямоугольник. По данным рисунка, найдите:

- 1) OK если, $NO = 3x + 4$, $OL = 4x - 3$;
- 2) NK если, $ML = 4x - 4$, $NK = 3x + 7$;
- 3) $\angle LKM$ если, $\angle MNL = 2x - 3$, $\angle LNK = x + 6$.



3» 1) ABCD параллелограмм. Какая информации о $\angle BAD$ даёт возможность доказать, что этот параллелограмм является прямоугольником?

2) ABCD параллелограмм. Какая информация о сторонах BD и AC даёт возможность доказать, что этот параллелограмм является прямоугольником?



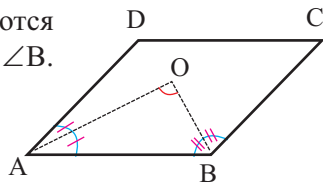
4» Биссектриса угла прямоугольника делит противоположную сторону на отрезки 6 см и 8 см. Найдите периметр прямоугольника. Рассмотрите все возможные случаи.

5» Для постройки нового здания школы выделен участок земли длиной 120 м и площадью 1,2 га. Начертите план этого участка в масштабе 1:1000.

6» а) Начертите и найдите угол между биссектрисами углов, прилежащих к одной стороне прямоугольника.

б) В параллелограмме ABCD AO и BO являются соответственно биссектрисами углов $\angle A$ и $\angle B$. Докажите, что $\angle AOB = 90^\circ$.

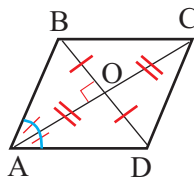
Указание: для доказательства используйте равенство $\angle A + \angle B = 180^\circ$.



Свойства ромба

Параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны, называется ромбом. Все свойства параллелограмма относятся к ромбу. Наряду с этим, ромб обладает следующими свойствами:

Теорема 1. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов и пересекаются под прямым углом.
 $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ABD = \angle CDB$, $AC \perp BD$.



Теорема 2 (Обратная теорема). Параллелограмм, у которого диагонали перпендикулярны, есть ромб.
 Если $AC \perp BD$, то параллелограмм ABCD является ромбом.

Доказательство теоремы 1.

Дано: ABCD ромб.

Докажите, что $\angle BAC = \angle DAC$, $\angle ABD = \angle CDB$, $AC \perp BD$.

Доказательство (словестное): По определению ромба $AB \cong BC \cong CD \cong AD$. При этом, так как ромб является параллелограммом, а диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам, тогда можно записать, что $BO = OD$. $\triangle ABD$ равнобедренный. Медиана AO (так как $BO = OD$), является также и биссектрисой и высотой. Т.е. $\angle BAC = \angle DAC$. Так как $\angle BOC$ является прямым углом, то $AC \perp BD$. Аналогичным образом можно доказать, что $\angle ABD = \angle CDB$.

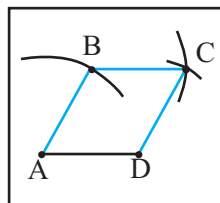
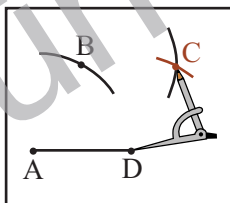
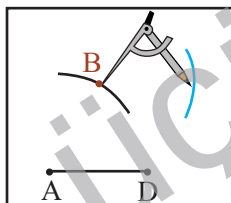
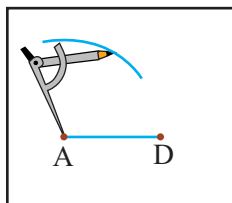
1 1) Исследуйте алгоритм построения ромба.

Начертите отрезок AD. Установите острие циркуля на точке A и начертите дугу радиусом, равным длине отрезка AD.

На дуге отметьте любую точку B. На меня раствора циркуля начертите справа от точки B дугу.

Установите острие циркуля на точке D и не меняя раствора начертите ещё одну дугу. Отметьте точку C пересечения дуг.

Начертите отрезки AB, BC и CD

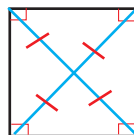


2) Используя свойство, «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам», постройте ромб, диагонали которого равны 3 см и 5 см. Определите алгоритм построения, обсудив каждый шаг.

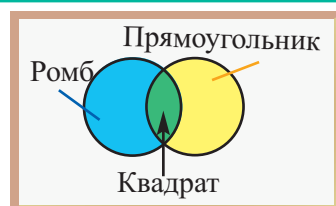
Ромб. Квадрат

Если четырёхугольник является ромбом или квадратом, то справедливы следующие утверждения.

Ромб, квадрат	
Ромб	Квадрат
1. Все свойства параллелограмма действительны для ромба. 2. Все стороны конгруэнтны. 3. Диагонали взаимно перпендикулярны. 4. Диагонали ромба делят его углы пополам.	1. Все свойства прямоугольника и ромба действительны для квадрата. 2. Все углы прямые. 3. Все стороны конгруэнтны. 4. Диагонали равны, взаимно перпендикулярны, делятся точкой пересечения пополам, являются биссектрисами углов квадрата.



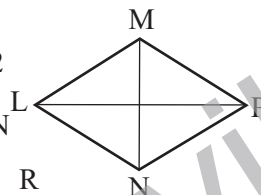
- 2» Поместите свойства фигур в соответствующие области диаграммы Венна. Начертите диаграммы на большом листе бумаги и подготовьте презентацию.



- 3» Эльгюн отрезал деревянный кусок в форме четырёхугольника со стороной 18 см. Какие ещё измерения необходимо выполнить, чтобы убедиться, что он имеет квадратную форму?

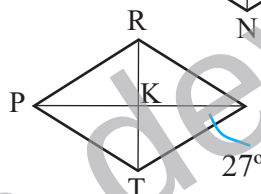
- 4» Если в ромбе $LMPN$ $\angle MLN = \frac{1}{2} \angle LMP$, $MP = 12$

Найдите: 1) $\angle MPL$ 2) $\angle MLN$ 3) $\angle LMP$ 4) MN



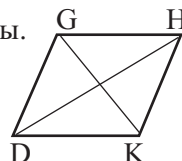
- 5» В ромбе $PRST$ $\angle TSP = 27^\circ$
 $PK = 5n - 2$, $KS = 3n + 2$.

Найдите: 1) $\angle RPK$ 2) $\angle PTS$ 3) $\angle PTK$
 4) PS 5) PK

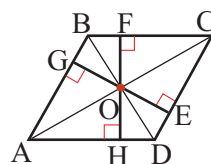


- 6» Запишите доказательство в виде двухстолбчатой таблицы.

Дано: $\triangle DGH$, $\triangle HDK$, $\triangle GHK$, $\triangle GDK$ - равнобедренные.
 Докажите, что $DH \perp GK$.



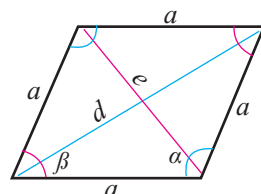
- 7» От точки O пересечения диагоналей ромба $ABCD$ на стороны ромба опущены перпендикуляры. Докажите, что $OG = OF = OE = OH$. Начертите окружность с центром в точке O и с радиусом $r = OH$. Запишите вывод, который следует из данного доказательства.



Ромб. Квадрат

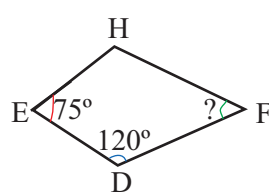
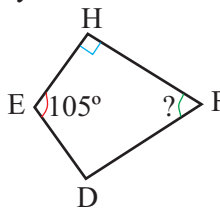
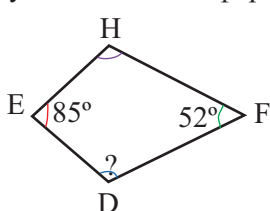
8» Постройте ромб по заданному условию

- 1) $a = 50$ мм, $\alpha = 110^\circ$ 2) $a = 4$ см, $\beta = 60^\circ$
- 3) $d = 4$ см, $e = 3$ см 4) $d = 8$ см, $e = 6$ см



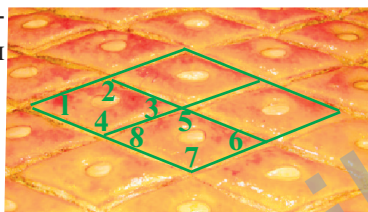
9» **Исследование:** при построении ромба Самир сначала начертил диагонали. Он знает, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. При построении, он забыл, что точка пересечения делит обе диагонали пополам. Однако, его очень обрадовало, что форма полученной фигуры напоминала воздушного змея. Докажите, что противоположные углы четырёхугольника в форме воздушного змея попарно равны.

10» Найдите градусные меры недостающих углов на рисунке, если четырёхугольник имеет форму воздушного змея.



11» Пахлаву нарезают на куски в форме конгруэнтных ромбов. Решите задачи, используя углы, отмеченные на рисунке.

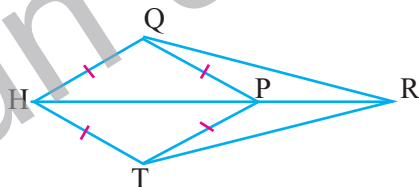
- а) Докажите, что $\angle 3$ и $\angle 6$ соответствующие углы.
- б) Докажите, что $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$



12» а) Конгруэнтны ли ромбы, если стороны одного ромба конгруэнтны сторонам другого ромба?
б) Конгруэнтны ли квадраты, если стороны одного квадрата конгруэнтны сторонам другого квадрата?

13» Рашад собирается построить дом на участке, в форме квадрата площадью 400 м^2 . Он начертил план этого участка в масштабе 1:200. Начертите и вы этот план.

14» Докажите, что $RQ \cong RT$, если $HQPT$ ромб, HP диагональ ромба, а точка R находится на прямой содержащий диагональ HP .



15» Какие из следующих утверждений, верны *всегда*, какие - *иногда*, а какие - *никогда*?

- 1) Прямоугольник есть параллелограмм. 5) Ромб есть квадрат.
- 2) Параллелограмм есть ромб. 6) Ромб есть прямоугольник.
- 3) Квадрат есть ромб. 7) Прямоугольник есть четырёхугольник.
- 4) Квадрат есть прямоугольник. 8) Прямоугольник есть квадрат.

Трапеция

Трапеция

Четырёхугольник, у которого только две стороны параллельны, называется трапецией. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**, не параллельные стороны называются **боковыми сторонами**.

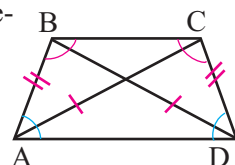
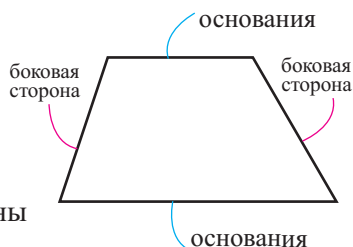
Трапеция, у которой боковые стороны равны называется **равнобедренной трапецией**.

Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основанию называется **прямоугольной трапецией**.

Теорема 1. В равнобедренной трапеции углы, прилежащие к основанию конгруэнтны.

$$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle C$$

Теорема 2. Диагонали равнобедренной трапеции конгруэнтны. $AC \cong BD$



План доказательства **теоремы 2**

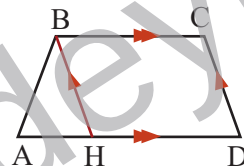
Дано: ABCD равнобедренная трапеция. $AB \cong CD$

Докажите: $AC \cong BD$

Предположение	Обоснование
$AB \cong CD$	Дано
$\angle A \cong \angle D$	По теореме 1
$AD \cong DA$	Общая сторона $\triangle BAD$ и $\triangle CDA$
$\triangle BAD \cong \triangle CDA$	По признаку конгруэнтности СУС
$AC \cong BD$	Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников

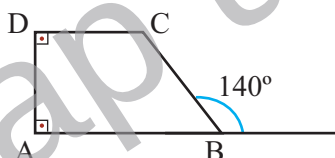
1» План доказательства **теоремы 1**:

Начертите отрезок BH так, чтобы фигура BCDH образовала параллелограмм и докажите, что $BH \cong CD$, $BH \cong AB$. После этого покажите, что $\angle A \cong \angle D$ и $\angle ABC \cong \angle C$.

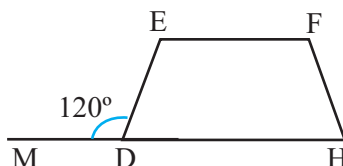


2» Найдите градусные меры внутренних углов трапеции.

1) В трапеции ABCD боковая сторона AD перпендикулярна основанию AB. $\angle CBM = 140^\circ$



2) В равнобедренной трапеции DEFH $\angle EDM = 120^\circ$



Средняя линия треугольника

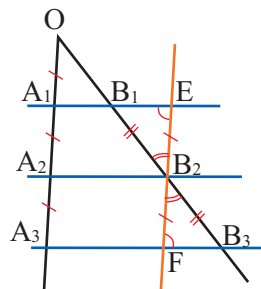
Средняя линия треугольника

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне конгруэнтные отрезки, то они отсекают конгруэнтные отрезки и на другой его стороне. Если $OA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3$, тогда $OB_1 \cong B_1B_2 \cong B_2B_3$

Запишите в тетради доказательство теоремы, заполнив пропущенные строки.

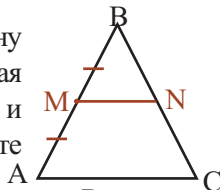
Доказательство: через точку B_2 проведем параллельную прямую к прямой OA_3 .

Предположение	Обоснование
1. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 \cong A_2A_3$	1. Дано.
2. $A_1A_2 \cong EB_2$, $A_2A_3 \cong B_2F$	2.
3. $EB_2 \cong B_2F$	3. $A_1A_2 \cong A_2A_3$
4. $\angle E \cong \angle F$	4.
5. $\angle EB_2B_1 \cong \angle FB_2B_3$	5. Вертикальные углы
6. $\triangle EB_2B_1 \cong \triangle FB_2B_3$	6. Признак УСУ
7. $B_1B_2 \cong B_2B_3$	7.

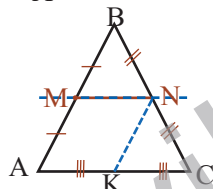


Если в условии теоремы Фалеса, вместо угла взять две произвольные прямые, то результат не изменится.

Исследование: 1) В треугольнике $\triangle ABC$ через точку M - середину стороны AB , проведите прямую параллельную AC : $MN \parallel AC$. Какая фигура получилась? Является ли $AMNC$ трапецией? Измерьте и сравните основания полученной трапеции. 2) Измерьте и сравните длины отрезков BN и NC . Можно ли утверждать, что $BN = NC$?

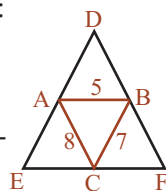


Определение: Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется средней линией этого треугольника. **Теорема.** Средняя линия, соединяющая середины двух сторон треугольника, параллельна третьей стороне и равна ее половине $MN \parallel AC$, $MN = \frac{AC}{2}$.



Доказательство. Пусть дан треугольник $\triangle ABC$ и его средняя линия MN . Проведём через точку M прямую параллельную стороне AC . По теореме Фалеса, она проходит через середину стороны AB , т.е. совпадает со средней линией MN . Т.е. средняя линия MN параллельна стороне AC . Теперь проведём среднюю линию NK . Т.к. $NK \parallel AB$, то четырёхугольник $AMNK$ является параллелограммом. По свойству параллелограмма $MN \cong AK$. По теореме Фалеса $AK \cong KC$. Тогда $MN = \frac{AC}{2}$. Теорема доказана.

- 1) Найдите стороны треугольника, вершины которого являются серединами сторон треугольника со сторонами 4 см, 6 см и 8 см.
- 2) Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его периметр равен 40 см, а средняя линия 5 см.
- 3) Точки A , B и C – середины сторон треугольника DEF . Найдите:
 - a) длины сторон DE , DF , EF ;
 - b) периметр $\triangle DEF$;
 - c) отношение периметров $\triangle DEF$ и $\triangle ABC$;
 - d) докажите, что средние линии треугольника делят его на 4 конгруэнтных треугольника

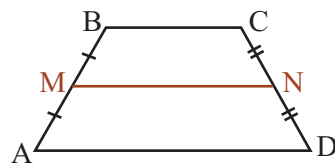


Средняя линия трапеции

Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

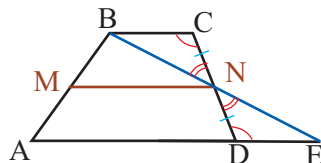
$AM = MB$,
 $CN = ND$,
 MN — средняя
 линия трапеции



Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

$$MN \parallel AD, MN \parallel BC,$$

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

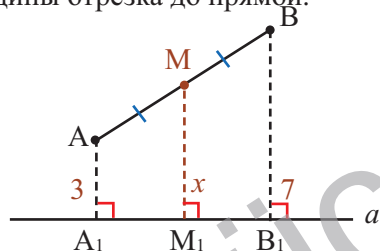


Доказательство: Через точку B и точку N, середину CD проведём прямую и обозначим точку пересечения со стороной AD через E.

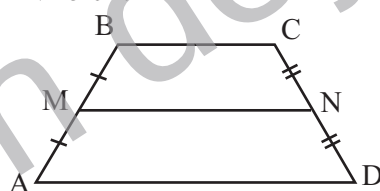
Предположение	Обоснование
1. $CN \cong ND$	1. Согласно построению
2. $\angle C \cong \angle EDN$	2. Внутренние накрест лежащие углы
3. $\angle CNB \cong \angle DNE$	3. Вертикальные углы
4. $\triangle CNB \cong \triangle DNE$	4. По признаку УСВ
5. $BC \cong DE, BN \cong NE$	5. Соответствующие стороны в конгруэнтных треугольниках
6. $MN \parallel AE, MN = \frac{AE}{2}$	6. Отрезок MN средняя линия $\triangle ABE$
7. $MN = \frac{AD + DE}{2}$	7. $AE = AD + DE$
8. $MN = \frac{AD + BC}{2}$	8. $DE \cong BC$

1 Найдите длину средней линии трапеции, если её основания равны 0,6 м и 2,4 м.

2 а) Концы отрезка находятся на расстоянии 3 см и 7 см от прямой a . Найдите расстояние от середины отрезка до прямой.

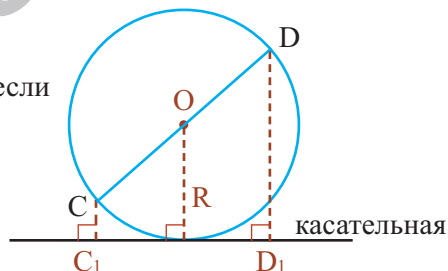


3 MN — средняя линия трапеции ABCD. Найдите основания трапеции, если $BC:AD=2:3$ и $MN=5$ см.



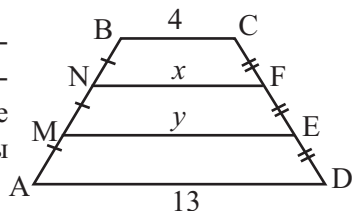
б) Решите соответствующую задачу, если отрезок AB пересекает прямую a .

4 Найдите радиус окружности, если расстояния от концов диаметра до касательной равны 4 см и 8 см.

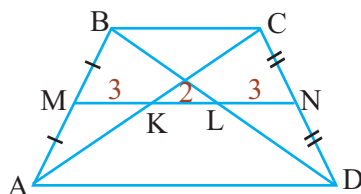


Средняя линия трапеции

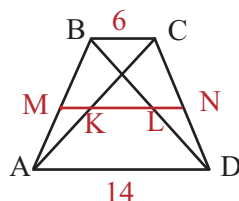
- 5»** В трапеции ABCD точки M и N делят боковую сторону AB на три конгруэнтных отрезка, через которые проведены прямые параллельные основаниям. Найдите длины отрезков ME и NF.



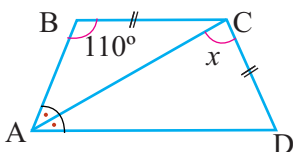
- 6»** MN - средняя линия трапеции. По данным рисунка найдите основания трапеции.



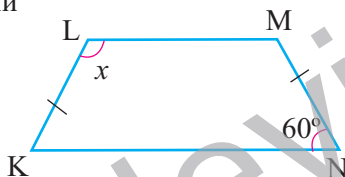
- 7»** Основания трапеции равны 6 см и 14 см. Найдите длину отрезка KL средней линии, заключённого между диагоналями.



- 8»** Дано: ABCD трапеция
BC = CD
AC - биссектриса.
Найдите: $\angle ACD$

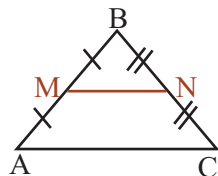


- 9»** Дано: KLMN равнобедренная трапеция,
 $\angle KNM = 60^\circ$, LM = 7 см, NM = 6 см
Найдите: $\angle KLM$ и среднюю линию трапеции

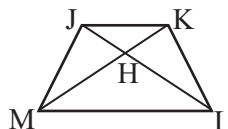


- 10»** Начертите равносторонний треугольник и проведите в нём среднюю линию. Запишите своё мнение от полученных треугольнике и трапеции.

- 11»** MN- средняя линия $\triangle ABC$. Найдите периметр трапеции AMNC, если AB = 10 см, BC = 12 см, AC = 14 см.

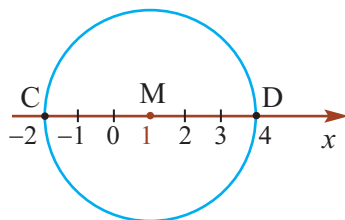


- 12»** Наргиз должна доказать, что если в трапеции MJKL $JM \cong KL$, то $\triangle MJL \cong \triangle LKM$. Решите и вы эту задачу.



Координаты середины отрезка

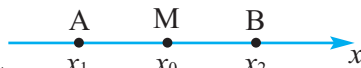
Исследование: Начертите числовую ось. Постройте окружность с центром в точке $M(1)$ радиусом 3 единицы. Вычислите значение выражения $(-2 + 4) : 2$. Есть ли связь между значением данного выражения и координатой точки M ?



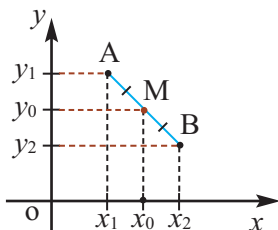
Координаты середины отрезка

1) Пусть на числовой оси заданы точки $A(x_1)$ и $B(x_2)$ и точка $M(x_0)$, которая является серединой отрезка AB .

$AM = |x_0 - x_1|$ $MB = |x_2 - x_0|$ т.к. $AM = MB$, то $x_0 - x_1 = x_2 - x_0$, а отсюда следует, что $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$



2) По теореме Фалеса, если точка M является серединой отрезка AB , то на оси абсцисс точка x_0 является соответственно координатой середины отрезка концы которого находятся в точках x_1 и x_2 .



3) Координаты середины отрезка AB с концами $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ точки $M(x_0; y_0)$ находятся так:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

Убедитесь, что данная формула верна в случае, если отрезок AB параллелен одной из осей координат.

1 Найдите координаты середины отрезка AB .

а) $A(2; 5)$, $B(4; 1)$;

б) $A(-2; 3)$, $B(6; -1)$

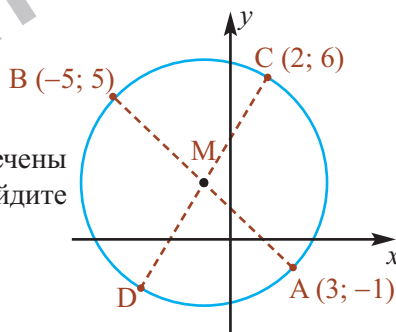
2 Найдите координаты точки B , если точка M является координатой середины отрезка AB . а) $A(2; 1)$, $M(3; 2)$ б) $A(3; -1)$, $M(-1; 1)$

3 Найдите координаты середин сторон треугольника с вершинами $A(0; 0)$, $B(0; 4)$ и $C(-6; 0)$.

4 а) Точки $A(2; 3)$ и $C(4; 1)$ являются противоположными вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

б) Точки $A(1; 3)$, $B(2; 6)$ и $C(5; 7)$ вершины параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты вершины D .

5 На окружности с центром в точке M отмечены точки A, B, C и D . По данным рисунка найдите координаты точек M и D .



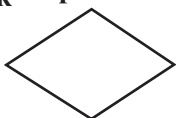
Обобщающие задания

- 1» Начертите в тетради следующие фигуры и все возможные оси симметрии данных фигур. Сколько осей симметрии имеет каждая фигура?

квадрат прямоугольник



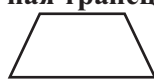
ромб



параллелограмм



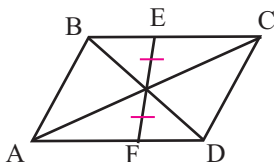
равнобедренная трапеция



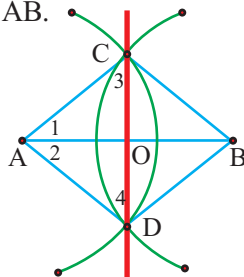
- 2» Найдите углы параллелограмма, если разность двух углов равна:
а) 80° , б) 100° .

- 3» Параллелограмм, периметр которого равен 28 см, разделён диагоналями на 4 треугольника. Разность периметров двух треугольников равна 2 см. Найдите стороны параллелограмма.

- 4» Докажите, что: 1) отрезок прямой между параллельными сторонами параллелограмма, проходящей через точку пересечения диагоналей, делится в этой точке пополам; 2) точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.



- 5» По построению на рисунке $\triangle ABC \cong \triangle BDA$ и $\triangle ACD \cong \triangle BDC$. Докажите, что CD является серединным перпендикуляром отрезка AB.

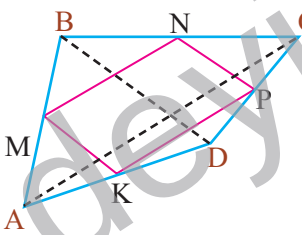


- 6» В четырёхугольнике ABCD точки M, N, P, K являются соответственно серединами его сторон.

а) Что вы можете сказать о взаимном расположении отрезков MN и PK.

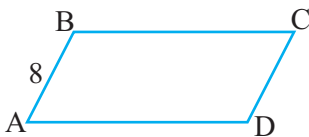
б) К какому виду четырёхугольников относится фигура MNPК?

в) Найдите периметр четырёхугольника MNPК, если в четырёхугольнике ABCD диагональ $AC=8$ см, а $BD=7$ см.



- 7» Докажите, что если соединить середины сторон прямоугольника получится ромб и наоборот, если соединить середины сторон ромба получится прямоугольник.

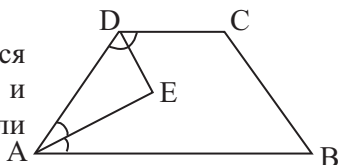
- 8» Параллелограмм на рисунке составлен из двух конгруэнтных равнобедренных трапеций длина боковых сторон которых равна 8 см и средних линий - 12 см.



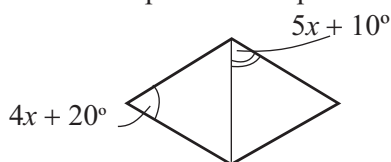
- 1) Разделите параллелограмм на две трапеции, при помощи одной прямой линии.
- 2) Найдите периметры этих трапеций.
- 3) Найдите периметр параллелограмма.

Обобщающие задания

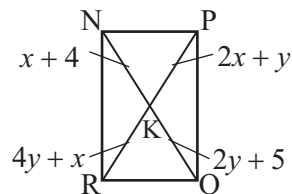
- 9» В трапеции ABCD отрезки AE и DE являются соответственно биссектрисами углов $\angle DAB$ и $\angle CDA$ - и $DE \parallel CB$. Найдите длину CD, если $DE \parallel CB$, $AD = 5$ см, $AB = 12$ см.



- 10» По данным рисунка найдите значение переменной в ромбе.



- 11» По данным рисунка найдите длину диагонали NQ прямоугольника RNPQ.

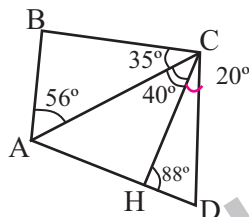


- 12» а) Найдите среднюю линию трапеции, если её периметр равен 24 см, а боковые стороны соответственно равны 4 см и 5 см.

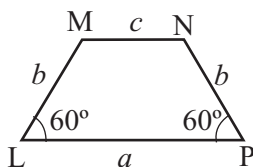
б) Средняя линия трапеции равна $\frac{2}{3}$ части большего основания. Во сколько раз средняя линия трапеции больше её меньшего основания?

- 13» По данным рисунка в закрашенные кружочки впишите знаки $<$, $>$, $=$. Обоснуйте своё мнение.

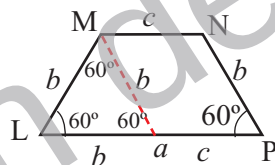
CD ☐ CH
BC ☐ AB
AC ☐ CD



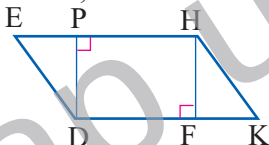
- 14» В равнобедренной трапеции LMNP $LM + NP = LP + MN$. По данным рисунка найдите отношение $a:c$. **Указание:** через вершину M проведите прямую параллельную стороне NP.



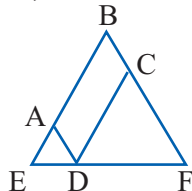
Указание:



- 15» Дано: $\square DEHK$, $FH \perp DK$, $DP \perp EH$. Докажите, что: $\triangle DPE \cong \triangle HFK$.



- 16» Дано: $\square ABCD$, $EB \cong EF$. Докажите, что $\angle F \cong \angle ADC$.



- 17» Точки $N(1;0)$, $K(3;4)$, $L(5;2)$ являются вершинами параллелограмма. Найдите координаты четвёртой вершины. Рассмотрите все возможные случаи.

2.1. Иррациональные числа

2.2. Теорема Пифагора

В этом разделе вы научитесь:

- различать рациональные и иррациональные числа;
- упрощать выражения, содержащие квадратные корни;
- решать задания на извлечение квадратного корня;
- основам теоремы Пифагора;
- решать практические задачи, применяя теорему Пифагора.

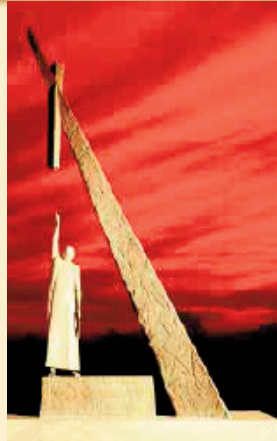
При решении таких задач как вычисления силы шторма на море, скорости автомобиля при аварии, определения места приземления при прыжке с парашютом часто приходится проводить вычисления с числами, стоящими под знаком корня.

Теорема Пифагора очень часто используется при решении геометрических задач.

Это интересно!

Имя Пифагора ассоциируется с прямоугольным треугольником и соотношением между его сторонами. Греческий учёный Пифагор, живший в VI веке до нашей эры, является основателем школы, в которой преподавались музыка, гимнастика, философия и геометрия. Ученики школы называли себя Пифагорейцами. Они провозглашали гармонию музыки и чисел в природе и не верили в существование иррациональных чисел.

На рисунке вы можете увидеть, как Пифагор записывает доказательство своей теоремы на песке.



Функция $y = x^2$ и её график

Практическое занятие. 1) Посмотрите внимательно в течение 2-3-х минут на таблицу. Закройте книгу, а затем, задавая друг другу вопросы типа «Чему равен квадрат числа 5?» или «Квадрат какого числа равен 36?», проверьте, знаете ли вы таблицу наизусть или нет?

$1^2 = 1$	$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$
$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$
$11^2 = 121$	$12^2 = 144$	$13^2 = 169$	$14^2 = 196$	$15^2 = 225$
$16^2 = 256$	$17^2 = 289$	$18^2 = 324$	$19^2 = 361$	$20^2 = 400$
$21^2 = 441$	$22^2 = 484$	$23^2 = 529$	$24^2 = 576$	$25^2 = 625$

2) Заполните таблицу

x	-4	-3	-2	1	0	1		3	
$y = x^2$	16			1	0	1	4		16

3) На координатной плоскости отметьте абсциссы x и соответствующие ординаты y точек из таблицы и соедините их плавной линией, как показано на рисунке.

4) Задайте ещё несколько значений x , например, 1,5; 2,5 и т.д. и найдите соответствующие значения y . Убедитесь, что эти точки действительно расположены на данной линии.

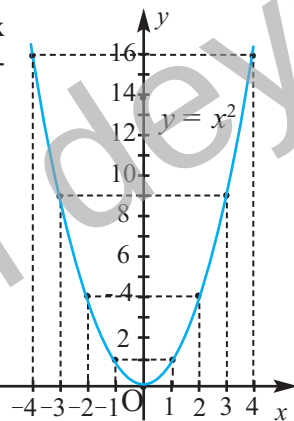
В таблице, которую вы заполнили, показаны некоторые значения аргументов x в 1-ой строке, соответствующие значениям функции y , заданной формулой $y = x^2$, во 2-ой строке. Эта функция определена для всех значений x и не принимает отрицательных значений.

График функции $y = x^2$

Множество точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, образует график.

График функции $y = x^2$ называется **параболой**.

Парабола расположена в верхней полуплоскости (выше оси x) и только одна точка $O(0;0)$ находится на оси абсцисс. Эта точка называется вершиной параболы. Так как $(-x)^2 = x^2$, то каждой точке $A(x;y)$ параболы соответствует точка $B(-x;y)$, симметричная относительно оси ординат. Таким образом, ось ординат является осью симметрии параболы $y = x^2$.



Обучающие задания

1) Какие из точек $M(-2; 4)$, $N(1; 2)$, $K(3; -9)$ расположены на параболе $y = x^2$?

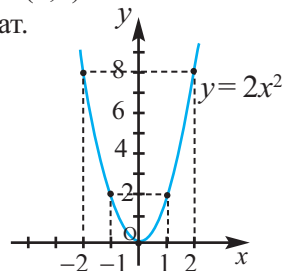
2) По графику функции $y = x^2$ найдите:

- приблизительные значения y , если $x = 0,8$; $x = 1,5$; $x = -1,5$;
- приблизительные значения x , если $y = 2$, $y = 3$, $y = 4,5$.

Квадратные корни. Арифметический корень

- 3» В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 4$. При каких значениях x , точки параболы находятся: а) выше; б) ниже прямой?
- 4» Найдите несколько значений x , при которых значение функции $y = x^2$ будет: а) больше 9; б) меньше 9.
- 5» Найдите координаты точек симметричных точке $A(2;4)$ относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; с) начала координат.
- 6» Исследуйте алгоритм построения функции $y = 2x^2$ и постройте графики функций а) $y = 3x^2$; б) $y = -2x^2$ с) $y = \frac{1}{2}x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8



- 7» При помощи графического калькулятора, расположенного по адресу <http://go.hrw.com/math/midma/gradecontent/manipulatives/GraphCalc/graphCalc.html>, постройте графики функции $y = ax^2$ при положительных и отрицательных значениях a . Обсудите как, расположение графика параболы зависит от знака a .

Арифметический корень

Пример 1: Грядки для овощей имеет форму квадрата со стороной 8 м. Найдите площадь грядки. $S = 8^2 = 64$ (м²)

Пример 2: Найдите сторону грядки, имеющую форму квадрата с площадью 49 м². Этот пример является обратным для примера 1. Обозначим сторону квадрата через x . По условию $x^2 = 49$. Для решения этого уравнения надо найти число, квадрат которого равен 49. Это число равно 7. Однако корнем данного уравнения также является число -7 . Так как длина выражается только положительным числом, то в данном примере выбираем число 7.

- Квадратным корнем из числа a является число, квадрат которого равен a .
- Нахождение квадратного корня из числа называется извлечением квадратного корня.
- Извлечение квадратного корня является обратным к возведению в квадрат.
- Квадратный корень для отрицательного числа не существует.
- 0 - единственное число квадрат которого равен нулю.
- Для положительного числа существует два квадратных корня: один из них положительный, другой - отрицательный. Так, если $b^2 = a$, то $(-b)^2 = (-b) \cdot (-b) = b^2 = a$.
- Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен числу a . Это записывается как $\sqrt{a}$ и читается так: «квадратный корень из a ». Знак " $\sqrt{\quad}$ " - знак арифметического квадратного корня. Выражение, стоящее под знаком корня называется подкоренным выражением.

Например: выражения $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ не имеют смысла (квадрат любого числа неотрицателен). $\sqrt{0} = 0$. $\sqrt{49} = 7$ (так как $7 > 0$ и $7^2 = 49$), $\sqrt{81} = 9$ (т.к. $9 > 0$ и $9^2 = 81$)

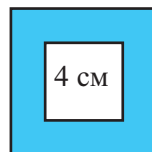
Вообще, если $b \geq 0$, $b^2 = a$, то верно равенство $b = \sqrt{a}$.

Вывод: $(\sqrt{a})^2 = a$ (при $a \geq 0$)

Обучающие задания

1» Найдите сторону квадрата с площадью: а) 64 м^2 ; б) 81 м^2 ; в) $0,36 \text{ см}^2$.

2» Фигура на рисунке состоит из двух квадратов. Площадь части фигуры, закрашенной синим цветом, равна 48 см^2 , сторона маленького квадрата 4 см. Найдите сторону большого квадрата.



3» Верно ли равенство?

а) $\sqrt{36} = 6$ б) $\sqrt{16} = -4$ в) $\sqrt{64} = -8$ г) $\sqrt{0} = 0$

4» Найдите значение корня.

а) $\sqrt{64}$ б) $\sqrt{121}$ в) $\sqrt{0,04}$ г) $\sqrt{1,44}$ д) $\sqrt{0,(4)}$
 е) $\sqrt{\frac{1}{9}}$ ж) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ з) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ и) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ к) $\sqrt{\frac{81}{121}}$

5» Заполните таблицу.

a	4	33	-25	1	2	-2	0,4	0,4	9	64
b	32	-8	26	0,21	0,25	11	0,09	-0,04	16	36
$\sqrt{a+b}$										

6» Вычислите.

а) $\sqrt{144+25}$ б) $\sqrt{144} + \sqrt{25}$ в) $\sqrt{11+\sqrt{25}}$ г) $\sqrt{29-\sqrt{16}}$

7» Найдите значение выражения.

а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25}$ б) $4 \cdot \sqrt{9} - 3 \cdot \sqrt{4}$ в) $\sqrt{0,09} + \sqrt{0,25}$ г) $\sqrt{0,25 - 0,09}$

8» Имеет ли смысл выражение?

а) $\sqrt{25 \cdot 4}$ б) $\sqrt{(-25) \cdot (-4)}$ в) $\sqrt{(-5 \cdot 2)^2}$ г) $\sqrt{-5^2 \cdot 2^2}$

9» При каких значениях x справедливо равенство?

а) $\sqrt{x} = 3$ б) $\sqrt{x} = 4$ в) $\sqrt{x} - 1 = 4$ г) $\sqrt{x} + 4 = 1$

10» Вычислите.

а) $(\sqrt{9})^2$ б) $(-2 \cdot \sqrt{4})^2$ в) $(3 \cdot \sqrt{5})^2$ г) $(-2 \cdot \sqrt{3})^2$

11» Сравните числа.

а) $\sqrt{0,04}$ и $\sqrt{0,09}$ б) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ и $\sqrt{\frac{9}{16}}$ в) $\sqrt{2,56}$ и $\sqrt{3,24}$

12» Впишите в закрашенные кружочки знаки сравнения ($>$, $<$, $=$).

а) $\sqrt{16+9}$ $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ б) $\sqrt{36+64}$ $\sqrt{36} + \sqrt{64}$

Квадратные корни. Арифметический корень

13» Решите уравнения по образцу.

- а) $x^2 = 81$
 б) $x^2 = 3$
 в) $x^2 = 16$
 г) $2x^2 - 10 = 0$

Пример:

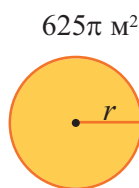
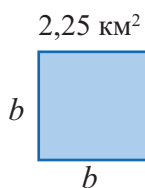
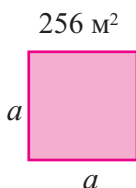
Решим уравнение $x^2 = 6$
 $x^2 - 6 = 0$, $x^2 - (\sqrt{6})^2 = 0$, $(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0$

$$\begin{cases} x - \sqrt{6} = 0 & x_1 = \sqrt{6} \\ x + \sqrt{6} = 0 & x_2 = -\sqrt{6} \end{cases}$$

14» Решите уравнения.

- 1) $x^2 = 1$ 2) $x^2 + 7 = 56$ 3) $12x^2 = 108$ 4) $x^2 - 12 = -4$

15» Найдите размеры фигур по заданной площади.

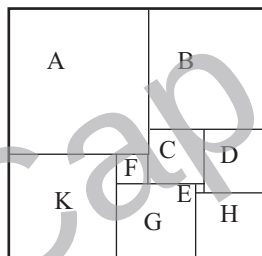


Прикладные задания

16» Площадь равностороннего треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. Найдите сторону треугольника, если его площадь равна $9\sqrt{3} \text{ см}^2$.

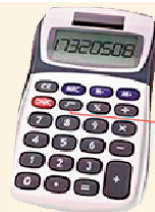
17» Айнур из листа бумаги в форме квадрата со стороной 8 см, вырезала круг. Чему приблизительно равен радиус круга?

18» Лоскутное шитье – это вид шитья, при котором лоскуты ткани скрепляются друг с другом в цельное изделие. В прошлом азербайджанские женщины никогда не выбрасывали кусочки ткани. Из них они делали чехлы для тюфячков, покрывала для кроватей, декоративные скатерти. Все эти вещи служили как для украшения дома, так и помогали сэкономить семейный бюджет. На схеме буквами обозначены части лоскутного одеяла, которое досталось Алие от её бабушки. Каждая часть, кроме А, имеет форму квадрата. По данным рисунка определите, размеры одеяла, если оно имеет форму прямоугольника: площадь части D равна 49 см^2 , площадь части H равна 64 см^2 .



Иррациональные числа

Практическая работа 1. Великий греческий математик, физик, астроном и изобретатель Архимед хотел найти рациональное число, квадрат которого равен 3. С этой целью он выбрал числа $\frac{1351}{780}$ и $\frac{265}{153}$. Проверьте и вы, квадрат какого из данных чисел наиболее близок к числу 3. Придумайте ещё одно число, соответствующее данному условию.



Классификация чисел

Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Каждое рациональное число можно записать в виде конечной или бесконечной десятичной дроби. Верно и обратное предположение. Каждая бесконечная десятичная периодическая дробь выражает рациональное число. Различные десятичные периодические дроби выражают разные числа. Исключения составляют числа, у которых в периоде присутствует цифра 9. Такого типа запись подразумевает периодическую дробь с цифрой 0 в периоде. Например, $0,(9) = 0,999... = 1,000... = 1,(0) = 1$
 $3,1(9) = 3,1999... = 3,200... = 3,2$

Каждую конечную десятичную дробь можно записать в виде бесконечной десятичной периодической дроби с цифрой 0 в периоде. Но есть такие числа, которые невозможно представить в виде десятичной периодической дроби. Бесконечная десятичная непериодическая дробь выражает число, которое не является рациональным. Такие числа называются **иррациональными числами**.

Иррациональное число невозможно представить в виде $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$). Приведём примеры иррациональных чисел:

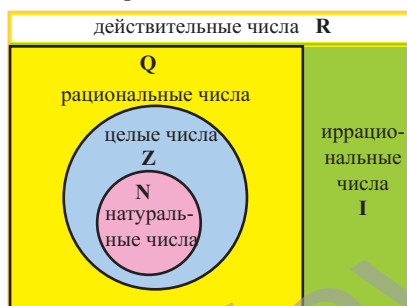
- а) 0,1010010001... (количество нулей после каждой единицы увеличивается на один);
- б) 0,123456789101112... (в дробной части записана последовательность натуральных чисел);
- в) $\pi = 3,14159265...$ (выражает отношение длины окружности к диаметру).

Если n не является точным квадратом какого-либо натурального числа, то $\sqrt{n}$ является иррациональным числом. Например, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ иррациональные числа.

Множество иррациональных чисел обозначается буквой **I**. Арифметические действия над иррациональными числами и их свойства аналогичны рациональным числам.

Множество, состоящее из рациональных и иррациональных чисел, называется множеством действительных чисел, которое обозначается буквой **R**.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}; \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$



Обучающие задания

- 1** Укажите рациональные и иррациональные числа.

5; 2,3; $-\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; 0; π ; 4,(2); $\sqrt{3}$; -2,3(4); $\sqrt{1,21}$; $\sqrt{\frac{4}{9}}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{144}$

0,21211211121... (количество единиц после каждой двойки увеличивается на один).

- 2** Из следующих чисел выберите рациональные числа.

$\sqrt{64}$

$\frac{3}{5}$

$\sqrt{16}$

$\frac{7}{22}$

$\sqrt{12}$

0,8

$\sqrt{27}$

$\sqrt{8}$

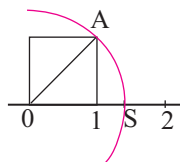
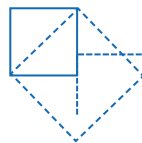
π

$\sqrt{121}$

Иррациональные числа

- 3** Запишите **истинно** или **ложно** каждое из следующих утверждений. Если утверждение ложно, то докажите это на примерах.
- 1) Каждое натуральное число является целым числом.
 - 2) Каждое рациональное число является также и действительным числом.
 - 3) Все делители числа 7 являются нечётными числами.
 - 4) Все отрицательные числа являются целыми числами.
- 4** Ленту длиной 25 м разрезали на равные части. Может ли длина полученных частей быть выражена в виде иррационального числа?
- 5** Пусть заданы числа $a = 32,6378\dots$ и $b = 27,4637\dots$. Найдите приближительную сумму $(a + b)$ и разность $(a - b)$ этих чисел, предварительно округлив их до: а) десятых; б) сотых; в) тысячных.
- 6** В доказательстве, что число $\sqrt{2}$ является иррациональным числом, вставьте соответствующие слова **чётное**, **сократимая**, **несократимая**. Закончив доказательство теоремы, обсудите его в классе.
- Доказательство:** Докажем, что не существует такого рационального числа, квадрат которого равен 2. Допустим обратное. Пусть существует дробь $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), что $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Отсюда $m^2 = 2n^2$. Т.к. $2n^2$ является числом, то и m^2 также является чётным числом, но тогда m также является чётным числом: $m = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$). Учтём это в $m^2 = 2n^2$, получим $4k^2 = 2n^2$, а отсюда, что $n^2 = 2k^2$. Это означает, что n число. Отсюда получается, что дробь $\frac{m}{n}$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. То есть $\sqrt{2}$ является иррациональным числом.
- 7** Укажите такое натуральное значение n , при котором значение выражения $\sqrt{3n+1}$ будет: а) натуральным; б) иррациональным числом.
- 8** Запишите по два рациональных и иррациональных числа, расположенных между числами 2 и 2,1.
- 9** Вычислите приближительное значение длины окружности радиуса 2,5 см, округлив значение числа π до сотых.
- 10** Если a рациональное число, b иррациональное число, то определите, рациональным или иррациональным числом будет: а) $a + b$, б) $a - b$, в) ab , г) $a : b$.

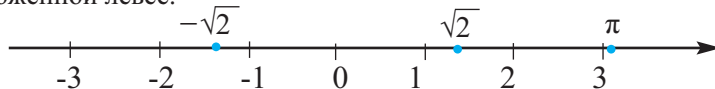
- 11** **Практическая работа.** 1) Начертите квадрат со стороной равной единичному отрезку и проведите диагональ данного квадрата. На диагонали квадрата постройте новый квадрат. Убедитесь, что площадь полученного квадрата в два раза больше площади единичного квадрата. Покажите, что сторона полученного квадрата равна соответственно $\sqrt{2}$.
- 2) Повторите работу по алгоритму, представленному ниже. На координатной оси постройте квадрат, сторона которого равна единичному отрезку. Начертите окружность с центром в точке нуля, радиусом равным диагонали квадрата и отметьте точку пересечения с числовой осью. Объясните связь между соответствующим данной точке числом и длиной диагонали квадрата.



Иррациональные числа

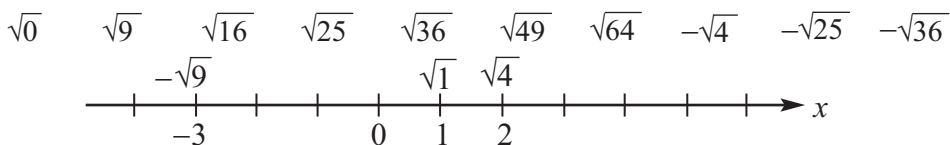
Числовая ось, рациональные, иррациональные числа.

Каждой точке на числовой оси соответствует единственное число (рациональное или иррациональное) и каждому числу, на числовой оси соответствует единственная точка. Опираясь на это числа можно сравнивать. Число, соответствующее точке, которая расположена правее, больше числа, соответствующему точке, расположенной левее.



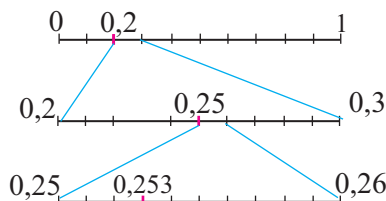
Обучающие задания

- 1) Отметьте точки на числовой оси.



- 2) Используя числовую ось из первого задания, определите приблизительно точки, соответствующие числам $\sqrt{27}$; $\sqrt{38}$; $\sqrt{53}$; $\sqrt{10}$

- 2) Расположение каждой цифры после запятой в десятичной дроби 0,253 изображено шаг за шагом на рисунке. Единичные отрезки на числовой прямой соответственно равны интервалам 0-1; 0,2-0,3; 0,25-0,26.



- 1) В соответствии с данным правилом покажите расположение цифр чисел 0,538; 0,674; 0,128 на числовой оси и запишите, какому интервалу принадлежит каждая цифра.

- 2) покажите на числовой оси расположение четырёх цифр после запятой в числе 0,(8) = 0,8888...

- 3) Сравните числа представив их в виде: а) обыкновенной дроби; б) десятичной дроби.

1) 2,(6) и $\frac{17}{6}$ 2) 0,(3) и $\frac{2}{5}$ 3) 0,2(7) и $\frac{23}{65}$ 4) 0,(54) и $\frac{45}{88}$

- 4) Запишите три рациональных числа, расположенных между двумя дробями.

1) $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{6}$ 2) $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{8}$ 3) $\frac{11}{13}$ и $\frac{6}{7}$

- 5) Выберите два таких множества из множеств $A = \{\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2; \pi; -3\}$; $B = \{2; -3; \sqrt{5}; \sqrt{0}; 0,(2)\}$; $C = \{\frac{2}{3}; 1,2; \sqrt{7}; -3; 2\}$ чтобы: а) их разность состояла из иррациональных чисел; б) их пересечение состояло из целых чисел. Постройте диаграмму Венна для решения задачи.

- 6) А – множество квадратов натуральных чисел не больше числа 20, В – множество делителей числа 60. Найдите а) $A \cap B$, б) $A \setminus B$, в) $B \setminus A$

Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

Практическая работа.

1) При помощи калькулятора вычислите значения $\sqrt{x}$ при заданных значениях x . Округлите их до десятых и заполните таблицу.

x	0	0,5	1	2	3	4	5	7	9
$\sqrt{x}$	0		1			2			3

2) На координатной плоскости отметьте точки из таблицы, с соответствующими координатами, и соедините их плавной линией.

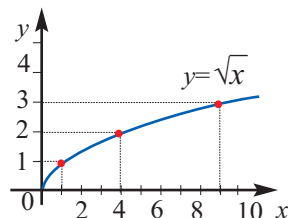
3) Может ли x принимать отрицательные значения?

4) Как изменяются соответствующие значения $\sqrt{x}$, при увеличении значений x ?

Функция $y = \sqrt{x}$ и её график

В таблице, которую вы заполнили, показаны некоторые значения аргументов x в 1-ой строке, соответствующие значению функции y , заданной формулой, $y = \sqrt{x}$ во 2-ой строке. Аргумент функции $y = \sqrt{x}$ определен при всех неотрицательных значениях ($x \geq 0$). Функция также принимает только положительные значения (т.к. не существует квадратного корня из отрицательного числа и арифметический корень принимает только положительные значения).

График функции $y = \sqrt{x}$ похож на ветвь параболы. При $x = 0, y = 0$, т.е. начало координат принадлежит графику. При $x > 0, y > 0$, т.е. график расположен в I четверти. Большему значению x соответствует большее значение y . Например, $\sqrt{3} > \sqrt{2}$; $\sqrt{7} > \sqrt{5}$ и т.д.

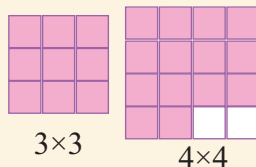


Обучающие задания

- 1) Площадь круга вычисляется по формуле $S = \pi r^2$ или $S = \frac{\pi d^2}{4}$ где r радиус, d диаметр окружности.
Задайте зависимость: а) r от S ; б) d от S .
- 2) Какая из точек $A(9;3)$, $B(64;8)$, $C(-81;9)$, $D(81; -9)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$?
- 3) По графику функции $y = \sqrt{x}$, найдите:
а) y при $x = 10$; б) x при $y = 2,5$.
- 4) Используя график функции $y = \sqrt{x}$ сравните числа.
а) $\sqrt{10}$ и $\sqrt{11}$ б) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{4}$ в) $\sqrt{12}$ и $\sqrt{15}$ г) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{9}$
- 5) В закрашенные кружочки вставьте соответствующие знаки сравнения.
а) $\sqrt{17}$ 4 б) $\sqrt{12}$ 3 в) 7 $\sqrt{50}$ г) $\sqrt{0,1}$ 0,3
- 6) Запишите два последовательных целых числа, между которыми находится число:
а) $\sqrt{2}$ б) $\sqrt{5}$ в) $\sqrt{8}$ г) $\sqrt{10}$
- 7) Определите знак разности.
а) $\sqrt{10} - \sqrt{14}$ б) $\sqrt{7} - \sqrt{8}$ в) $1,4 - \sqrt{2}$ г) $1,8 - \sqrt{3}$
- 8) Расположите числа в порядке возрастания.
а) $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; 1,4; $\sqrt{3}$; 1,8 б) $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$; $-\sqrt{7}$; -3; -1,7

Приближённое значение квадратного корня

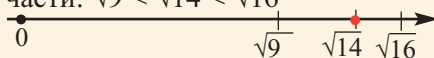
Практическая работа. Какова наибольшая длина стороны квадрата, составленного из 14 одинаковых единичных квадратов? Как вы нашли результат? Между какими последовательными натуральными числами, являющимися точными квадратами, расположено число 14?



Приближённое значение квадратного корня можно найти при помощи калькулятора, но существуют и другие методы. Вычислить приближённое значение квадратного корня можно при помощи числовой оси и чисел, являющихся точными квадратами. Например, найдём при помощи данного метода, $\sqrt{14}$.

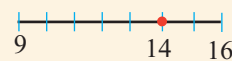
Число 14 расположено между числами 9 и 16. Квадратные корни этих чисел соответственно равны 3 и 4. Целая часть квадратного корня из 14 равна 3. Найдём приближённое значение дробной части: $\sqrt{9} < \sqrt{14} < \sqrt{16}$

На числовой прямой от 14 до 9-ти



5 единиц, от 9-ти до 16 - 7 единиц.

$$\text{Дробная часть числа } \sqrt{14} = \frac{14 - 9}{16 - 9} = \frac{5}{7}$$



Полученное приближённое значение $\sqrt{14} \approx 3 \frac{5}{7} \approx 3,714$

Значение, найденное при помощи калькулятора $\sqrt{14} \approx 3,741$.

Обучающие задания

1 Найдите целую часть чисел. а) $\sqrt{6}$ б) $\sqrt{11}$ в) $\sqrt{17}$ г) $\sqrt{30}$

2 Начертите данную таблицу в тетради и заполните её.

Квадратный корень числа	Числа, наиболее близкие к заданному числу и являющиеся полными квадратами	Между какими двумя последовательными целыми числами расположено число?	Приближённое значение в виде дроби	Приближённое значение в виде десятичной дроби	Значение, найденное при помощи калькулятора
$\sqrt{91}$	$\sqrt{81}$ и $\sqrt{100}$	9 и 10	$9 \frac{10}{19}$	9,526	9,539
$\sqrt{40}$					
$\sqrt{55}$					
$\sqrt{284}$					
$\sqrt{78}$					
$\sqrt{176}$					

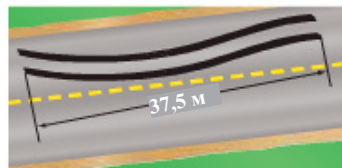
3 Каково наибольшее значение длины стороны квадрата, состоящего из 40 единичных квадратов? Сколько единичных квадратов останется лишними?

4 **Задание открытого типа.** Запишите четыре положительных целых числа, которые выражают площадь квадрата, длина сторон которого расположена между числами 5 и 6. Сравните полученные результаты.

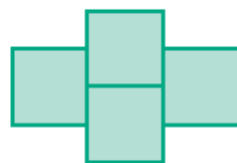
Решение заданий. Иррациональные числа

- 1» Радиус круга с площадью S находится по формуле $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$. Каково приблизительно значение радиуса рамки круглой формы, если её площадь равна 42 см^2 ? ($\pi \approx 3$).
- 2» Футбольный мяч подброшен на высоту h метров. Время, за которое этот мяч падает с заданной высоты, можно найти по формуле $t = \sqrt{\frac{2h}{9,8}}$. Найдите время t , если мяч подброшен на высоту 20 м.

- 3» Автоинспектор для определения скорости движения автомобиля измерил тормозной путь и использовал формулу $v \approx 5,5 \cdot \sqrt{0,75d}$. Найдите скорость автомобиля (м/с), тормозной путь (d) которого изображён на рисунке.



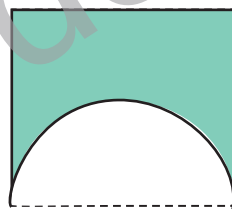
- 4» Фигура на рисунке составлена из одинаковых по размеру квадратов. Площадь фигуры 32 квадратные единицы. Найдите приблизительно длину стороны квадрата.



- 5» Скорость разбега спортсмена по прыжкам в высоту находится по формуле $v \approx 8\sqrt{h}$. Найдите скорость, если высота, которую должен преодолеть спортсмен, равна $h = 6$ м.



- 6» Квадрат площадью 324 м^2 разделён полуокружностью на части. Найдите площадь этой полуокружности. Ответ округлите до десятых.



- 7» Расстояние между наблюдателем и горизонтом находится по формуле $d \approx 113\sqrt{h}$. Здесь h показывает высоту, на которой находится наблюдатель. Найдите расстояние до горизонта, если он находится на:
- а) вершине горы высотой $h = 2,5 \text{ км}$;
 - б) вершине горы Эверест $h = 8,85 \text{ км}$;
 - с) вершине горы Шахдаг $h = 4,23 \text{ км}$.
- Результаты округлите до десятых.

Квадратный корень из произведения и частного

Исследование: Найдите значение выражений $\sqrt{25 \cdot 4}$ и $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$.

Верно ли равенство? $\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$

Проверьте, что соответствующее равенство верно для любых двух неотрицательных чисел.

Квадратный корень из произведения и частного

При $a \geq 0, b \geq 0, \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих же множителей. Это свойство верно и для более двух множителей.

Аналогичным образом можно показать, что при $a \geq 0, b > 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положительный, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

Пример. а) $\sqrt{64 \cdot 0,25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25} = 8 \cdot 0,5 = 4$ б) $\sqrt{\frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при перестановке левой и правой части равенства получим:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ и } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Пример. а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{50 \cdot 18} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = \sqrt{25 \cdot 4 \cdot 9} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$

б) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$

Обучающие задания

1» Найдите значение выражения.

а) $\sqrt{64 \cdot 121}$

б) $\sqrt{0,01 \cdot 144}$

с) $\sqrt{81 \cdot 36}$

д) $\sqrt{2,25 \cdot 0,04}$

2» Найдите значение корня.

а) $\sqrt{\frac{9}{64}}$

б) $\sqrt{\frac{25}{121}}$

с) $\sqrt{5 \frac{1}{16}}$

д) $\sqrt{5 \frac{4}{9}}$

3» Вычислите значение корня.

а) $\sqrt{9 \cdot 81 \cdot 0,36}$

б) $\sqrt{1,44 \cdot 25 \cdot 64}$

с) $\sqrt{5 \frac{4}{9} \cdot 6 \frac{1}{4}}$

4» Вычислите.

а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$

б) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}$

с) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}$

д) $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1,6}$

5» Дополните доказательство, используя равенство $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ при $a \geq 0, b \geq 0$

Предположение	Доказательство
1. $a \geq 0, b \geq 0$	1. Дано .
2. $\sqrt{a} \geq 0, \sqrt{b} \geq 0$	2.
3. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$	3.
4. $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$	4. Степень произведения
5. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	5. По определению арифметического квадратного корня.

Квадратный корень из произведения и частного

6» Вычислите.

- a) $\sqrt{72 \cdot 50}$ b) $\sqrt{50 \cdot 18}$ c) $\sqrt{90 \cdot 3,6}$
d) $\sqrt{2,5 \cdot 14,4}$ e) $\sqrt{16,9 \cdot 0,4}$ f) $\sqrt{45 \cdot 80}$

Пример:

$$\begin{aligned}\sqrt{72 \cdot 32} &= \sqrt{36 \cdot 2 \cdot 32} = \\ &= \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = \\ &= 6 \cdot 8 = 48\end{aligned}$$

7» Вычислите.

- a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ b) $\sqrt{122^2 - 22^2}$ c) $\sqrt{313^2 - 312^2}$ d) $\sqrt{5^2 + 12^2}$

8» Найдите значение произведения.

- a) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50}$ b) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{52}$ c) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$ d) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6}$

9» Найдите значение частного.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ b) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{52}}$ c) $\frac{\sqrt{7,5}}{\sqrt{0,3}}$ d) $\frac{\sqrt{10} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{6}}$

10» Запишите корни в виде произведения.

- a) $\sqrt{15}$ b) $\sqrt{30}$ d) $\sqrt{35}$ c) $\sqrt{21}$ e) $\sqrt{42}$ f) $\sqrt{56}$ h) $\sqrt{14}$

11» Запишите выражение в виде частного.

- a) $\sqrt{\frac{5}{7}}$ b) $\sqrt{\frac{3}{10}}$ c) $\sqrt{\frac{a}{7}}$ d) $\sqrt{\frac{3}{a}}$

12» Вычислите приближённое значение корня, зная что $\sqrt{3} \approx 1,73$:

- a) $\sqrt{75}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{48}$ d) $\sqrt{0,0003}$

13» Вычислите.

- a) $\sqrt{32400}$ b) $\sqrt{44100}$ c) $\sqrt{0,0144}$ d) $\sqrt{0,0049}$

14» Вычислите.

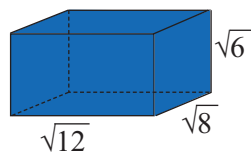
- a) $\sqrt{10} \cdot \sqrt{40}$ b) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ c) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{444}}{\sqrt{111}}$ e) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$

15» Вычислите, применив формулу сокращённого умножения.

- a) $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$ b) $\sqrt{\frac{98}{176^2 - 112^2}}$ c) $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$

16» Найдите площадь прямоугольника, с длиной $\sqrt{48}$ см и шириной $\sqrt{12}$ см.

17» Вычислите объём прямоугольного параллелепипеда по данным на рисунке.



Квадратный корень степени

Квадратный корень степени

Из того, что арифметический квадратный корень не может принимать отрицательных значений, следует что равенство $\sqrt{a^2} = a$ не всегда верно.

Оно верно только для $a \geq 0$; при $a < 0$ верно равенство $\sqrt{a^2} = -a$.

Например, $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = -(-6)$ $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{49} = 7 = -(-7)$

Действительно, при $a \geq 0$ по определению арифметического квадратного корня $\sqrt{a^2} = a$, при $a < 0$ имеем $(-a) > 0$, тогда $\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a$

Таким образом, $\sqrt{a^2} = a$ при $a \geq 0$, $\sqrt{a^2} = -a$ при $a < 0$.

Приняв во внимание, что абсолютное значение числа всегда положительно (или равно нулю) и объединив два равенства, приведённых выше получим следующее $\sqrt{a^2} = |a|$

Для извлечения корня чётной степени подкоренное выражение надо записать в виде квадрата идентичного выражения, а затем применить тождество $\sqrt{a^2} = |a|$

Пример.

1) при $a > 0$, $\sqrt{64a^2} = \sqrt{(8a)^2} = 8|a| = 8a$

2) при $c < 0$, $\sqrt{25c^6} = \sqrt{(5c^3)^2} = 5|c^3| = -5c^3$

3) $\sqrt{3^6 \cdot 4^4} = \sqrt{(3^3)^2 \cdot (4^2)^2} = 3^3 \cdot 4^2 = 3^3 \cdot 4^2 = 27 \cdot 16 = 432$

Обучающие задания

1 Вычислите.

a) $\sqrt{1,5^2}$

b) $\sqrt{(-1,5)^2}$

c) $\sqrt{(-2,3)^2}$

d) $\sqrt{(-3,2)^2}$

2 Заполните таблицу.

x	5	6	0	-3	-9	-5	-6	1,2	-1,2
$\sqrt{x^2}$									

3 Вычислите.

a) $\sqrt{(-3)^6}$

b) $\sqrt{(-6)^4}$

c) $\sqrt{3^6 \cdot (-5)^2}$

d) $\sqrt{(-8)^2 \cdot 3^4}$

4 Вычислите.

a) $\sqrt{2^6} \cdot \sqrt{3^4}$

b) $\sqrt{5^4} \cdot \sqrt{2^6}$

c) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 5^6}{10^4}}$

d) $\sqrt{\frac{5^2 \cdot 3^4}{2^6}}$

5 Упростите.

a) $\sqrt{a^2}$ если, $a > 0$

b) $\sqrt{25x^2}$ если, $x < 0$

c) $\sqrt{16c^2}$ если, $c > 0$

d) $0,5\sqrt{4a^2}$ если, $a < 0$

6 Преобразуйте выражение.

a) $\sqrt{49x^6}$, $x > 0$

b) $\sqrt{36x^6}$, $x < 0$

c) $\sqrt{0,01y^8}$

d) $\sqrt{25x^4}$

7 Представьте подкоренное выражение в виде степени и вычислите значение квадратного корня.

a) $\sqrt{1225}$

b) $\sqrt{3969}$

c) $\sqrt{19600}$

d) $\sqrt{44100}$

8 Упростите.

a) $\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2}$

9 a) Найдите сторону квадрата, если его площадь равна $(1 - x)^2$, при $x > 1$.

b) Упростите выражение $\sqrt{(x - 1)^2} + \sqrt{(x - 3)^2}$ при, $1 < x < 3$.

Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Вынесение множителя из-под знака корня

Пример 1. Сравним числа $\sqrt{50}$ и $4\sqrt{2}$.

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5 \cdot \sqrt{2} > 4\sqrt{2}$$

При решении мы заменили $\sqrt{50}$ на $5\sqrt{2}$. Такое преобразование называется вынесением множителя из-под знака корня.

Пример 2. $\sqrt{8a^3} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a} = 2|a| \cdot \sqrt{2a} = 2a\sqrt{2a}$ (выражение $\sqrt{8^3}$ имеет смысл при $a \geq 0$)

Внесение множителя под знак корня

Пример 3. Сравним числа $\sqrt{73}$ и $6\sqrt{2}$.

Заменяем число 6 на $\sqrt{36}$.

$6\sqrt{2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{72} < \sqrt{73}$. Мы заменили $6\sqrt{2}$ на $\sqrt{72}$. Такое преобразование называется внесением множителя под знак корня.

$$a = |a| = \sqrt{a^2}, \text{ при } a \geq 0, \quad a = -|a| = -\sqrt{a^2}, \text{ при } a < 0$$

Пример 4. а) $-4 \cdot \sqrt{3} = -1 \cdot \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{48}$

б) $a\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$, при $a < 0$

в) $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$, при $a > 0$

Обучающие задания

1» Вынесите множитель из-под знака корня.

а) $\sqrt{12}$ б) $\sqrt{80}$ в) $\sqrt{48}$ г) $\sqrt{18}$ д) $\frac{1}{2}\sqrt{24}$ е) $-3\sqrt{12}$

2» Вынесите множитель из-под знака корня.

а) $\sqrt{50x^3y^2}$, $y > 0$ б) $\sqrt{18x^2y^4}$, $x < 0$ в) $\sqrt{12x^5y^2}$, $y < 0$

3» Внесите множитель под знак корня.

а) $2\sqrt{3}$ б) $-4\sqrt{3}$ в) $3\sqrt{2}$ г) $-4\sqrt{5}$ д) $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{32}$ е) $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$

4» Внесите множитель под знак корня.

а) $c\sqrt{3}$, $c > 0$ б) $c\sqrt{3}$, $c < 0$ в) $x\sqrt{\frac{2}{x}}$ г) $x\sqrt{-\frac{2}{x}}$

5» Сравните числа.

а) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$ б) $2\sqrt{5}$ и $5\sqrt{2}$ в) $5\sqrt{2}$ и $4\sqrt{3}$

6» Расположите числа в порядке возрастания.

а) $6\sqrt{2}$; $\sqrt{58}$; $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{11}$ б) $2\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{29}$

7» Определите знак разности.

а) $7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ б) $6\sqrt{2} - 5\sqrt{3}$ в) $3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}$

8» Найдите целую часть числа.

а) $7\sqrt{2}$ б) $5\sqrt{5}$ в) $-3\sqrt{2}$ г) $4\sqrt{5}$

Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

Сложение и вычитание корней, имеющих одинаковое подкоренное выражение вида $a\sqrt{b}$ и $c\sqrt{b}$ выполняется также как сложение и вычитание выражений $2x$ и $5x$: Если $2x + 5x = 7x$, то и $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$. $3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$ называются подобными корнями.

Задача. Чему равна длина двух досок, если длина одной доски равна $\sqrt{14}$?



$$\sqrt{14} + \sqrt{14} = 2\sqrt{14}$$

Пример. $3\sqrt{8} - 4\sqrt{2} + \sqrt{50} = 3\sqrt{4 \cdot 2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{25 \cdot 2} = 3 \cdot 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot (6 - 4 + 5) = 7\sqrt{2}$

Пример. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - \sqrt{24} = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 - \sqrt{4 \cdot 6} = 3 + 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6} = 5$

Пример. Сократите дробь. $\frac{a^2 - 5}{a^2 + \sqrt{5}a}$

$$\frac{a^2 - 5}{a^2 + \sqrt{5}a} = \frac{a^2 - (\sqrt{5})^2}{a(a + \sqrt{5})} = \frac{(a - \sqrt{5})(a + \sqrt{5})}{a(a + \sqrt{5})} = \frac{a - \sqrt{5}}{a}$$

Обучающие задания

1 Упростите.

- a) $2\sqrt{14} + 5\sqrt{14}$ b) $1,5\sqrt{17} - 0,8\sqrt{17}$ c) $12\sqrt{6} - 5\sqrt{6} - 7\sqrt{6}$
 d) $4,5\sqrt{3} - 0,7\sqrt{3}$ e) $\frac{8}{11}\sqrt{17} - \frac{5}{11}\sqrt{17}$ f) $1,5\sqrt{13} + 1,7\sqrt{13} - 4\sqrt{13}$

2 Найдите сумму целых частей чисел по образцу.

- a) $5\sqrt{2} + \sqrt{18}$ b) $5\sqrt{3} - \sqrt{27}$ c) $\sqrt{75} - \sqrt{48}$ d) $\sqrt{20} + \sqrt{45}$

Образец. Найдём целую часть числа $\sqrt{3} + \sqrt{75}$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} + \sqrt{75} &= \sqrt{3} + \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot (1 + 5) = 6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \\ &= \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108} \approx 10,4 \end{aligned}$$

Таким образом, целая часть заданного числа равна 10.

3 Упростите выражения.

- a) $\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{300}$ b) $3\sqrt{8} - \sqrt{50} + 2\sqrt{18}$
 c) $\sqrt{16n} + \sqrt{25n} - \sqrt{9n}$ d) $\sqrt{3a} - 2\sqrt{12a} + 3\sqrt{75a}$

4 Упростите.

- a) $\sqrt{2x} + \sqrt{9y} + \sqrt{18x}$ b) $2\sqrt{27} + \sqrt{48x} + \sqrt{12x}$
 c) $\sqrt{24} + \sqrt{12} - \sqrt{6} + \sqrt{3}$ d) $\sqrt{4} + \sqrt{50} - \sqrt{32} + \sqrt{36}$

Преобразование выражений, содержащих квадратные корни

5» Выполните действия.

a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{12} + \sqrt{2})$

b) $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$

c) $(4\sqrt{3} - \sqrt{6}) \cdot 2\sqrt{3}$

d) $(\sqrt{12} + 2\sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

6» Упростите.

a) $\sqrt{8} + 5\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{18} + 4\sqrt{2}$

g) $3\sqrt{20} + 2\sqrt{45}$

b) $\sqrt{28} - 5\sqrt{7}$

e) $2\sqrt{54} + 7\sqrt{24}$

h) $\sqrt{50} - \sqrt{200}$

7» Сравните.

Образец: $\sqrt{2} + \sqrt{8} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{10}$

$\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{10}$

$\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{10}$

$3\sqrt{2} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{10}$

$\sqrt{9 \cdot 2} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{10}$

$\sqrt{18} > \sqrt{10}$

1) $\sqrt{5} + \sqrt{5} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{20}$

2) $\sqrt{18} + \sqrt{8} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{54}$

3) $\sqrt{63} + \sqrt{28} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{168}$

4) $\sqrt{200} + \sqrt{200} \text{ } \bullet \text{ } \sqrt{400}$

5) $5\sqrt{27} + 2\sqrt{48} \text{ } \bullet \text{ } 9\sqrt{2}$

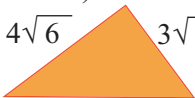
8» Найдите периметры и площади фигур.

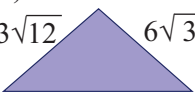
a)  $2\sqrt{5}$
 $8\sqrt{3}$

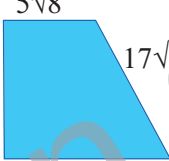
b)  $3\sqrt{8}$
 $9\sqrt{2}$

c)  $4\sqrt{3}$
 $4\sqrt{3}$

9» Найдите периметры фигур.

a)  $4\sqrt{6}$ $3\sqrt{6}$
 $5\sqrt{6}$

b)  $3\sqrt{12}$ $6\sqrt{3}$
 $3\sqrt{27}$

c)  $5\sqrt{8}$ $17\sqrt{2}$
 $15\sqrt{2}$ $9\sqrt{8}$

d)  $2\sqrt{18}$ $15\sqrt{2}$
 $9\sqrt{2}$ $6\sqrt{8}$

10» Упростите.

a) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$

b) $\sqrt{60} + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2})^2$

11» Разложите на множители, применив формулу разности квадратов.

a) $x^2 - 3$

b) $4y^2 - 5$

c) $2 - c^2$

d) $4 - a, a > 0$

12» Сократите дробь.

a) $\frac{x^2 - 2}{x + \sqrt{2}}$

b) $\frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}$

c) $\frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}$

d) $\frac{c\sqrt{c} + c}{c + \sqrt{c}}$

Освобождение знаменателя от иррациональности

Сумма, разность, произведение (кроме умножения на «0») и отношение рационального и иррационального чисел является иррациональным числом. А вот сумма, разность, произведение и отношение двух иррациональных чисел может быть рациональным числом.

Пример: а) При $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$; б) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$
 При $a \geq 0, b \geq 0$ для рациональных выражений a и b верно равенство $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ и $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$. $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ называются сопряженными выражениями. Для избавления от иррациональности в знаменателе, надо числитель и знаменатель дроби умножить на выражение, сопряженное знаменателю.

Пример 1: $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ *Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{6}$ и упростим.*

$$\frac{3}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{3(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{18 - 3} = \frac{(3\sqrt{2} + 3)}{5}$$

Умножим числитель и знаменатель на $(3\sqrt{2} + \sqrt{3})$ По формуле сокращённого умножения Упростим.

Обучающие задания

1 Освободитесь от иррациональности дроби в знаменателе.

1) $\frac{2}{5\sqrt{3}}$ 2) $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$ 3) $\frac{17}{3\sqrt{2} + 1}$ 4) $\frac{4}{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ 5) $\frac{7}{\sqrt{18} + 2\sqrt{2} + 1}$

2 Значения каких выражений является иррациональным числом?

$a = \sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5} - 2}$, $b = \sqrt{3} - \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$, $c = \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$

3 Сравните числа $a = \sqrt{8} - \sqrt{7}$ и $b = \sqrt{7} - \sqrt{6}$.

4 Найдите сумму чисел противоположного и обратного числу $\sqrt{5} - 2$.

5 Вычислите.

1) $\frac{4 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \frac{4 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ 2) $\frac{3 + \sqrt{7}}{3 - \sqrt{7}} + \frac{3 - \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}}$ 3) $\frac{6}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} - \frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

6 Докажите равенство.

$$\frac{1}{3 + \sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2} = 1$$

7 Найдите наибольшее значение дроби $\frac{\sqrt{a} - 3}{a - 9}$.

8 Упростите.

а) $\left(\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} + \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a^2 + b}$ б) $\left(\frac{c - \sqrt{d}}{c + \sqrt{d}} - \frac{c + \sqrt{d}}{c - \sqrt{d}} \right) : \frac{2c\sqrt{d}}{c + \sqrt{d}}$

Обобщающие задания

- 1» Значение какого выражения нельзя представить в виде конечной или бесконечной десятичной периодической дроби?

1) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ 2) $\sqrt{98 \cdot 50}$ 3) $-2\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{\frac{50}{49}}$ 5) $\sqrt{\frac{2}{25}}$

- 2» Значение какого выражения является иррациональным числом?

2) $\frac{\sqrt{18} + \sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ 3) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)^2$ 4) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

- 3» Вычислите.

a) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{9}}}}$ б) $\sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{20 - \sqrt{16}}}}$

- 4» Среди данных чисел найдите наибольшее и наименьшее число.

1) $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{14}$; $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 2) $-\sqrt{7}$; $-3\sqrt{2}$; -2 ; $-\sqrt{\frac{25}{4}}$

- 5» Расположите числа в порядке возрастания.

1) $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $\sqrt{47}$; $\frac{3}{2}\sqrt{8}$ 2) $-\sqrt{8}$; $-2\sqrt{3}$; -3 ; $-\sqrt{\frac{27}{4}}$

- 6» В одной координатной плоскости постройте графики функций $y = x^2$ и $y = 6$. Найдите абсциссы точек пересечения и определите между какими двумя последовательными целыми числами они находятся.

- 7» Закончите предложения, вставив пропущенные слова.

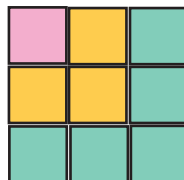
- 1) Между двумя рациональными числами имеется ... рациональное число.
- 2) Между двумя иррациональными числами имеется ... рациональное число.
- 3) Между двумя рациональными числами имеется ... иррациональное число.

- 8» В салоне книжного магазина, имеющего форму квадрата, площадью 225 м^2 , середины двух соседних сторон в одном углу соединены в виде сектора под кафе. Найдите площадь кафе.



- 9» Максимальная скорость, которую может развить человек при беге, зависит от длины ног и приближённо определяется по формуле $l \approx 0,8 v^2$. Здесь, l – длина ноги человека, а v – максимальная скорость. Вычислите приблизительно значение максимальной скорости человека, длина ноги которого равна 64 см.

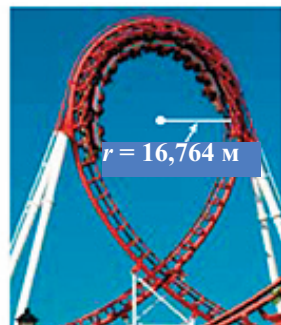
- 10» Учитель математики на вопрос «Сколько вам лет?» ответил так: «Мой возраст может быть представлен в виде суммы последовательных нечётных чисел начиная с 1». Сколько лет может быть учителю? Может ли рисунок справа помочь в решении?



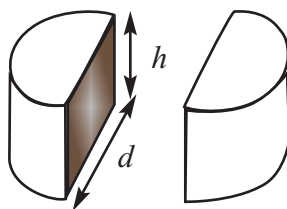
- 11» a) Найдите значение выражения $2b^2 - 14b + 1$, если $b + \sqrt{b} - 3 = 0$.
b) Найдите $|a - b|$, если $a + b = 2\sqrt{6}$, $ab = 2$

Обобщающие задания

- 12»** Скорость движения автомобиля вращающегося в карусели по окружности может быть найдена по формуле $v \approx 3\sqrt{6r}$. Здесь r радиус части карусели. Найдите приблизительно скорость движущегося по этой части автомобиля, используя данные рисунка. Ответ округлите до десятых.



- 13»** Металлическая конструкция цилиндрической формы по длине диаметра основания разрезана на две части, как показано на рисунке. Высота цилиндра равна диаметру основания, а площадь заштрихованной части поверхности равна 8 м^2 . Найдите радиус основания цилиндра.



- 14»** Вычислите.

a) $\sqrt{1,2 \cdot 3,7} \cdot \left(\sqrt{\frac{3,7}{1,2}} - \sqrt{\frac{1,2}{3,7}} \right)$ b) $\left(\sqrt{\frac{7}{6}} - \sqrt{\frac{6}{7}} \right) : \sqrt{42}$

- 15»** Число $\sqrt{150}$ выразите через a и b , если $\sqrt{3} = a$, $\sqrt{2} = b$

- 16»** Запишите два иррациональных числа, чтобы:
- a) их сумма была рациональным числом;
 - b) их произведение было рациональным числом.

- 17»** Найдите значение выражения.

a) $|\sqrt{3} - 3| + |\sqrt{3} + 3|$ b) $|2 + \sqrt{5}| - \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$
c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

- 18»** Во сколько раз сторона квадрата, площадь которого равна 825 дм^2 , больше стороны квадрата с площадью 33 см^2 .

- 19»** Упростите.

a) $\sqrt{4c^2} + 3c$, при $c < 0$ b) $\sqrt{9c^2} + 2c$, при $c > 0$

- 20»** Вычислите.

a) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{68}}{\sqrt{17}}$ b) $\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}} - \sqrt{1,2} \cdot \sqrt{20}$

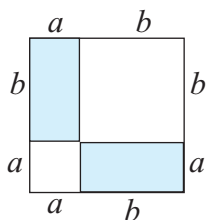
- 21»** **Задача Ал-Караджи.** Найдите такое число, которое при умножение его на $(3 - \sqrt{5})$ в результате даст 1.

Теорема Пифагора

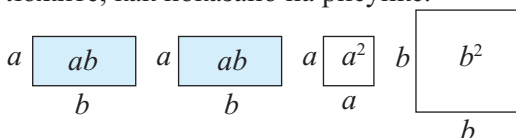
Практическая работа.

Шаг 1. Вырежьте из картона два одинаковых квадрата.

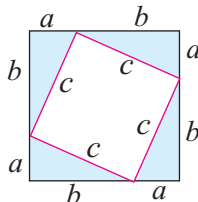
Шаг 2. На стороне одного из них отметьте отрезки a и b , как показано на рисунке и разрежьте его на два квадрата и два прямоугольника.



Шаг 3. Полученные фигуры расположите, как показано на рисунке.

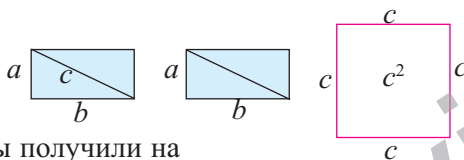


Шаг 4. На сторонах другого квадрата отметьте отрезки a и b , как показано на рисунке и отрежьте четыре прямоугольных треугольника.



Шаг 5. Что вы можете сказать о конгруэнтности данных треугольников? К какому виду относится оставшаяся фигура, после того, как вы отрезали треугольники и убрали их? Чему равен каждый внутренний угол данного четырёхугольника?

Шаг 6. Расположите полученные фигуры, как показано на рисунке.



Шаг 7. Сравните результаты, которые вы получили на 3 и 6 шагах. К какому выводу вы пришли?

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. $c^2 = a^2 + b^2$

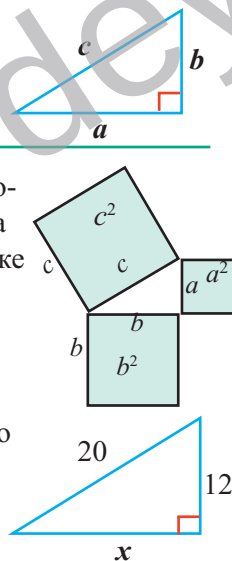
Если рассмотреть площади квадратов, построенных на сторонах прямоугольного треугольника, то теорему Пифагора можно перефразировать так: в прямоугольном треугольнике площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Если в прямоугольном треугольнике заданы две стороны, то третью сторону можно найти по теореме Пифагора.

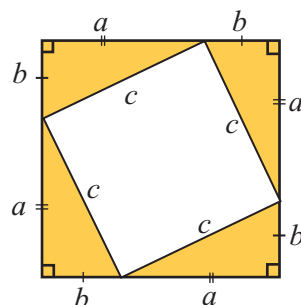
Пример. Найдём длину катета на рисунке:

$$x^2 = 20^2 - 12^2; \quad x^2 = 400 - 144 = 256; \quad x = 16$$

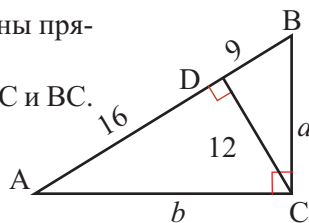


Теорема Пифагора

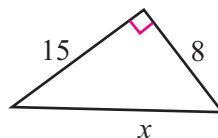
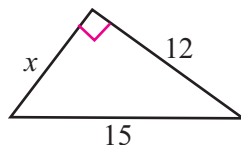
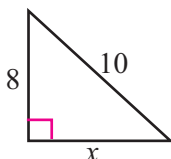
- 1» Известно до 400 различных доказательств теоремы Пифагора. Докажите теорему, используя рисунок справа.



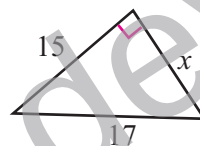
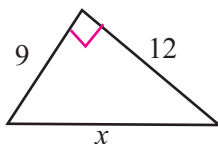
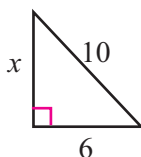
- 2» В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD.
- по данным рисунка найдите длины катетов AC и BC.
 - для $\triangle ABC$ на рисунке запишите теорему Пифагора и проверьте данное равенство.



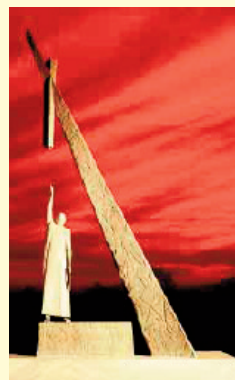
- 3» Примените теорему Пифагора для нахождения неизвестных сторон в следующих прямоугольных треугольниках.



- 4» Примените теорему Пифагора для нахождения неизвестных сторон в прямоугольных треугольниках. Выскажите своё мнение о том какая разница между треугольниками в этом задании и треугольниками задания 3.



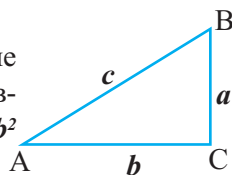
Историческая справка. Пифагор родился в 569 году до нашей эры на острове Самос в Греции. В истории его имя увековечено теоремой, которая называется теоремой Пифагора. Она известна своей простотой и практическим значением. Об этой теореме знали ещё задолго до Пифагора. Однако, из письменных источников следует, что впервые её доказал именно Пифагор. Помимо оригинального доказательства теоремы самим Пифагором, известны также доказательства Эвклида, Леонардо да Винчи, Президента Америки Джеймса Гарфилда. В 1940 году широкой публике была представлена книга, где приводилось 370 доказательств теоремы. На рисунке вы видите статую, возведённую в честь Пифагора на его родине на острове Самос.



Теорема Пифагора

Обратная теорема

Если квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то такой треугольник является прямоугольным треугольником. Если $c^2 = a^2 + b^2$ то, $\triangle ABC$ - прямоугольный.



Прямоугольные треугольники, стороны которых выражаются натуральными числами, называются Пифагоровыми треугольниками. Самый распространённый прямоугольный треугольник имеет стороны 3; 4; 5. Древние египтяне повсеместно пользовались этим треугольником для измерений. Такой треугольник называется Египетским треугольником. Треугольники со сторонами 5,12,13; 8,15,17; 7,24, 25, ... также являются треугольниками Пифагора. А эти числа называются Пифагоровыми тройками. Если числа a, b, c являются Пифагоровыми тройками, то и числа ak, bk, ck ($k > 0$) также являются Пифагоровыми тройками.

1» Какие группы могут выражать стороны прямоугольного треугольника?

- 1) 8, 15, 17 2) 7, 24, 25 3) 20, 21, 31 4) 37, 12, 34
5) $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$ 6) 10, 12, $\sqrt{22}$ 7) 2, 3, 4 8) $\sqrt{7}, 8, \sqrt{71}$

2» 1) Если три натуральных числа, не имеют общего множителя кроме единицы и являются сторонами прямоугольного треугольника, то эти числа называются простыми Пифагоровыми тройками. Запишите простые Пифагоровы тройки в таблице.

a	b	c
5	12	13
10	24	?
15	?	39
?	48	52

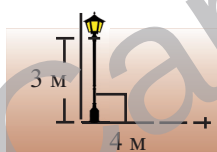
2) Определите правило, по которому изменяются Пифагоровы числа в таблице.

3) Для каждой простой Пифагоровой тройки запишите соответствующие новые тройки.

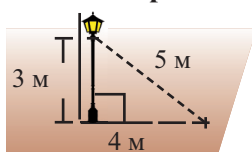
- 1) 8; 15; 17; 2) 9; 40; 41; 3) 7; 24; 25.

3» Длины двух сторон прямоугольного треугольника равны 7 см и 10 см. Найдите возможные значения длины третьей стороны.

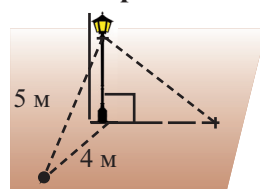
4» Исследование. Как можно, при помощи Пифагоровых троек, проверить, перпендикулярен ли столб со светильником поверхности земли, если его высота равна 3 м? Ответ на вопрос запишите с объяснением отдельно для каждого случая на рисунках.



I измерение.



II измерение.

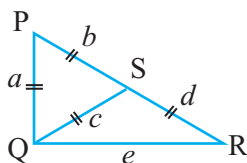


Применение теоремы Пифагора

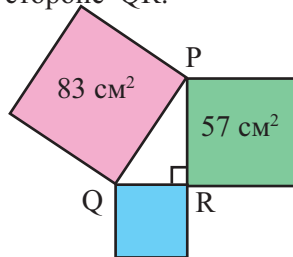
1» Дано: $\triangle PQR$ $a = b = c = d$

1) Докажите, что $\angle PQR = 90^\circ$

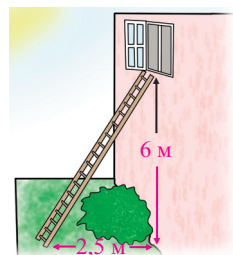
2) Найдите значение e , при $a = 1$.



2» По данным рисунка найдите площадь квадрата построенного на стороне QR.



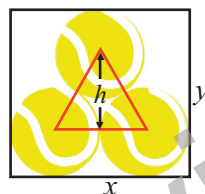
3» Окно второго этажа находится на высоте 6 м. Для того, чтобы подняться на второй этаж, на расстоянии 2,5 м от стены, можно поставить лестницу. Какой длины должна быть эта лестница?



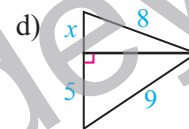
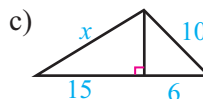
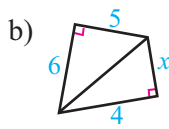
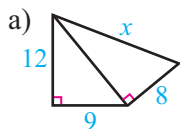
4» Теннисные мячи сложены в коробку, по правилу, как показано на рисунке. Диаметр каждого мяча равен 6 см.

1) Найдите размер коробки, обозначенный через x .

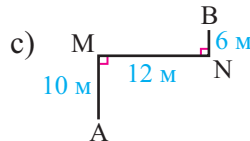
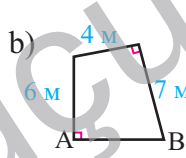
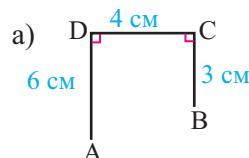
2) Может ли дно коробки иметь квадратную форму? Обоснуйте ответ, найдя y .



5» Найдите неизвестные стороны.



6» Найдите расстояние между точками A и B.



7» Можно ли утверждать, что окно, высота которого равна 180 см, ширина 240 см, а диагональ 300 см имеет форму прямоугольника?

8» Длины сторон прямоугольного треугольника последовательные чётные числа. Найдите стороны треугольника.

Применение теоремы Пифагора

9» Исследование. Многие Пифагоровы тройки начинаются с нечётных чисел.

1) Возведите в квадрат первое число Пифагоровой тройки. Есть ли связь между ним и двумя другими числами?

2) Если Пифагоровы тройки выразить через $x, y, y+1$, то для результата, полученного в пункте 1 выразите y через x .

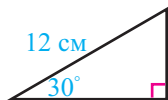
3) Можно ли, по результатам пункта 2, утверждать, что существует бесконечное число Пифагоровых чисел?

4) При помощи программы Excel составьте таблицу всех Пифагоровых троек, если первое число находится в интервале от 3 до 31.

3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61

10» Выполните задания.

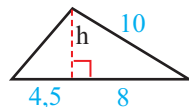
1) Найдите периметр треугольника.



2) Найдите высоту и периметр треугольника.

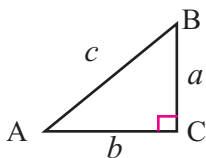


3) Найдите высоту и периметр треугольника.



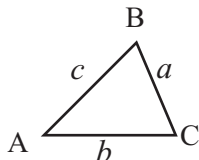
Определение вида треугольника по длинам его сторон

Пусть a, b, c стороны треугольника и $a \leq b \leq c$



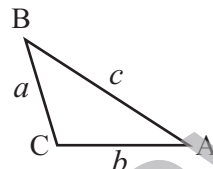
Если $c^2 = a^2 + b^2$,
то $\angle C = 90^\circ$.

$\triangle ABC$ - прямоугольный треугольник.



Если $c^2 < a^2 + b^2$,
то $\angle C < 90^\circ$.

$\triangle ABC$ - остроугольный треугольник.



Если $c^2 > a^2 + b^2$,
то $\angle C > 90^\circ$.

$\triangle ABC$ - тупоугольный треугольник.

11» 1) Можно ли построить треугольник по данным сторонам?

2) Если это возможно, определите, является ли он прямоугольным, остроугольным или тупоугольным. Указание: обоснуйте ответ, записав неравенство треугольника.

1) 16, 18, 26

2) 1; 3; $2\sqrt{2}$

3) 6; 7; 8

4) 8; 12, $4\sqrt{3}$

5) 15, 8, 17

6) 12, 36, 35

7) $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$

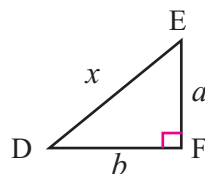
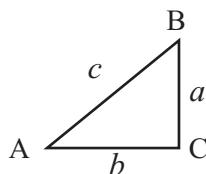
12» Вопрос открытого типа: начертите прямоугольник, диагональ которого в 2 раза больше ширины. Затем найдите длину прямоугольника при помощи теоремы Пифагора. Запишите ширину, длину и отношение диагоналей. Сравните полученные ответы.

Применение теоремы Пифагора

13 Закончите доказательство теоремы, обратной теореме Пифагора.

Дано: $\triangle ABC$, $c^2 = a^2 + b^2$

Докажите, что $\angle C = 90^\circ$



1. Начертим прямоугольный треугольник DEF с катетами a и b . Обозначим гипотенузу через x .

2. $x^2 = ?$

3. $c^2 = a^2 + b^2$

4. $c = x$

5. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

6. $\angle C$ прямой угол

7. $\triangle ABC$ прямоугольный треугольник

В $\triangle DEF$ по теореме Пифагора:

По условию

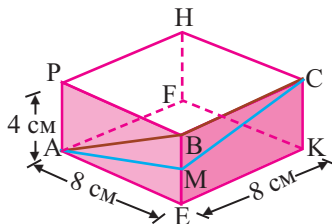
?

$\triangle$ конгруэнтны по признаку _____?

?

?

14 В прямоугольной призме показаны два различных пути между точками A и C. Точка M является серединой ребра BE. Какой из путей короче, путь ABC или AMC?



При помощи теоремы Пифагора можно записать правило, которое связывает стороны треугольников с углами 45° ; 45° ; 90° и 30° ; 60° ; 90° .

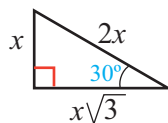
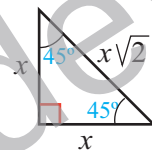
Особые прямоугольные треугольники

Теорема 1. В равнобедренном прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из катетов в $\sqrt{2}$ раза.

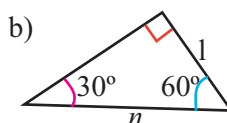
Отношение сторон: $1 : 1 : \sqrt{2}$

Теорема 2. В прямоугольном треугольнике с острым углом 30° гипотенуза в 2 раза больше меньшего катета. Большой катет длиннее меньшего катета в $\sqrt{3}$ раза.

Отношение сторон: $1 : \sqrt{3} : 2$

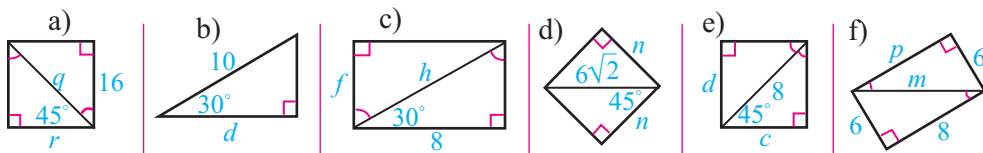


15 Проверьте данные теоремы, решив следующие задачи.



Применение теоремы Пифагора

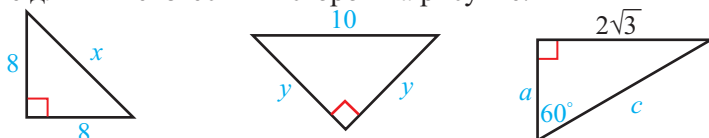
16» Найдите неизвестные длины сторон и диагоналей на рисунках.



17» По данным условиям найдите длины требуемых сторон. При необходимости, ответ округлите до десятых.

- 1) Начертите равносторонний треугольник со стороной 5 см и найдите его высоту.
- 2) Найдите диагональ квадрата, периметр которого равен 24 см.
- 3) Диагонали квадрата равны 16 см. Найдите стороны квадрата.

18» Найдите длины неизвестных сторон на рисунке.



19» Проведите классификацию треугольников со сторонами.

- 1) 4; 4; 7
- 2) 8; 8; $8\sqrt{2}$
- 3) 20; 15; 21

20» Докажите теоремы об особых прямоугольных треугольниках.

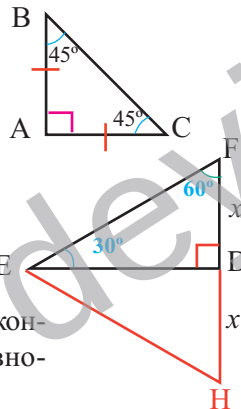
1) Дано: $\triangle ABC$ равнобедренный прямоугольный $\triangle$

Докажите: гипотенуза в $\sqrt{2}$ раза больше длины каждого из катетов.

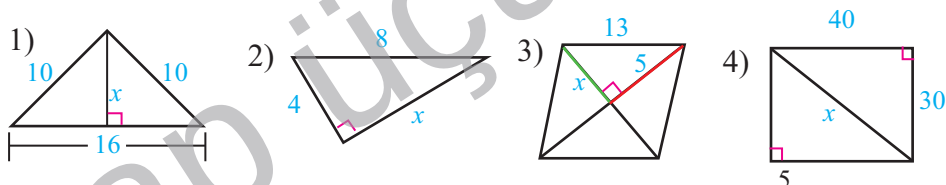
2) Дано: $\triangle EFD$ прямоугольный $\triangle$ с углом 30° .

Докажите: Гипотенуза в 2 раза больше меньшего катета, большой катет в $\sqrt{3}$ раза длиннее меньшего.

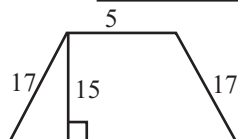
План для доказательства: постройте треугольник конгруэнтный $\triangle EFD$. Докажите, что $\triangle HFE$ является равнобедренным треугольником.



21» По данным рисунка найдите x .

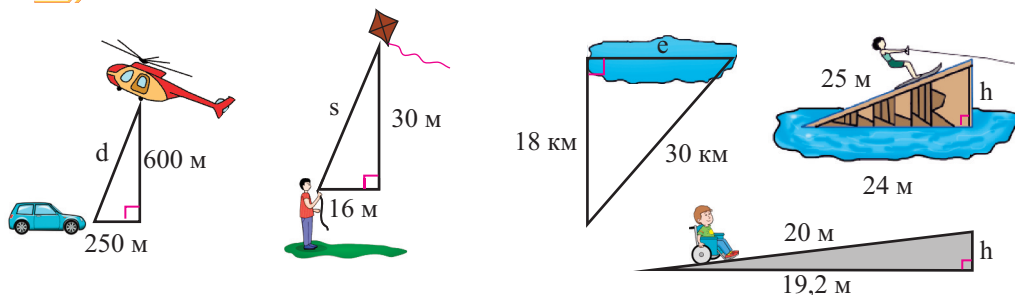


22» По данным рисунка найдите периметр равнобедренной трапеции

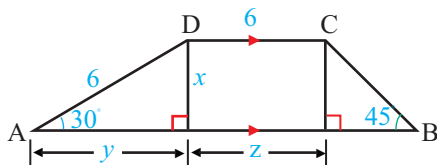


Применение теоремы Пифагора

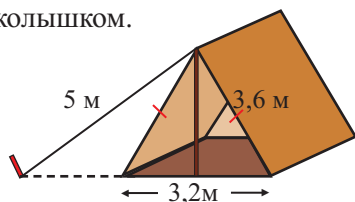
- 23** По данным рисунка найдите длины неизвестных сторон.



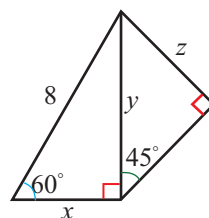
- 24** По данным рисунка найдите неизвестные длины отрезков и периметр трапеции.



- 25** Для того, чтобы увеличить устойчивость палатки, её закрепили железной проволокой, на конце которой находится деревянный колышек, закопанный в землю. Найдите наименьшее расстояние между палаткой и колышком.



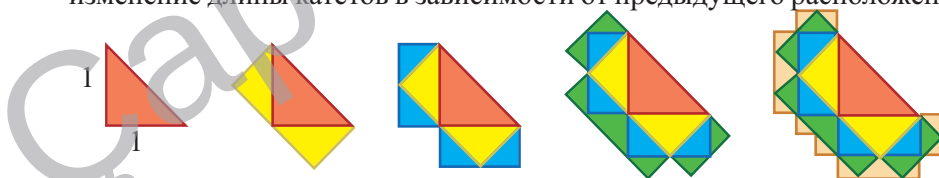
- 26** По рисунку найдите значения x , y , и z .



- 27** Эльчин совершает прогулку по участку прямоугольной формы размерами $50 \text{ м} \times 120 \text{ м}$. За одну секунду он проходит $1,6 \text{ м}$. Он движется то по периметру, то по диагонали. На сколько меньше времени, затратит Эльчин на перемещение из одного угла парка до другого по диагонали, чем на движение по периметру за один период.

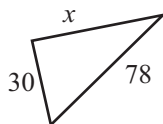
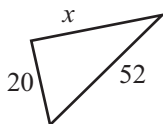
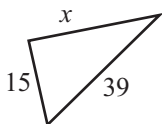
- 28** Гасан начал движение на автомобиле со скоростью 60 км/ч в сторону железнодорожного вокзала в восточном направлении в 14.00 . Через час, в направлении на север, со скоростью 50 км/ч из той же точки начал движение Башир. Какое расстояние будет между ними в 16.00 ?

- 29** **Исследование.** Примите длину катетов на первом шаге за единицу и найдите длину катетов треугольников, добавленных после. Не освобождаясь от иррациональности, найдите правило, по которому происходит изменение длины катетов в зависимости от предыдущего расположения.

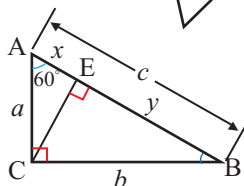


Обобщающие задания

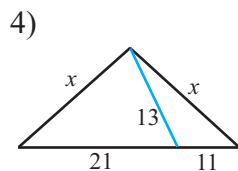
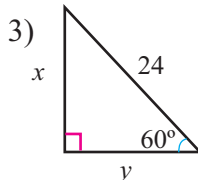
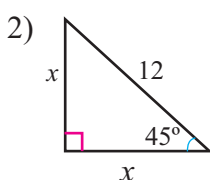
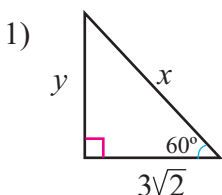
- 1) Вычислите длину неизвестных сторон треугольников, найдите соответствующие сторонам простые Пифагоровы тройки. Указание: найдите общий делитель данных чисел



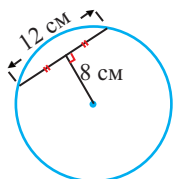
- 2) 1) Если $a = 10$, то найдите y и CE .
2) Если $x = 8$, то найдите a , b , и y .



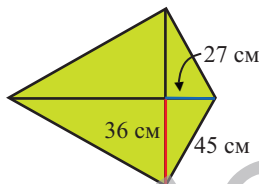
- 3) Найдите длины неизвестных сторон треугольников.



- 4) Расстояние от центра окружности до середины хорды равно 8 см. Длина хорды равна 12 см. Найдите радиус окружности.

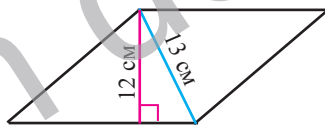


- 5) Как можно проверить, что диагонали фигуры в виде воздушного змея на рисунке перпендикулярны?

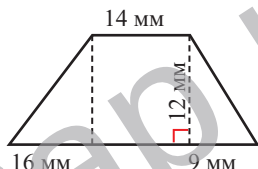


- 6) Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной a .

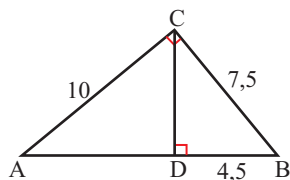
- 7) По данным рисунка найдите сторону ромба.



- 8) По данным рисунка найдите периметр трапеции.



- 9) По данным рисунка найдите длину AD.



- 10) Найдите периметр ромба, диагонали которого равны 12 см и 16 см.

3.1. Квадратные уравнения

3.2. Площади фигур

В этом разделе вы научитесь:

- решать квадратные уравнения различными способами;
- применять квадратные уравнения для решения задач;
- по каким формулам находят площади треугольников и четырёхугольников;
- применять формулы площадей при решении задач;
- находить площадь сложных фигур, разделяя их на простые геометрические фигуры.

Квадратные уравнения широко применяются в строительстве, финансах и дизайне.

На практике также, широко применяются формулы для вычисления площадей.

Это интересно!

Великий учёный Востока аль - Хорезми в своём труде «Китаб мухтасаб ал-джабр и ва-л-мукабала», что в переводе означает «Книга о восполнении и противопоставлении» показал различные способы решения квадратных уравнений. Одним из них является метод подбора. Хорезми выбирал число и подставлял его в уравнение вместо неизвестного. После чего, становилось понятно, является ли данное число корнем уравнения.

Например,

$$c + 9 = 47$$

Пусть $c = 31$,

Тогда $c + 9 = 40$,

$$40 + \boxed{7} = 47$$

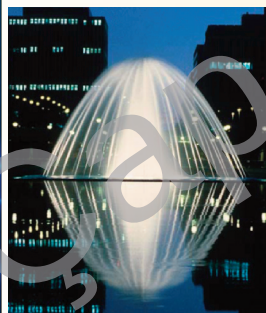
$$c = 31 + 7, c = 38$$

$$3x = 84$$

Для испытания выберем
число $x = 7$

$$3x = 21$$

$$21 \cdot \boxed{4} = 84, x = 7 \cdot 4 = 28$$



Квадратные уравнения

Исследование: В дизайне широко применяется прямоугольники, отношение сторон которых составляют золотую пропорцию. Таким образом, если от прямоугольника отрезать самый большой квадрат, то отношение сторон оставшегося маленького прямоугольника, будет равно отношению сторон данного прямоугольника.

прямоугольник А



Из пропорции $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$ можно написать $x(x-1) = 1$. Отсюда нужно найти корень x уравнения $x^2 - x = 1$ или $x^2 - x - 1 = 0$. Полученное уравнение зависит от одной переменной и наивысшая степень этой переменной равна 2. Такое уравнение называется квадратным уравнением. Для решения задач такого типа, мы должны изучить различные методы решения квадратных уравнений.

Квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ называется квадратным уравнением. Здесь a, b, c - постоянные, x - неизвестная.

a - первый коэффициент, b - второй коэффициент, c - свободный член.

Например, в уравнении $3x^2 - x - 7 = 0$, $a = 3, b = -1, c = -7$.

Если квадратное уравнение с обеих сторон разделить на a , то получим уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Здесь, обозначив $\frac{b}{a} = p, \frac{c}{a} = q$ можно записать

$x^2 + px + q = 0$. Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется **приведённым квадратным уравнением**.

Например, разделив уравнение $2x^2 - 6x - 8 = 0$ на 2, получим равносильное ему приведённое квадратное уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Обучающие задания

1 Выберите квадратные уравнения и для каждого из них запишите коэффициенты.

a) $3x^2 + 4x - 5 = 0$

b) $\frac{3}{4}x^2 - 2x - 3 = 0$

c) $x - 4 = 5$

d) $\frac{6}{x^2} - x + 2 = 0$

e) $6x^2 + x = 0$

f) $-x^2 + 5 = 0$

2 Представьте уравнения в виде $ax^2 + bx + c = 0$.

1) $(x-2)(x+1) = (2x-5)^2 + 1$

4) $(2x-1)^2 = (x-1)(x+7)$

2) $-2(x+5)(x-8) = 0$

5) $4(x-1)^2 + 9 = 0$

3) $(x+3)^2 + 3(2x+1)^2 - 54 = 0$

6) $(3x-2)^2 - 15(2x-2)^2 + 12 = 0$

3 Замените квадратное уравнение равносильным приведённым квадратным уравнением.

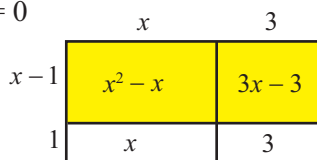
a) $3x^2 + 6x - 12 = 0$

b) $2x^2 - 10x + 12 = 0$

c) $5x^2 - 4x - 1 = 0$

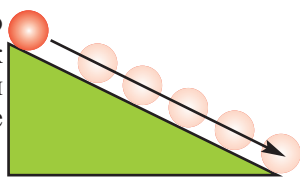
d) $-x^2 + 6x + 3 = 0$

4 На рисунке площадь закрашенной части равна 21 кв. ед. Запишите квадратное уравнение, которое поможет найти длины сторон прямоугольника.



Неполные квадратные уравнения

Исследование. На уроке физики был проведён опыт по изучению движения мяча по наклонной плоскости, как показано на рисунке. Высоту, на которой находится мяч в любой момент t времени, можно найти по формуле $h = -4,9t^2 + 4$.



а) Исследуйте общие и различные особенности формулы, описывающей движение данного вида и квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

б) Для нахождения времени, за которое мяч коснется земли, примите $h = 0$ и решите уравнение $-4,9t^2 + 4 = 0$. Подумайте, какая величина более реальна, в данной формуле, вместо числа 4.

Неполные квадратные уравнения

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$, хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю, то такое уравнение называется неполным квадратным уравнением.

Уравнения, $ax^2 = 0$ ($b = c = 0$), $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0, b \neq 0$), $ax^2 + c = 0$ ($b = 0, c \neq 0$) являются неполными квадратными уравнениями.

1) Решение уравнений вида $ax^2 = 0$. Разделив обе части уравнения на число $a \neq 0$, получим уравнение $x^2 = 0$. Его корнями является $x_1 = x_2 = 0$.

Пример 1. Разделим обе части уравнения $3x^2 = 0$ на 3: $x^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$.

2) Решение уравнений вида $ax^2 + bx = 0$. Для решения таких уравнений применяют вынесение общего множителя за скобку: $x \cdot (ax + b) = 0$.

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, т.е. $x = 0$ или $ax + b = 0$. Отсюда следует, что уравнение $ax^2 + bx = 0$ имеет два корня, один из которых всегда равен «0»: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Пример 2. Для решения уравнения $2x^2 - 5x = 0$ надо левую часть уравнения разложить на множители: $x \cdot (2x - 5) = 0$ $x_1 = 0$; $2x - 5 = 0$; $x_2 = 2,5$.

3) Решение уравнений вида $ax^2 + c = 0$.

Запишем уравнение $ax^2 + c = 0$ в виде $ax^2 = -c$, $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Если a и c имеют одинаковые знаки, то действительных корней нет (почему?). Если a и c имеют разные знаки, то уравнение имеет два корня:

$$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Пример 3. Решим уравнение $4x^2 - 8 = 0$.

$$4x^2 = 8, \quad x^2 = 2, \quad x = \pm\sqrt{2}, \quad x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Обучающие задания

5 Решите уравнение.

1) $2x^2 = 0$; 2) $x^2 - 16 = 0$ 3) $-2x^2 = -50$ 4) $8x^2 = 2x^2$

5) $x^2 - 3 = 0$; 6) $2x^2 + x = 0$; 7) $6x^2 = x$ 8) $3x = 2x^2$

6 Решите уравнение.

а) $4x^2 = 8$ б) $\frac{x^2}{25} - 4 = 5$ в) $7x^2 - 10 = 18$
д) $6x^2 + 3x = 3x^2 - x$ е) $3x^2 - 18 = 2x^2 + 7$ ф) $x^2 = 2x^2 + 2x$

Неполные квадратные уравнения

- 7» Найдите такие значения k , при котором данное уравнение станет неполным квадратным уравнением. Запишите уравнение при соответствующих значениях k и решите его.

a) $2x^2 + (k - 2)x - (k + 6) = 0$ б) $2x^2 - (k + 1)x - 15 + k = 0$

- 8» 1) Квадрат какого натурального числа, равен его утроенному произведению?
2) Найдите периметр прямоугольника, площадь которого 100 м^2 , а длина в 4 раза больше ширины.
3) Чему равен радиус круга площадь которого равна $16\pi \text{ см}^2$?

- 9» Решите уравнение.

a) $\frac{x^2 - 1}{3} + \frac{x^2 + 1}{2} = 3,5$

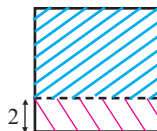
b) $\frac{x^2 - 1}{2} + \frac{x^2 + 5}{6} = \frac{1}{2}$

с) $x^2 + 2x = \frac{2x^2 + 9x}{6}$

d) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}$

Прикладные задания

- 10» От квадрата отрезали полосу шириной 2 см так, что площадь полосы оказалась в 2 раза меньше площади оставшейся части. Найдите сторону квадрата.



- 11» Запишите уравнение вида $x^2 + c = 0$ так, чтобы оно: а) имело два различных корня; б) имело два равных корня; с) не имело действительных корней.

- 12» Покажите, что уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ имеют одинаковые корни.

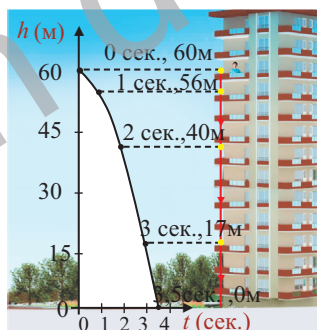
- 13» Садовник хочет превратить клумбу квадратной формы со стороной 7 м, в клумбу круглой формы. При этом площадь должна остаться неизменной.



- 1) Чему приблизительно равен радиус новой клумбы?
2) Запишите зависимость между стороной квадрата и радиусом круга одинаковой площади в общем виде.

- 14» По формуле $h = -4,9t^2 + h_0$ можно найти расстояние (h) между телом, свободно падающим с высоты, и Землёй через t секунд (сопротивление воздуха при этом не учитывается). Здесь h_0 - высота, с которой тело начало падение. Тело достигает поверхность Земли при $h = 0$.

На рисунке изображено падение тела, брошенного горизонтально с высоты 60 м. Тогда время, за которое тело упадёт на землю, можно найти, решив уравнение $-4,9t^2 + 60 = 0$.



Найдите приблизительно время, падения тела с высоты: а) 120 м; б) 250 м? Верно ли высказывание «Данная задача имеет одно положительное и одно отрицательное решение»?

Решение уравнения $x^2 + bx + c = 0$ методом разложения на множители

Для разложения левой части уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на множители надо найти два числа m и n (если это возможно), чтобы их произведение было равно c , а сумма b . Если c и b являются целыми числами, то m и n - также целые числа. В этом случае, если $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, то заданное уравнение можно записать в виде: $(x + m)(x + n) = 0$

Пример 1. $b > 0, c > 0$. В уравнении $x^2 + 6x + 8 = 0$, $b = 6, c = 8$. Так как b и c положительные числа, то надо найти два положительных числа, чтобы их произведение было равно 8, а сумма - равна 6. Это числа 2 и 4.

Зная, что $x^2 + 6x + 8 = (x + 2)(x + 4)$, то уравнение можно записать в виде $(x + 2)(x + 4) = 0$.

Отсюда находим $x_1 = -2, x_2 = -4$.

Пример 2. $b < 0, c > 0$. Так как в уравнении $x^2 - 9x + 18 = 0$, b отрицательное число, а c положительное, то надо найти два отрицательных числа, чтобы их произведение было равно 18, а сумма была равна -9 . Зная, что $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$, то уравнение можно записать так $(x - 3)(x - 6) = 0$.

Отсюда находим $x_1 = 3, x_2 = 6$.

Пример 3. $b > 0, c < 0$. $x^2 + 5x - 14 = 0$

$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$ и $(x - 2)(x + 7) = 0$

Корни уравнения $x_1 = 2, x_2 = -7$.

Пример 4. $b < 0, c < 0$. $x^2 - 4x - 21 = 0$

$x^2 - 4x - 21 = (x - 7)(x + 3)$ и $(x - 7)(x + 3) = 0$

Корни уравнения $x_1 = 7, x_2 = -3$.

Множители числа 8	Сумма множителей
1 и 8	9
2 и 4	6

Множители числа 18	Сумма множителей
-2 и -9	-11
-3 и -6	-9

Множители числа 14	Сумма множителей
2 и -7	-5
-2 и 7	5

Множители числа 21	Сумма множителей
7 и -3	4
-7 и 3	-4

Обучающие задания

1 Решите квадратные уравнения, методом разложения на множители.

1) $x^2 = 64$

5) $x^2 - 4x + 3 = 0$

9) $x^2 - 3x + 2 = 0$

2) $x^2 - 100 = 0$

6) $x^2 + 2x - 3 = 0$

10) $-x^2 + 6x = 0$

3) $x^2 - 9x = 0$

7) $x^2 - 3x - 10 = 0$

11) $x^2 + 18x = -81$

4) $4x^2 - 25 = 0$

8) $x^2 - 6x + 5 = 0$

12) $x^2 + 3x = 18$

2 m_1 и m_2 корни квадратного уравнения, левая часть которого разложена на множители как $(x - m_1)(x - m_2) = 0$. Запишите квадратное уравнение по заданным корням.

1) 1 и -3

2) -8 и -2

3) 3 и -3

4) -5 и 2

5) 2 и $-\frac{1}{3}$

6) $\frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3}$

7) $\frac{5}{4}$ и $\frac{1}{2}$

8) 9 и $\frac{1}{6}$

Пример. 1) 1 и -3; $(x - 1)(x + 3) = 0$; $x^2 + 3x - x - 3 = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$

3 Запишите вместо k такие числа, чтобы уравнение можно было решить методом разложения на множители.

1) $x^2 + kx + 24 = 0$

2) $x^2 + kx + 12 = 0$

3) $x^2 + kx + 27 = 0$

Решение уравнений вида методом разложения на множители

4 Решите уравнения методом разложения на множители.

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$x^2 + 10x + 16 = 0$$

$$y^2 + 13y + 36 = 0$$

$$x^2 + 22x + 40 = 0$$

$$z^2 - 3z - 4 = 0$$

$$x^2 - 13x + 12 = 0$$

$$r^2 - 11r + 18 = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$n^2 - 12n + 27 = 0$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

$$m^2 - 5m - 14 = 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

$$c^2 + 2c - 63 = 0$$

$$x^2 + 10x - 75 = 0$$

$$t^2 - 7t - 44 = 0$$

5 Фарида, Эльмир и Сона записали квадратные уравнения зная, что его корни равны -7 и 5 . Кто из них выполнил задание верно?

Фарида

$$(x + 7)(x - 5) = 0$$

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

Эльмир

$$(x - 7)(x + 5) = 0$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

Сона

$$(x - 7)(x - 5) = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

6 Корни каких уравнений не являются целыми числами?

a) $x^2 - 3x - 18 = 0$

b) $n^2 - 3n + 9 = 0$

c) $r^2 + 2r - 63 = 0$

d) $x^2 + x - 12 = 0$

e) $x^2 + 2x - 13 = 0$

f) $x^2 + 8x + 15 = 0$

7 Площадь прямоугольника равна 28 м^2 . Какие целые числа могут являться сторонами (в метрах) этого прямоугольника?

8 Решите уравнения, разложив левые части на множители, используя формулы сокращённого умножения.

1) $0,25t^2 - 0,16 = 0$

2) $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 54 = 0$

3) $3600z^2 - 4900 = 0$

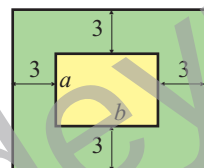
4) $(x - 2)^2 - 15(x - 2) + 56 = 0$

Прикладные задачи

9 1) Запишите площадь жёлтой части на рисунке.

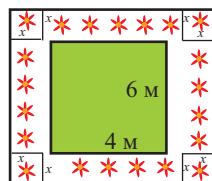
2) Запишите площадь всего рисунка, в виде выражения, разложенного на множители.

3) Запишите площадь зелёной части на рисунке, в виде выражения, разложенного на множители.



10 Размеры декоративной деревянной панели $24 \text{ см} \times 16 \text{ см}$. По краям панели приклеена деревянная рамка, площадью 276 см^2 . Найдите ширину рамки. Нарисуйте соответствующий рисунок.

11 Дядя Таир, по краям сада, размеры которого $4 \text{ м} \times 6 \text{ м}$ посадил цветы. Тем самым он увеличил площадь участка, на величину равную площади сада. Найдите ширину цветника.



12 1) Как при разложении трёхчлена $x^2 + bx + c$ на множители учитывается знак коэффициента c ? Обобщите, подобрав соответствующие примеры.
2) При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx + 7 = 0$ являются целыми числами?

Решение уравнений вида $ax^2 + bx + c = 0$ методом разложения на множители

Для разложения левой части уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на множители, надо найти два числа, чтобы их произведение было равно ac , а сумма b . Тогда заданное уравнение можно решить записав его в виде $(ax + m)(x + \frac{n}{a}) = 0$

Пример 1. Запишем уравнение $2x^2 + 6x + 4 = 0$ в виде

$$2x^2 + 6x + 4 = 2x^2 + mx + nx + 4$$

Числа m и n такие, что $mn = ac$, $m + n = b$. Тогда

$$mn = 2 \cdot 4 = 8, m + n = 6 \text{ и } 2x^2 + mx + nx + 4 =$$

$$= 2x^2 + 2x + 4x + 4 = (2x^2 + 2x) + (4x + 4) = 2x(x + 1) +$$

$$+ 4(x + 1) = (x + 1)(2x + 4), (2x + 4)(x + 1) = 0$$

$$2x + 4 = 0, x_1 = -2; x + 1 = 0, x_2 = -1.$$

Множители числа 8	Сумма множителей
1 и 8	9
2 и 4	6

Пример 2. Решим уравнение $4x^2 - 13x + 10 = 0$. В нём $a = 4$, $b = -13$, $c = 10$, тогда $ac = 4 \cdot 10 = 40$, $b = -13$, а значит оба числа m и n отрицательные. Найдём два целых отрицательных числа, произведение которых равно 40, а сумма равна -13 . Это числа -5 и -8 .

$$4x^2 - 13x + 10 = 4x^2 - 5x - 8x + 10 =$$

$$= x(4x - 5) - 2(4x - 5) = (4x - 5)(x - 2)$$

$$(4x - 5)(x - 2) = 0,$$

$$4x - 5 = 0, x_1 = 1,25, x - 2 = 0, x_2 = 2$$

Множители числа 40	Сумма множителей
-4 и -10	-14
-5 и -8	-13

Пример 3. В трёхчлене $4x^2 - 5x + 4$ $mn = 16$,

$m + n = -5$. Составим список целых отрицательных множителей числа 16. Как видно целых чисел, которые удовлетворяют условию $mn = 16$,

$m + n = -5$ не существует. Это говорит о том, что данный трёхчлен невозможно разложить на множители.

Множители числа 16	Сумма множителей
-4 и -4	0
-2 и -8	-10
-1 и -16	-17

Обучающие задания

13 Начертите в тетради таблицу и заполните её.

Множители квадратного трёхчлена	$ax^2 + mx + nx + c$	$ax^2 + bx + c$	$m + n = b$	$mn = ac$
$(2x + 1)(x + 4)$	$2x^2 + 8x + x + 4$	$2x^2 + 9x + 4$	$8 + 1 = 9$	$8 \cdot 1 = 8$
$(x + 1)(2x - 4)$				
$(2x - 1)(4x + 1)$				
$(3x + 1)(x + 5)$				
$(4x - 3)(2x - 1)$				

14 Решите уравнение методом разложения на множители.

1) $6x^2 + 5x - 1 = 0$

4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

7) $4x^2 + 8x + 3 = 0$

2) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

5) $4x^2 - 7x - 11 = 0$

8) $2x^2 + 5x - 3 = 0$

3) $2x^2 - 7x + 5 = 0$

6) $3x^2 - 13x - 30 = 0$

9) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

- 15»** Решите, если это возможно, следующие квадратные уравнения, разложив левую часть на множители при помощи целых чисел, а если это невозможно поставьте знак *.

$$4x^2 + 7x + 14 = 0$$

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$4x^2 - 12x + 5 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$5x^2 + 3x + 4 = 0$$

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

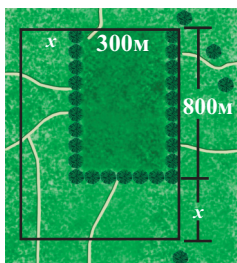
$$3x^2 - 8x + 11 = 0$$

$$4x^2 + 22x + 10 = 0$$

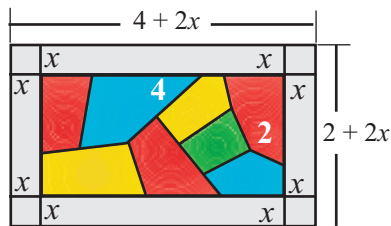
$$3x^2 - 8x + 15 = 0$$

Прикладные задачи

- 16»** Озеленённый участок размерами 300 м × 800 м намечено увеличить в 1,5 раза, как показано на рисунке. Определите размеры будущего участка.

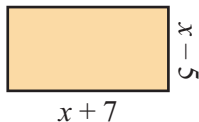


- 17»** Дизайнер хочет по краям окна вида шебеке сделать рамку из простого стекла. Найдите ширину рамки, если размеры окна шебеке 2 м и 4 м, площадь рамки из простого стекла 7 м².

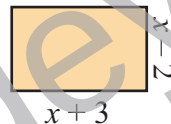


- 18»** Найдите периметр прямоугольника, площадь которого равна 319 см², если известно, что ширина прямоугольника на 18 см меньше длины.
- 19»** Найдите значение переменной x по данным рисунка.

Площадь:
64 кв. ед.

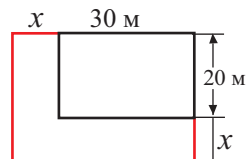


Площадь:
36 кв. ед.



- 20»** Наиля вышила узоры на ткани размерами которой 40 см × 48 см. Для окантовки она купила в магазине ленту, площадь которой равна 180 см². Найдите ширину ленты.
- 21» Древняя китайская задача.** Для измерения двери используют палку, длина которой неизвестна. Длина палки больше ширины двери на 4 ch'ih и больше высоты на 2 ch'ih. Диагональ двери равна длине палки. Найдите размеры двери. **Примечание:** 1ch'ih приблизительно 30 см и до сих пор используется в Китае в качестве меры длины.

- 22» Вопрос открытого типа.** Составьте задачу по рисунку и решите её.



Решение квадратного уравнения методом разложения на множители

Практическая работа. Разложение на множители при помощи алгебраических карт.

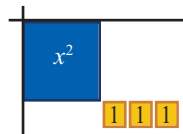
Из цветной бумаги подготовьте алгебраические карты как показано на рисунке.



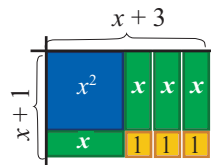
Пример 1. Решим уравнение $x^2 + 4x + 3 = 0$ методом разложения на множители. Для этого, при помощи алгебраических карт, разложим трёхчлен $x^2 + 4x + 3$ на множители.



1. Сначала разместим карту x^2 . Затем, разложим в форме прямоугольника карты с единицами. В этом случае, так как число 3 является простым числом, его можно представить единственным образом в виде прямоугольника (1×3).



2. Теперь достроим прямоугольник при помощи карт с x -ом. Ширина прямоугольника будет равна $(x+1)$, а длина $(x+3)$. Тогда $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$. Запишем уравнение в виде $(x+3)(x+1) = 0$. Отсюда, $x+3=0$, $x_1 = -3$; $x+1=0$, $x_2 = -1$



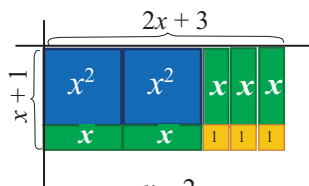
Пример 2. $2x^2 + 5x + 3 = 0$

Аналогичным образом можно разложить на множители трёхчлен $2x^2 + 5x + 3$.

$$2x^2 + 5x + 3 = (2x + 3)(x + 1)$$

$$(2x + 3)(x + 1) = 0,$$

$$2x + 3 = 0, \quad x_1 = -1,5; \quad x + 1 = 0, \quad x_2 = -1$$

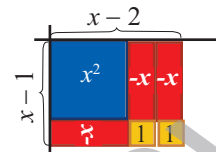


Пример 3. $x^2 - 3x + 2 = 0$

Как показано на рисунке $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x-1=0, \quad x_1 = 1; \quad x-2=0, \quad x_2 = 2$$



23 На основе приведённых выше примеров решите уравнение методом разложения на множители.

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

b) $x^2 - 4x - 5 = 0$

c) $x^2 + 5x + 4 = 0$

d) $x^2 - 2x + 1 = 0$

e) $x^2 - 2x - 8 = 0$

f) $x^2 + 7x + 10 = 0$

24 Для следующих примеров начертите модель площади и запишите соответствующий квадратный трёхчлен.

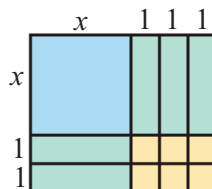
Пример. $(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$

1) $(x+2)(x+6)$

3) $(x+4)(x+3)$

2) $(x+1)(x+4)$

4) $(2x+1)(x+3)$



25 При помощи алгебраических карт постройте прямоугольник, соответствующий уравнению. Решите уравнение, разложив левую часть на множители.

1) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

2) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

3) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

Исследование. Рисунок из алгебраических карт соответствует выражению $x^2 + 6x$



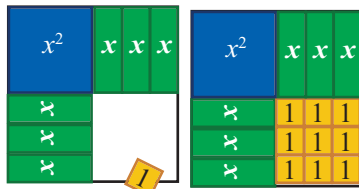
1. Карты с x разделите на две части и расположите, как указано на рисунке.

2. Чтобы дополнить модель до квадрата, потребуется 3×3 единичные карты.

3. Достроенному квадрату соответствует трёхчлен $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.

4. Придумайте аналогичный пример.

5. Есть ли связь между дополнительными единичными картами и коэффициентом b ? Определите эту зависимость.



Метод выделения полного квадрата

Для выделения полного квадрата из двухчлена $x^2 + bx$ его надо дополнить членом $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Это правило одинаково как для положительных, так и для отрицательных b .

Пример 1. Запишем уравнение $x^2 - 5x - 6 = 0$ в виде $x^2 - 5x = 6$. С обеих

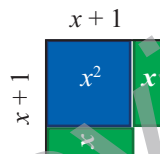
сторон дополним данное уравнение $\left(\frac{5}{2}\right)^2$: $x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 6 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}; \quad x - \frac{5}{2} = \pm \frac{7}{2}; \quad x_1 = \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = 6; \quad x_2 = \frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

Пример 2. Для решения уравнения $x^2 + 2x - 3 = 0$ методом выделения полного квадрата, сначала запишем его в виде $x^2 + 2x = 3$. Для того, чтобы выражение слева соответствовало модели площади квадрата, не хватает всего одной единичной алгебраической карты. Значит, с каждой стороны следует добавить 1. Тогда выражение слева можно представить в виде квадрата двухчлена так

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1 \quad (x + 1)^2 = 4$$

Отсюда, $x + 1 = 2$, $x_1 = 1$; $x + 1 = -2$, $x_2 = -3$



Обучающие задания

1 В закрашенные квадраты впишите такие числа, чтобы выражения можно было представить в виде квадрата трёхчлена. Решение представьте в виде моделей площади квадрата.

$$x^2 + 8x + \blacksquare$$

$$x^2 + 4x + \blacksquare$$

$$x^2 + 10x + \blacksquare$$

$$x^2 - 12x + \blacksquare$$

$$x^2 - x + \blacksquare$$

$$x^2 + 3x + \blacksquare$$

2 Решите квадратное уравнение методом выделения полного квадрата.

a) $x^2 - 2x = 8$

b) $x^2 - 4x = 21$

c) $x^2 + 6x = 16$

d) $x^2 + 2x - 3 = 0$

e) $x^2 + 6x - 7 = 0$

f) $x^2 + 3x - 10 = 0$

h) $x^2 - 20x + 36 = 0$

i) $x^2 - 3x = 4$

j) $x^2 - x = 12$

Историческая справка. «Отец алгебры» аль - Хорезми, родившийся в 780 году в Узбекистане, живший в Багдаде, был турецким математиком, который систематизировал все знания по алгебре.

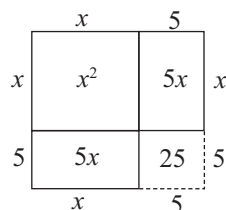


Решение квадратных уравнений методом выделения полного квадрата впервые было предложено аль - Хорезми. Его имя, звучавшее на латинском как “Alkhorizmi”, на французском - “Algorithme”, на английском - “Augrim”, дало название термину «Алгоритм», который широко используется в настоящее время во всех языках. Слово «Алгебра» взято из его труда “*Al-jabr w'al muqabala*”. Аль - Хорезми впервые в математике использовал цифру «нуль», а также систематизировал все, на тот момент известные, знания по алгебре с научной и методической точки зрения. На рисунке изображена марка, которая выпущена в честь 1200 юбилея учёного.

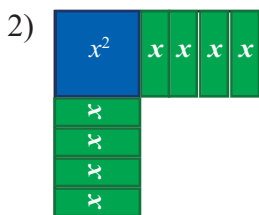
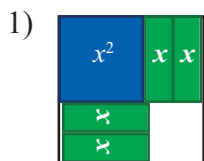
Левую часть уравнения $x^2 + 10x = 39$ аль - Хорезми привёл к полному квадрату следующим образом. С обеих сторон уравнения он добавил $(10/2)^2$ и получил следующее:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \quad (x + 5)^2 = 64 \quad x + 5 = \pm 8$$

$x_1 = 3, x_2 = -13$. В качестве ответа аль - Хорезми выбрал $x = 3$, не приняв при этом во внимание корень -13 . Своё решение он также проиллюстрировал геометрически как показано на рисунке.



3 Достройте модели до квадрата. Запишите выражения, для площади квадрата и его стороны.



4 Разделите левую и правую часть уравнения на первый коэффициент и решите уравнение методом выделения полного квадрата.

a) $3x^2 - 2x = 1$

b) $2x^2 - 8x + 8 = 32$

c) $2x^2 + 5x + 3 = 0$

d) $-x^2 - 6x - 8 = 0$

e) $0,2x^2 - 1,2x + 1,8 = 5$

f) $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$

Пример. $2x^2 - 8x - 24 = 0$. Запишем уравнение как $2x^2 - 8x = 24$ и разделим обе части уравнения на 2. $x^2 - 4x = 12$; $x^2 - 4x + (\frac{4}{2})^2 = (\frac{4}{2})^2 + 12$
 $x^2 - 4x + 4 = 16$; $(x - 2)^2 = 16$; $x - 2 = \pm 4$; $x_1 = 6, x_2 = -2$

5 Сумма, которую получит вкладчик через 2 года под r % годовых, вычисляется по формуле $A = P(1 + \frac{r}{100})^2$, где P – первоначальный взнос в банк. Эта формула называется формулой сложного процента. Если вклад за два года вырос с 800 манат до 882 маната, то какова процентная ставка за год?

Графический метод

Запишем уравнение $x^2 + px + q = 0$ в виде $x^2 = -px - q$. Тогда решением уравнения будут абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = -px - q$. При этом прямая может пересекаться с параболой (тогда уравнение имеет два различных корня), может касаться параболы (в этом случае уравнение удовлетворяется при единственном значении неизвестного) или может вообще не иметь общих точек с параболой (тогда уравнение не имеет действительных корней).

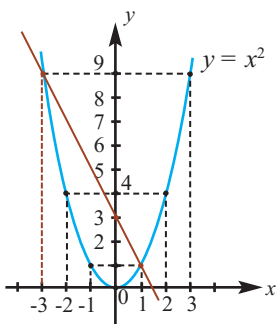
Пример 1.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 = 3 - 2x$$

x	0	+1	+2	+3
$y = x^2$	0	1	4	9

x	0	1
$y = 3 - 2x$	3	1



Графики пересекаются в двух точках. Абсциссы точек пересечения равны -3 и 1 . При проверке убеждаемся, что обе точки являются корнями уравнения.

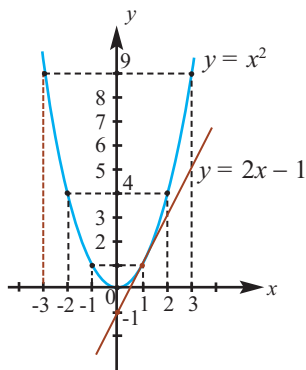
Обе части квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно преобразовать в приведённое квадратное уравнение, разделив его на $a \neq 0$, которое затем удобно решить по способу, представленному выше. Обычно графическим способом находятся приближенные значения корней.

Пример 2. $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x^2 = 2x - 1$$

Для построения прямой $y = 2x - 1$ составим таблицу

x	0	1
$y = 2x - 1$	-1	1



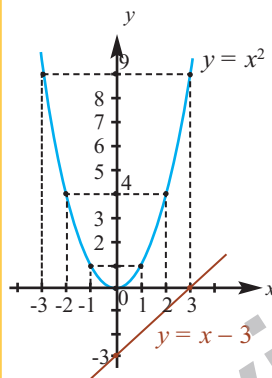
Абсцисса точки касания прямой и параболы равна 1 . Уравнение удовлетворяется при единственном значении неизвестного: $x = 1$.

Пример 3.

$$x^2 - x + 3 = 0$$

$$x^2 = x - 3$$

x	0	3
$y = x - 3$	-3	0



Графики не имеют точек пересечения. Это говорит о том, что данное уравнение не имеет действительных корней.

Обучающие задания

- 1) Используя графический метод решения, определите, имеет ли уравнение корни. Если корни существуют, то найдите их точное или приближительное значение.

a) $x^2 = 6 - x$	с) $x^2 - x + 4 = 0$	б) $x^2 - 4x + 4 = 0$	д) $x^2 - 2x - 6 = 0$
------------------	----------------------	-----------------------	-----------------------
- 2) Решите уравнение графически.

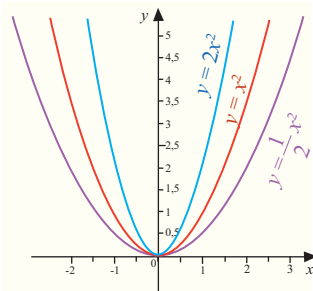
a) $x^2 - 3x = 0$	б) $x^2 - 2 = 0$	с) $x^2 + 4x = 0$	д) $x^2 + 4 = 0$
-------------------	------------------	-------------------	------------------
- 3) Данные уравнения сначала преобразуйте в приведённые, а затем решите графически.

a) $2x^2 - 2x - 4 = 0$	б) $-2x^2 + 4x + 6 = 0$	с) $-x^2 + 5x = 4$
------------------------	-------------------------	--------------------

Решение квадратного уравнения графическим методом

Калькулятор для построения графиков

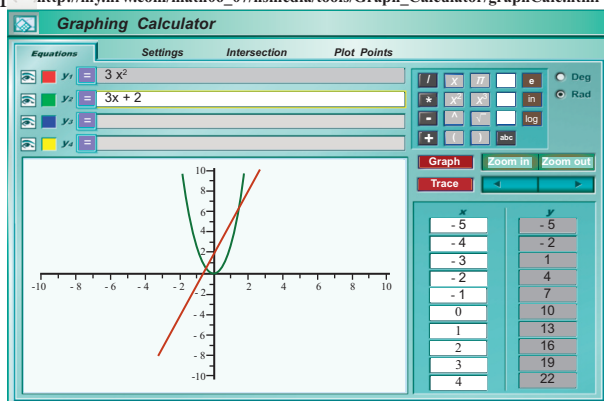
Используя онлайн калькуляторы для построения графиков можно построить различные графики. На рисунке представлены графики функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, построенные при помощи графического калькулятора www.meta-calculator.com/online.



Решить квадратное уравнение также можно при помощи графического калькулятора, построив в одной системе координат параболу и прямую.

http://my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html

На рисунке корни уравнения $3x^2 - 3x - 2 = 0$ записанного в виде $3x^2 = 3x + 2$ найдены графически при помощи графического калькулятора www.my.hrw.com/math06_07/nsmedia/tools/Graph_Calculator/graphCalc.html



4 Решите заданные уравнения при помощи графического калькулятора.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$4x^2 - 13x + 3 = 0$$

$$5x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$-2x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^2 - 2x + 9 = 0$$

$$0,5x^2 + 4x + 6 = 0$$

5 Выберите один из методов и решите уравнения.

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$3x^2 - 8x + 5 = 0$$

$$2x^2 - 5x - 7 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

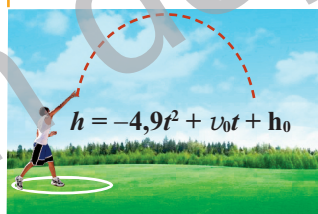
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$7x^2 - 8x - 12 = 0$$

6 Тело брошено вверх. Зависимость между расстоянием до Земли h (метр) и временем t (сек.) задаётся в виде формулы $h = -4,9t^2 + v_0t + h_0$, где v_0 (м/сек.) - начальная скорость, а h_0 - начальная высота.

Школьники соревнуются в метании диска.



Эльчин также принимает участие в соревновании. Его рост равен 1,6 м.

1) Через сколько секунд, диск брошенный Эльчином с начальной скоростью 32 м/сек, упадёт на Землю?

2) На какой минуте диск находился на высоте 20 м? Здесь h_0 - рост Эльчина.

7 Расстояние от Земли до тела, брошенного вертикально вверх, с начальной скоростью 30 м/сек через время t можно найти по формуле $h = -4,9t^2 + 30t$. Через сколько минут тело будет находится на расстоянии 40 м от земли?

Формула для нахождения корней квадратного уравнения

Мы уже научились находить корни квадратного уравнения методом разложения на множители и методом выделения полного квадрата. Для нахождения корней любого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ методом выделения полного квадрата можно записать обобщённую формулу.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Разделим обе части уравнения на a .

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Вычтем из обеих частей $\frac{c}{a}$.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Для выделения в левой части уравнения полного квадрата прибавим к каждой части $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Левую часть запишем в виде квадрата суммы двух выражений, правую часть упростим.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Если правая часть неотрицательна, найдём корень из левой и правой части.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Вычтем из обеих частей уравнения $\frac{b}{2a}$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

При $a \neq 0$, эта формула является формулой корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

Если в формуле для нахождения корней квадратного уравнения принять

$$D = b^2 - 4ac, \text{ то её можно записать как } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Наличие корней квадратного уравнения зависит от знака D . D называется дискриминантом (определителем) квадратного уравнения.

1) Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

2) Если $D = 0$, то уравнение имеет два равных корня.

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

3) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня: $x_1 \neq x_2$

Пример. В уравнении $4x^2 + 7x + 3 = 0$, $a = 4$, $b = 7$, $c = 3$.

Тогда $D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 49 - 48 = 1 > 0$, а это значит, что уравнение имеет два различных действительных корня.

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} \quad x_1 = \frac{-7 + 1}{8} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4} \quad x_2 = \frac{-7 - 1}{8} = -1$$

В уравнении $x^2 + px + q = 0$, $a = 1$, $b = p$, $c = q$ дискриминант находится по формуле для приведённого квадратного уравнения $D = p^2 - 4q$.

При $D > 0$, для корней приведённого квадратного уравнения, верны следующие формулы

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Решение квадратных уравнений

Обучающие задания

1 Найдите дискриминант и определите, наличие действительных корней квадратного уравнения.

a) $3x^2 + x + 5 = 0$

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

b) $2x^2 - x - 6 = 0$

d) $x^2 + x - 7 = 0$

2 Решите уравнение.

a) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

c) $5x^2 + 8x + 3 = 0$

b) $5x^2 + 6x + 1 = 0$

d) $2x^2 - 9x + 7 = 0$

3 Решите квадратные уравнения, применив формулу для приведённого квадратного уравнения.

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 + 14x + 40 = 0$

c) $x^2 - 7x + 6 = 0$

d) $x^2 - 11x + 10 = 0$

4 Решите уравнение.

a) $5t^2 - 11t + 2 = 0$

b) $35y^2 + 2y - 1 = 0$

c) $2z^2 + 7z + 4 = 0$

d) $x^2 - x - 1 = 0$

5 При каком значении x :

a) Значение трёхчлена $x^2 - 11x + 32$ равно 2-м;

b) Значение трёхчлена $3x^2 - 2x + 5$ равно значению двухчлена $7x - 1$;

c) Значения многочленов $3x^2 - 4x + 2$ и $x^2 + x$ равны.

6 Решите уравнения различными способами.

$x^2 + 10x + 24 = 0$

$x^2 - 4x = 3$

$(3p - 5)(p + 1) = -4$

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$-24 = -2y^2 + 2y$

$3x(x - 2) = 24$

$2x^2 + 3x - 5 = 0$

$9y^2 - 12y - 5 = 0$

$m(m + 10) = 2$

7 Выберите один из известных вам методов и решите уравнение.

$t^2 + 8t + 15 = 0$

$m^2 + 6m + 8 = 0$

$t^2 - \frac{2}{5}t = 0$

$p^2 + 4p + 1 = 0$

$q^2 + 2q + 1 = 0$

$n(n - 4) = n$

$2a^2 + 4a + 1 = 7$

$3a^2 + 6a - 3 = 0$

$n^2 - \frac{2}{3}n = \frac{8}{9}$

8 1) Найдите два натуральных числа, если их произведение равно 84, а разность 5.

2) Найдите число, если его квадрат больше учетверённого значения на 5.

3) Удвоенный квадрат некоторого числа равен сумме пятикратного значения числа и числа 3. Найдите это число.

9 Если сторону квадрата увеличить на 4,5 см, то площадь увеличится в 2,25 раз. Найдите длину сторону квадрата.

Решение квадратного уравнения

- 10»** 1) Найдите число, сумма которого и удвоенного квадрата этого числа равна 6.
2) Произведение двух последовательных чисел равно 56. Найдите эти числа.
3) Составьте аналогичную задачу так, чтобы она решалась при помощи квадратного уравнения, и решите её.

11» Решите уравнения.

a) $5x^2 - 4x = 9$ b) $x^2 + 51 = 52x$ c) $4 - x^2 = 5x$ d) $25 + x^2 = 26x$

12» Двор имеет форму прямоугольника, длина которого на 1 м больше ширины. Если его длину увеличить на 4 м, а ширину на 5 м, то площадь станет равна 120 м^2 . Найдите первоначальные размеры двора.

13» Ширина прямоугольника 4 см, а длина 8 см. Если его длину и ширину увеличить на одну и ту же величину, то площадь увеличится в 3 раза. Найдите новые размеры прямоугольника.

14» Решите уравнения, используя различные методы.

$$x^2 + 6x = 7$$

$$8y^2 - 36y + 28 = 0$$

$$2x(x - 6) = 14$$

$$16x^2 = 25x^2 + 7x - 2$$

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$3r^2 + 2r - 1 = 0$$

$$3x^2 + 24x = 13x^2 + 13x + 1$$

$$(2w + 5)(w - 1) = 9$$

$$(3p - 5)(p + 1) = 3$$

Если второй коэффициент квадратного уравнения является чётным числом (т.е. $b = 2k$), то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно записать в виде $ax^2 + 2kx + c = 0$. Тогда $D = (2k)^2 - 4ac = 4k^2 - 4ac = 4(k^2 - ac)$.

Обозначим $D_1 = k^2 - ac$, $D = 4 \cdot D_1$, тогда

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4D_1}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{D_1}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{D_1})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} \quad \text{здесь } D_1 = k^2 - ac$$

Пример. Решим уравнение $9x^2 - 14x + 5 = 0$.

$$a = 9 \quad b = -14 = 2 \cdot (-7), \quad k = -7, \quad c = 5$$

$$D_1 = k^2 - ac = (-7)^2 - 9 \cdot 5 = 49 - 45 = 4$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{7 \pm \sqrt{4}}{9} = \frac{7 \pm 2}{9} \quad x_1 = \frac{5}{9} \quad x_2 = 1$$

15» Решите уравнение.

$$a) 3x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$c) x^2 - 22x - 23 = 0$$

$$b) 5x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$d) x^2 - 34x + 289 = 0$$

$$e) 5x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$f) 3x^2 + 32x + 80 = 0$$

Прикладные задания

16» Сначала, обе части уравнения умножьте на такое число, чтобы коэффициенты стали целыми числами, а затем решите уравнения.

$$a) x^2 - 2,5x + 1 = 0$$

$$c) 0,4x^2 + x - 0,3 = 0$$

$$e) 0,7x^2 = 1,3x + 3$$

$$b) \frac{1}{3}x^2 + 2x = 9$$

$$d) \frac{x^2}{3} - 7x = 1$$

$$f) \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x - 1 = 0$$

Решение квадратного уравнения

17» Выберите различные методы для решения уравнения.

a) $7(x+3)^2 = 28$

b) $3x^2 - 10x = 7 - 6x$

c) $x^2 + 9 = 8x$

d) $10x^2 + 3x = 0$

e) $2x^2 - 12x + 7 = 5$

f) $21 = (x-2)^2 + 5$

18» Решите уравнения.

$400x^2 + 40x - 100 = 0$

$0,05x^2 - x - 0,06 = 0$

$0,25x^2 - 0,16 = 0$

$x^2 + 1,3x - 0,4 = 0$

$4y^2 - 0,2y + 3,2 = 0$

$3600x^2 - 4900 = 0$

19» Владелец книжного магазина стало ясно, что прибыль от продажи n книг можно найти по формуле $G = 0,02n^2 + 0,4n$. Здесь n - показывает количество книг. Сколько книг он должен продать, чтобы прибыль составила 70 манат?

20» Составьте выражение для нахождения площади в виде квадратного трёхчлена и разложите его на множители. Найдите периметр прямоугольника, зная его площадь.

Площадь: 165 кв.ед. Площадь: 300 кв.ед. Площадь: 144 кв.ед.

$4x^2$	$10x$
$2x$	5

$6x^2$	$4x$
$9x$	6

x^2	$9x$
$2x$	18

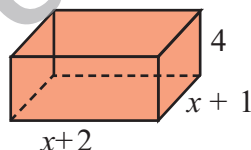
21» При каком значении a , значения квадратного трёхчлена $(a^2 + 7a + 6)$ и двухчлена $(a + 1)$ равны? Найдите значение трёхчлена при полученных значениях a .

22» Докажите, что один из корней уравнения $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ равен 1.

23» На какое натуральное число надо разделить 73, чтобы неполное частное было на 3 больше делителя, а остаток на 4 меньше делителя?

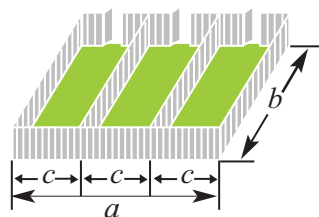
24» По данным рисунка решите задачу.

a) Определите размеры прямоугольного параллелепипеда, если его объём равен 120 см^3 . Верно ли, что данная задача имеет два решения? Запишите своё мнение.



b) Сколько квадратных сантиметров картона потребуется для изготовления данной коробки?

25» Длина забора (периметр) вокруг участка, где фермер держит овец равна 80 м. Он решил разделить этот участок на три равные части в виде прямоугольников. Зная, что общая площадь участка 300 м^2 , найдите размеры полученных частей, при условии $a > b$.



Теорема Виета

Решим приведённое квадратное уравнение: $x^2 - 7x + 12 = 0$.

По формуле нахождения корней приведённого квадратного уравнения имеем

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 12}}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 3; x_2 = 4.$$

Внимание! Если сложить найденные корни, то получим число противоположное коэффициенту при x . На самом деле, из уравнения $p = -7$, с другой стороны $x_1 + x_2 = 4 + 3 = 7$. Если умножить полученные корни, получим число равное свободному члену уравнения: $3 \cdot 4 = 12$. Это свойство верно для любого приведённого квадратного уравнения.

Теорема: В приведённом квадратном уравнении сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение, равно свободному члену. $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$

Доказательство: Известно, что $x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$ и $x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$ корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Отсюда получим :

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-p - \sqrt{D} - p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q$$

Таким образом, для уравнения $x^2 + px + q = 0$ $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$.

Если обе части любого квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ разделить на a , то получим равносильное приведённое квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Тогда к нему можно будет применить теорему Виета. Сумма корней $ax^2 + bx + c = 0$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$. Теорема Виета остаётся в силе, если $D = 0$ (когда квадратное уравнение имеет два равных корня).

Найдём корни квадратного уравнения

$x^2 - 9x + 20 = 0$ методом подбора.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 \cdot x_2 = 20$

Таким образом корнями уравнения являются числа 4 и 5.

Множители числа 20	Сумма множителей
1 · 20	21
2 · 10	12
4 · 5	9

Обучающие задания

- 1) Найдите сумму и произведение корней уравнения по теореме Виета. Проверьте полученные результаты решив уравнение.

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$x^2 - 6x - 40 = 0$$

$$2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$4x^2 - 9 = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2d^2 + 12d - 16 = 0$$

Теорема Виета

2» Найдите корни уравнения методом подбора.

a) $x^2 - 5x - 6 = 0$

c) $x^2 - 8x + 12 = 0$

e) $x^2 - 8x + 15 = 0$

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$

d) $x^2 - 6x + 8 = 0$

f) $x^2 - 2x - 48 = 0$

3» 1) Один из корней уравнения $x^2 + px - 35 = 0$ равен 7. Найдите другой корень и коэффициент p .

2) Один из корней уравнения $x^2 - 13x + q = 0$ равен 1. Найдите другой корень и коэффициент q .

3) Один из корней уравнения $3x^2 + bx + 12 = 0$ равен 2. Найдите другой корень и коэффициент b .

4) Разность корней уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ равна 2. Найдите q .

4» Пусть x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 - 3x - 5 = 0$. Найдите значение выражений:

a) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

b) $x_1^2 + x_2^2$

c) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

5» Не решая уравнения, определите знаки его корней.

a) $x^2 - 17x + 16 = 0$

b) $2x^2 - x - 54 = 0$

c) $3x^2 - x - 1 = 0$

d) $x^2 + 13x + 12 = 0$

Теорема, обратная теореме Виета

Обратная теорема. Если сумма чисел m и n равна $-p$, а произведение равно q , то эти числа являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Эту теорему можно записать так: любые числа m и n являются корнями уравнения $x^2 - (m + n)x + m \cdot n = 0$.

Доказательство. На самом деле, если принять, что $x = m$, то получим: $m^2 - (m + n) \cdot m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0$, т.е. число m действительно удовлетворяет уравнению. Таким же образом можно показать, что число $x = n$ также является корнем уравнения.

Пример. Составим квадратное уравнение, если известно, что числа $m = 3$ и $n = -5$ являются его корнями. Так как $m + n = 3 + (-5) = -2$,
 $m \cdot n = 3 \cdot (-5) = -15$, то уравнение будет выглядеть как $x^2 + 2x - 15 = 0$.

6» Составьте приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа.

a) 3 и 4

b) 2 и 5

c) -3 и 6

d) -4 и 2

7» Составьте приведённое квадратное уравнение, зная его корни.

a) $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$

b) $x_1 = 4$ и $x_2 = 3$

c) $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$

d) $x_1 = 5$ и $x_2 = 6$

e) $x_1 = \sqrt{2} - 1$ и $x_2 = \sqrt{2} + 1$

f) $x_1 = 3 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 3 + \sqrt{2}$

Теорема Виета

- 8** 1) Найдите значение выражения $(3x_1 - 2)(3x_2 - 2)$ если x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$.
2) Найдите значение выражения $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, если x_1 и x_2 являются корнями уравнения $4x^2 - 17x + 4 = 0$.
- Пример.** Найдите значение выражения $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$, если x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$.
По теореме Виета $x_1 + x_2 = 6$ и $x_1x_2 = 5$
 $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2) = 5 \cdot 6 = 30$
- 9** Рассмотрите квадратное уравнение с целыми коэффициентами и покажите, что если один из корней $(m + \sqrt{n})$ является иррациональным числом, то число, $(m - \sqrt{n})$, также является корнем данного уравнения.
- 10** 1) Каждое из следующих чисел является одним из корней квадратного уравнения с целыми коэффициентами. Найдите другой корень. Запишите решение с объяснением.
а) $-2 + \sqrt{3}$ б) $2\sqrt{5} + 1$ в) $3 - \sqrt{7}$ д) $m + \sqrt{n}$
2) Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого является число $2 - \sqrt{3}$.
- 11** При каком значении m корни уравнения $x^2 - 4x + m + 1 = 0$ равны?
- 12** x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 - 8x + n = 0$. Найдите значение n , если известно, что $3x_1 - x_2 = 4$. **Указание:** решите систему уравнений $3x_1 - x_2 = 4$ и $x_1 + x_2 = 8$.
- 13** x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 - nx + 8 = 0$. Найдите значение n , если: а) $x_1 = 2x_2$; б) $x_1 = x_2^2$.
- 14** 1) x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 - 6x + n = 0$. Найдите значение n , если:
а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$ б) $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{7}$.
Указание: используйте $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.
2) x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $x^2 + (n - 5)x + n - 6 = 0$. Найдите значение n , если: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$.
- 15** 1) Пусть x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Составьте квадратное уравнение, если его корни равны $2x_1 - 3$ и $2x_2 - 3$.
2) Зная, что один из корней уравнения $2x^2 - bx + c = 0$ равен $(3 - \sqrt{2})$, найдите $(b + c)$. Здесь b и c являются целыми числами.
- 16** Вычислите дискриминант, и определите наличие действительных корней уравнения. Если уравнение имеет корни, то определите их знаки.
а) $x^2 - 2x - 1 = 0$ в) $3x^2 - 4x + 7,2 = 0$
б) $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$ г) $x^2 + x - 1 = 0$

Уравнения, приводимые к квадратным уравнениям

1» Решите уравнения методом введения новой переменной.

1) $(x + 2)^2 + 3(x + 2) - 54 = 0$

4) $(x - 2)^2 - 15(x - 2) + 56 = 0$

2) $6(x + 5)^2 - 5(x + 5) + 1 = 0$

5) $3(2x - 3)^2 + 17(2x - 3) + 10 = 0$

3) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$

6) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Пример.

В уравнении $(x + 3)^2 + 3(x + 3) - 54 = 0$ выполним замену $x + 3 = t$.

Тогда данное уравнение $t^2 + 3t - 54 = 0$ можно записать так

$(t + 9)(t - 6) = 0$. $t_1 = -9$; $t_2 = 6$. Приняв во внимание замену, имеем $x + 3 = -9$, $x_1 = -12$; $x + 3 = 6$ $x_2 = 3$

Выполнив проверку убедитесь, что уравнение решено верно.

2» Решите уравнения.

a) $x + \sqrt{x} - 2 = 0$

b) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$

Пример. Решим уравнение $x - \sqrt{x} - 6 = 0$. Выполним замену $\sqrt{x} = t$ тогда, $x = t^2$. Тогда уравнение примет вид: $t^2 - t - 6 = 0$.

Решив данное уравнение получим, $t_1 = 3$, $t_2 = -2$.

Выполним подстановку :

1) $\sqrt{x} = 3$, $x = 9$, 2) $\sqrt{x} = -2$ корней нет.

Корнем данного уравнения является число 9 .

3» Решите уравнения, выполнив следующую замену $|x| = t$.

a) $x^2 - 3|x| + 2 = 0$

b) $x^2 + 2|x| - 3 = 0$

4» При каких значениях m уравнение $(m + 1)x^2 + (2m - 1)x + m - 1 = 0$ удовлетворяется при единственном значении неизвестного?

5» Решите уравнения.

a) $(x + 1)(x + 2) = 18 + 3x$

c) $(x - 2)^2 + x(x + 4) = 22$

b) $(x - 3)^2 + (x + 1)^2 = 10$

d) $8 - 3x = (x + 2)(x + 4)$

6» Найдите корни уравнения.

a) $(x + 1)(2x - 3) = 7$

c) $(x + 8)(x - 9) + 52 = 0$

b) $x(3x - 2) = (5x - 2)(x - 1)$

d) $x(x + 7) = (2 - x)(x + 2)$

7» Найдите корни уравнения.

a) $(x + 1)^2 = (2x - 1)^2$

c) $x^3 + 8 = (x + 2)^3$

b) $\frac{6x + 1}{3} - \frac{4x^2 - 3}{2} = \frac{7}{3}$

d) $\frac{-7x - 5}{4} = \frac{4x^2 - 3}{2}$

8» Одна из сторон прямоугольника на 3 см меньше удвоенного значения другой стороны. Зная, что площадь прямоугольника равна 299 м^2 , найдите его периметр.

Решение задач при помощи квадратных уравнений

Задача. Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см больше другого и на 2 см меньше гипотенузы. Найдите периметр треугольника.

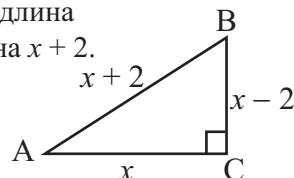
1 этап – составление уравнения

Обозначим длину одного из катетов через x , тогда длина другого катета будет $x - 2$, а гипотенуза будет равна $x + 2$.

2 этап – решение уравнения.

Согласно теореме Пифагора получим уравнение

$$x^2 + (x - 2)^2 = (x + 2)^2.$$



3 этап – решение уравнения.

Преобразуем уравнение $x^2 + x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4$; $x^2 - 8x = 0$. Отсюда $x(x - 8) = 0$; $x = 0$ и $x = 8$

4 этап – анализ результата.

Решению задачи соответствует корень $x = 8$, т.к. длины сторон выражаются положительными числами. Тогда длина другого катета будет $x - 2 = 8 - 2 = 6$ см, а длина гипотенузы $x + 2 = 8 + 2 = 10$ см. Периметр: $P = 6 + 8 + 10 = 24$ (см). Ответ: периметр треугольника равен 24 см.

- 1» Длина прямоугольника на 4 см больше ширины. Найдите его периметр, если площадь прямоугольника равна 60 см^2 .
- 2» Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел на 112 единиц больше суммы квадратов этих же чисел. Найдите эти числа.
- 3» Один из катетов прямоугольного треугольника на 1 см меньше, а другой на 8 см меньше гипотенузы. Найдите гипотенузу.
- 4» Сколько человек участвовало в шахматном турнире, если известно, что каждый участник сыграл с каждым из остальных по одной партии, и всего было сыграно 45 партий.
- 5» Из одного порта в одно и тоже время вышли два корабля. Один направился на восток, другой на север. Через час расстояние между ними было 40 км. Скорость корабля, который движется на север на 8 км больше скорости корабля, движущегося на восток. Найдите скорости кораблей.
- 6» Площади двух участков, один из которых имеет форму прямоугольника, а другой форму квадрата, равны. Длина прямоугольного участка на 5 м больше удвоенного значения длины стороны квадрата, а ширина на 6 м меньше стороны квадрата. Найдите длину стороны квадрата.
- 7» Две дороги пересекаются под прямым углом. Из точки пересечения одновременно начали двигаться два грузовых автомобиля. Скорость одного из них на 5 км больше скорости другого. Через 2 часа расстояние между ними стало 50 км. Найдите скорость каждого автомобиля.

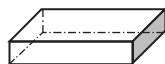
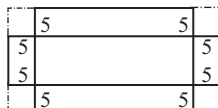
Решение задач при помощи квадратных уравнений

- 8» Нармин совершает прогулку по участку, имеющего форму прямоугольника. Сначала она прошла вдоль диагонали длиной 15 м, после чего возвратилась назад и продолжила движение вдоль периметра участка. Найдите размеры участка, если его периметр равен 42 м.

- 9» Ширина основания ящика, имеющего форму прямоугольника в 2 раза меньше длины. Высота ящика 0,5 м. Найдите объём ящика, если известно, что площадь основания меньше площади боковой поверхности на $1,08 \text{ м}^2$.

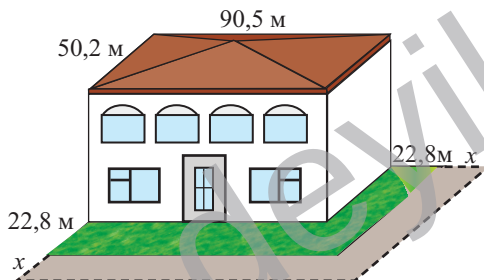


- 10» От картонного листа, в форме прямоугольника, длина которого в 2 раза больше ширины, с каждого угла отрезали квадраты со стороной 5 см. После чего картон сложили и склеили из него коробку в форме прямоугольного параллелепипеда, без верха. Зная, что объём коробки 1500 см^3 , найдите размеры картонного листа.



- 11» После двух последовательных понижений цены фотоаппарата на один и тот же процент, её стоимость снизилась с 300 манат до 192 манат. Найдите на сколько процентов каждый раз, уменьшалась цена товара.

- 12» Площадь парка вокруг больницы, было решено, увеличить в два раза, как показано на рисунке. Найдите площадь полученного участка. Решите задачу, при помощи калькулятора. Ответ округлите до десятых.



- 13» Ученики 8^а класса в качестве праздничного подарка подарили друг другу книги. Сколько учащихся в классе, если всего было подарено 380 книг ?

- 14» Для того, чтобы найти высоту, на которой находится спортсмен при прыжке с 10-ти метрового трамплина, в каждый момент времени t используют формулу $h = -4,9t^2 + 3t + 10$. Здесь t показывает время в секундах, h - высоту в метрах. Через сколько секунд спортсмен войдёт в воду?



Обобщающие задания

1» Решите уравнения.

$$2x^2 - 5 = 0$$

$$-(x - 2)^2 + 1 = 0$$

$$1,5(x - 4)^2 = 6$$

$$-x^2 + 3 = 0$$

$$-3(x + 3)^2 + 48 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x + 1)^2 = 8$$

$$(x + 1)^2 - 4 = 0$$

$$\frac{4}{9}x^2 - 1 = 0$$

$$(x - 4)^2 = \frac{1}{4}$$

2» Формула $h = -4,9t^2 + 1600$ показывает на какой высоте окажется парашютист через время t если расстояние до Земли в момент прыжка равнялось 1600 м. При прыжке с парашютом он раскрывается не сразу. Некоторое время парашютист находится в свободном падении. Сколько времени парашютист находился в свободном падении, если его парашют раскрылся на высоте 1000 м?



3» Решите уравнения методом разложения на множители.

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$3x^2 + 15x + 18 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$5x^2 + 21x + 22 = 0$$

4» Решите уравнения методом выделения полного квадрата.

$$x^2 - 18x + 81 = 49$$

$$x^2 + 20x + 100 = 64$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 16$$

$$36x^2 + 12x + 1 = 18$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 4$$

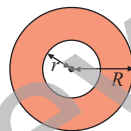
$$25x^2 + 40x + 16 = 28$$

$$4x^2 - 28x + 49 = 64$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 81$$

$$100x^2 - 60x + 9 = 121$$

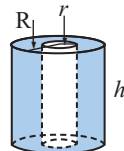
5» Радиус одной из концентрических окружностей на 3 см больше радиуса другой. Площадь закрашенной на рисунке части равна 85 см^2 . Найдите радиус меньшей окружности. (примите $\pi \approx 3$)



6» Одним из корней уравнения $x^2 - (m - 5)x + n = 0$ является число 5, а одним из корней уравнения $x^2 - (2m - 1)x + k = 0$ является число -3 . Найдите значение m , если вторые корни данных уравнений равны.

7» В кинотеатре количество мест в каждом ряду на 8 больше количества рядов. Сколько рядов в кинотеатре, если всего в кинотеатре 884 места?

8» Представьте объём закрашенной части на рисунке в виде выражения, разложенного на множители.



9» При каком значении m уравнение $x^2 + (2m - 3)x + m - 2 = 0$ имеет два равных корня?

10» Зная, что x_1 и x_2 корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, составьте квадратное уравнение, корнями которого являются:

а) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ б) $x_1 + 2$ и $x_2 + 2$.

Обобщающие задания

- 11** Высота Девичьей Башни 28 м. За сколько минут тело брошенное с этой высоты достигнет земли? Используйте формулу $h = -4,9t^2 + h_0$.
- 12** Площадь ковра, который находится на одинаковом расстоянии от каждой стены в комнате, равна половине площади комнаты. Зная, что размеры ковра равны 4 м × 6 м, найдите площадь комнаты. Решение задачи проиллюстрируйте рисунком.
- 13** Стекланную пластину размером 40 см × 60 см обрезают на одинаковом расстоянии от каждой стороны. При этом её площадь уменьшилась в 3 раза. Найдите новые размеры пластины.
- 14** Инспектор дорожной патрульной службы может установить скорость (м/с) с которой автомобиль двигался при аварии по формуле $d \approx \frac{v^2}{12}$. Здесь d показывает расстояние от начала торможения до остановки. После анализа аварийной ситуации было установлено, что $d = 18$ м. С какой скоростью двигался автомобиль?
- 15** 1) Запишите квадратное уравнение корнями которого являются числа 3 и -4.
2) Один из корней уравнения $x^2 + bx + 20 = 0$ равен 5. Найдите другой корень и коэффициент b .
- 16** Решите уравнения.
а) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ б) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
с) $(x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3) = 21$ д) $(x^2 - 2x)^2 - 3 = 2(x^2 - 2x)$

- 17** Администрация торгового центра решила увеличить площадку для парковки автомобилей в 2 раза, как показано на рисунке. Если известно, что размеры здания торгового центра равны $80\text{ м} \times 100\text{ м}$, то на сколько при этом увеличатся размеры участка для парковки?



- 18** а) Один из корней уравнения $2x^2 + bx - 10 = 0$ равен 5. Найдите другой корень и коэффициент b .
 б) Один из корней уравнения $3x^2 + bx + 24 = 0$ равен 3. Найдите другой корень и коэффициент b .

Площадь параллелограмма

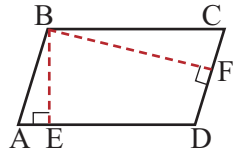
Аксиомы площадей

Аксиома равенства площадей. Площади конгруэнтных фигур равны.

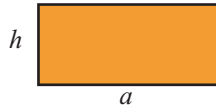
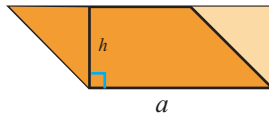
Аксиома сложения площадей. Площадь фигуры, разделённой на части не имеющих общих внутренних точек, равна сумме площадей этих фигур.

Высота параллелограмма

Определение. Перпендикуляр, опущенный из любой точки одной стороны параллелограмма на прямую, содержащую противоположную сторону, называется высотой параллелограмма. Если параллелограмм не ромб, то он имеет две высоты разной длины (на рисунке это BE и BF).



Практическая работа. Начертите на листе бумаги параллелограмм и его высоту. Разрежьте параллелограмм по высоте, как показано на рисунке, и приклейте к правой стороне. Выскажите своё мнение о полученной фигуре. Запишите формулу нахождения площади прямоугольника. Обобщите мнение о том, что такое площадь параллелограмма.

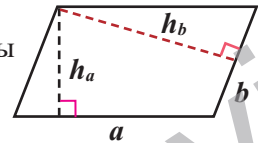


Так как длина стороны параллелограмма равна длине прямоугольника, а высота параллелограмма равна ширине прямоугольника, то площадь параллелограмма равна площади прямоугольника.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма равна произведению стороны и высоты, проведённой к данной стороне:

$$S = ah_a \text{ или } S = bh_b$$

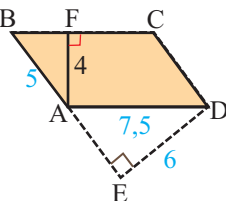


1» По рисунку, докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $AEFD$. **Указание:** используйте конгруэнтность $\triangle ABE$ и $\triangle DCF$ и аксиомы площадей.

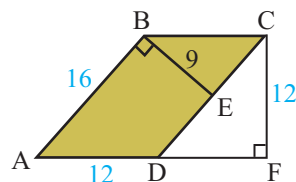


2» На листе бумаги в клетку, начертите три различных параллелограмма, с основанием 6 единиц и высотой 4 единицы. Сравните их площади.

3» 1) Для того, чтобы найти площадь параллелограмма $ABCD$ примите за основание сторону AB . Какую высоту нужно использовать, для нахождения площади данного параллелограмма?



2) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ на рисунке двумя способами.

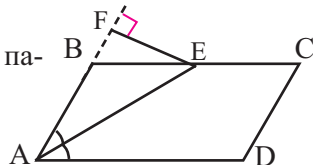


Площадь параллелограмма

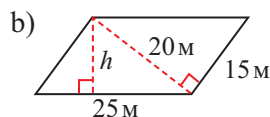
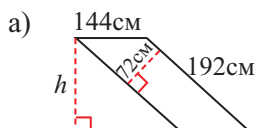
4» Площадь параллелограмма равна 48 см^2 , а расстояния от точки пересечения диагоналей до сторон равны 2 см и 3 см . Найдите длины сторон параллелограмма и его периметр.

5» Стороны параллелограмма равны 15 см и 12 см , а одна из высот равна 10 см . Найдите длину другой высоты. Сколько решений имеет данная задача?

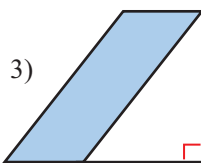
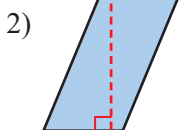
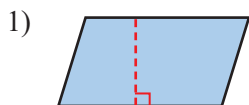
6» AE – биссектриса угла $\angle A$. Найдите площадь параллелограмма, если $EF=12 \text{ см}$, а $AD=24 \text{ см}$.



7» Найдите высоту h параллелограмма.

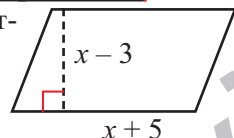


8» Выполните соответствующие измерения и вычислите площади параллелограммов на рисунке. Какой из параллелограммов имеет большую площадь?



9» Какой из следующих квадратных трёхчленов соответствует площади параллелограмма на рисунке?

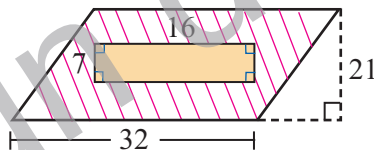
1) $x^2 + 2x - 15$ 2) $x^2 - 2x + 15$ 3) $2x^2 - x + 15$



10» Выразите периметр прямоугольника через x , если одна сторона равна $(2x + 3) \text{ см}$, а площадь $(2x^2 + 7x + 6) \text{ см}^2$.

11» Стороны параллелограмма равны 12 см и 16 см , а одна из высот 14 см . К какой стороне проведена эта высота? Найдите площадь параллелограмма.

12» По данным рисунка, найдите площадь заштрихованной части.



13» **Исследование.** Дан прямоугольник, с периметром 12 м .

1) Запишите периметр прямоугольника в виде $2x + 2y = 12$ и найдите y . Подставьте y в формулу площади $S = xy$ и упростите.

2) В полученном выражении выделите полный квадрат.

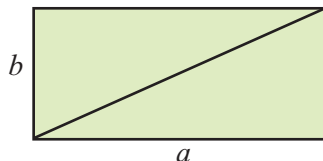
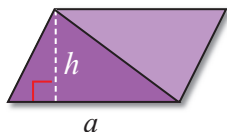
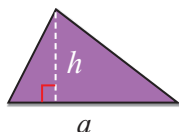
3) Найдите размеры прямоугольника, с наибольшей площадью.

4) Как можно найти возможные значения размеров прямоугольника, площадь которого равна 5 м^2 ?

14» Найдите размеры прямоугольника а) периметр, которого равен 20 ед , а площадь 24 кв.ед . б) периметр, которого равен 72 ед , а площадь 288 кв.ед .

Площадь треугольника

Практическая работа 1. 1) На листе бумаги в клетку начертите треугольник и вырежьте его. Положите его на бумагу и снова вырежьте конгруэнтный ему треугольник. Приклейте эти треугольники на другой лист, как показано на рисунке. Какая фигура при этом получилась? Выскажите и запишите своё мнение о том, какая связь существует между площадью треугольника и параллелограмма. 2) Начертите прямоугольник и разрежьте его по диагонали. Докажите, что данные треугольники конгруэнтны методом наложения друг на друга и методом геометрических рассуждений. Выскажите своё мнение о том, какая связь существует между площадью треугольника и прямоугольника.



Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения стороны и высоты, проведённой к данной стороне. $S = \frac{1}{2} ah_a$

Обозначим высоты, проведённые к сторонам a, b, c , соответственно как h_a, h_b, h_c :

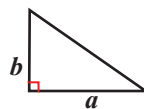
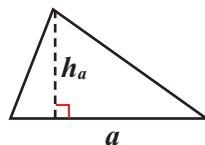
$$S = \frac{1}{2} ah_a$$

$$S = \frac{1}{2} bh_b$$

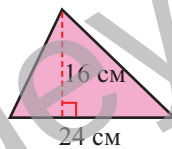
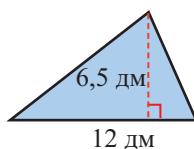
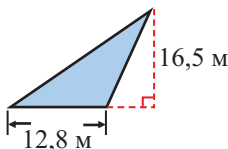
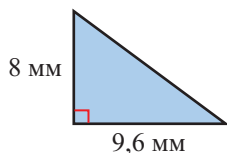
$$S = \frac{1}{2} ch_c$$

Площадь прямоугольного треугольника

равна половине произведения катетов. $S = \frac{1}{2} ab$

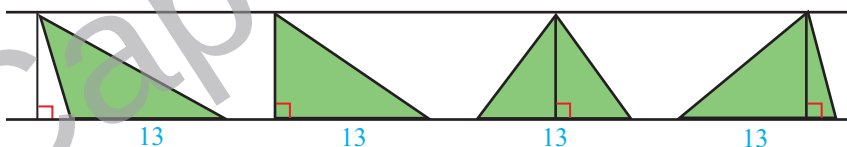


1 По данным рисунка найдите площади фигур.



2 Площадь треугольника 24 см^2 а высота $5,5 \text{ см}$. Найдите длину стороны, к которой эта высота проведена.

3 **Исследование.** Площадь треугольника равна 52 см^2 , а сторона 13 см . Найдите высоту, проведённую к этой стороне. На рисунке изображены различные треугольники с соответствующими задаче сторонами и высотами. Начертите ещё несколько тупоугольных или остроугольных треугольников, с соответствующими измерениями.



Площадь треугольника

4» Вопрос открытого типа.

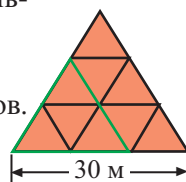
а) Начертите прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен 8 см, а площадь 24 см². б) Начертите несколько треугольников, стороной 8 см, и площадью, меньше 24 см². в) Начертите несколько треугольников с основанием 4 см и одной из боковых сторон 3 см и сравните их площади. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольников?

5» 1) В треугольнике $\triangle ABC$ основание равно 4 ед., а высота 8 ед. В треугольнике $\triangle DEF$ сторона и высота в 2 раза больше. Найдите отношение площадей этих треугольников.

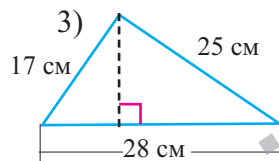
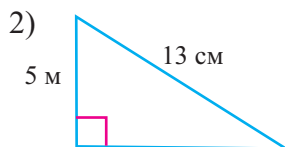
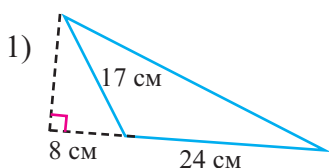
2) В треугольнике $\triangle ABC$ основание равно 15 ед., а высота 12 ед. В треугольнике $\triangle DEF$ сторона и высота в 3 раза меньше. Найдите отношение площадей этих треугольников.

6» Модель на рисунке состоит из конгруэнтных треугольников.

- а) Найдите площадь большого треугольника
- б) Найдите площадь одного из маленьких треугольников.
- в) Найдите площадь треугольника, обведённого зелёной линией.



7» Найдите площади треугольников.



Формула Герона для нахождения площади треугольника

Для треугольника со сторонами a, b, c верна формула нахождения площади $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Эта формула называется формулой Герона. Здесь p полупериметр треугольника: $p = \frac{a+b+c}{2}$

Задача. Найдём площадь треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см.

Дано: $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$

По формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \\ = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 84 \text{ (см}^2\text{)}$$

8» Найдите площади треугольников со сторонами: а) 26 см, 30 см, 28 см; б) 10 см, 13 см, 13 см.

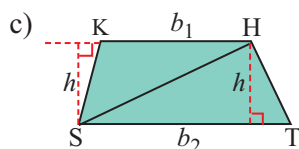
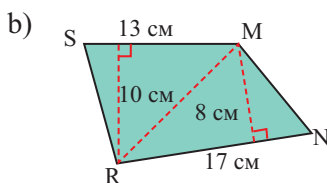
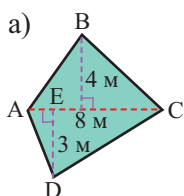
9» Найдите высоты равнобедренного треугольника со сторонами 10 см, 10 см и 16 см.

10» Найдите площадь и высоты параллелограмма, стороны которого равны 8 см и 10 см, а одна из диагоналей равна 6 см.

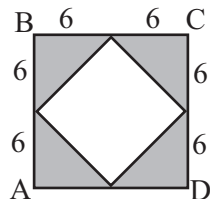
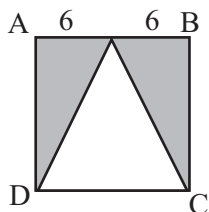
Площадь треугольника

- 11** 1) Найдите площадь равностороннего треугольника, если: а) $P = 24$ см; б) $a = 5$ см.
 2) Выведите формулу для вычисления площади равностороннего треугольника со стороной a .
 3) Если стороны треугольника равны 20 см и 35 см, то какое максимальное значение может принимать его площадь?
 4) Найдите площадь прямоугольного треугольника и высоту, проведённую к гипотенузе, если его катеты равны 15 см и 20 см. Постройте равнобедренный треугольник, площадь которого равна площади этого треугольника.

- 12** Найдите площади четырёхугольников, разделив их на треугольники.

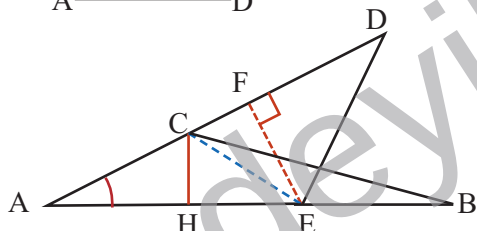


- 13** По данным найдите площадь: а) части, закрашенной серым цветом; б) части, закрашенной белым цветом. (ABCD - квадрат)



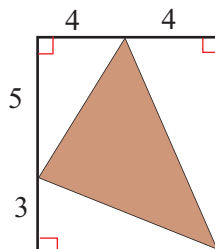
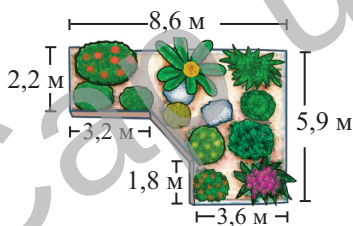
- 14** Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$
 $\angle DAE \cong \angle BAC$

Докажите, что $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE}$



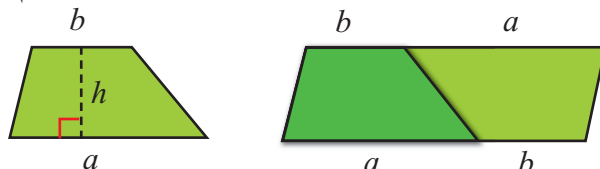
Указания: по рисунку запишите отношения $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEC}}$ и $\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle ADE}}$ а затем почленно умножьте их.

- 15** Начертите план сада и найдите его площадь. **16** По рисунку найдите площадь закрашенной части.



Площадь трапеции

Практическая работа. Начертите на листе бумаги трапецию и вырежьте её. Положите вырезанную фигуру на лист бумаги и начертите конгруэнтную данной трапеции трапецию, а затем вырежьте её. Приклейте полученные трапеции на лист бумаги, как показано на рисунке. Какая фигура при этом получилась? Выскажите и запишите своё мнение о том, как связаны площадь параллелограмма и трапеции?



Площадь трапеции

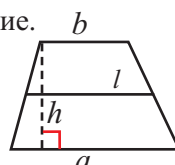
Высота трапеции — это перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание.

Площадь трапеции равна произведению половине суммы оснований и высоты:

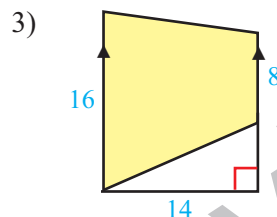
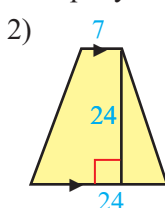
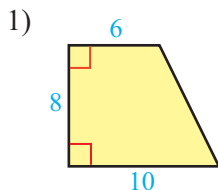
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Площадь трапеции равна произведению средней линии и высоты:

$$S = lh$$

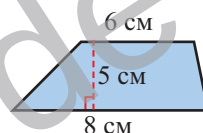


1 Найдите площади трапеций на рисунке.

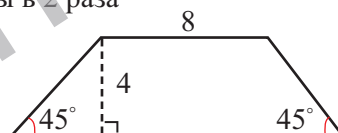


2 Исследуйте как изменится площадь трапеции согласно следующим условиям:

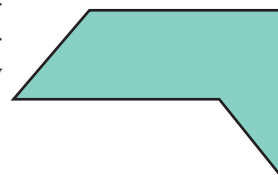
- 1) При увеличении нижнего основания в 2 раза;
- 2) При увеличении верхнего основания в 2 раза
- 3) При увеличении высоты в 2 раза
- 4) При увеличении обоих оснований и высоты в 2 раза



3 Найдите периметр и площадь трапеции по данным рисунка.



4 При помощи линейки произведите соответствующие измерения и найдите площадь фигуры на рисунке различными способами, разделив фигуру прямой линией на: а) две трапеции б) параллелограмм и треугольник

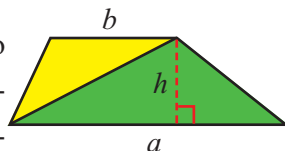


5 Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны, а основания равны 8 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.

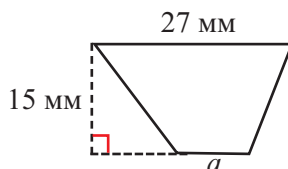
Площадь трапеции

- 6» Обоснуйте следующие предложения, выполнив соответствующие рисунки.
- 1) Площадь равнобедренной трапеции можно выразить, через сумму площадей 2 конгруэнтных трапеций.
 - 2) Площадь трапеции можно выразить через сумму площадей прямоугольника и двух прямоугольных треугольников.

- 7» Докажите, что площадь трапеции находится по формуле $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Для этого используйте формулу нахождения площади треугольника и аксиому сложения площадей.

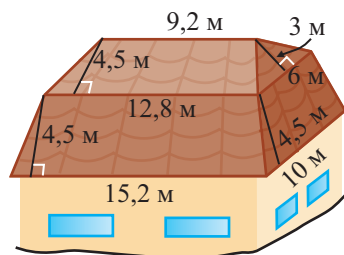


- 8» Площадь трапеции, изображённой на рисунке равна 270 мм^2 . Найдите a .



- 9» **Работа над небольшим проектом.** Сколько квадратных метров черепицы потребуется для покрытия крыши дома на рисунке?

- 1) Если 1 лист черепицы имеет площадь $2,8 \text{ м}^2$ и стоит 8,6 манат, то сколько денег потребуется, чтобы покрыть черепицей всю крышу? Зная, что 10% материала уйдёт на отходы, посчитайте, сколько листов черепицы потребуется? Результат округлите до целого.

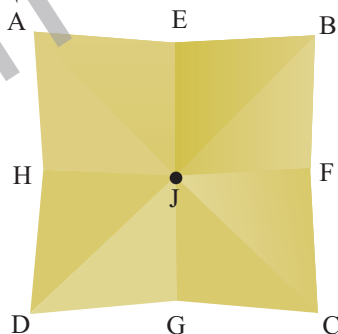


- 2) Два мастера должны были закончить работу по покрытию крыши дома черепицей за месяц. Но, проработав 20 дней, они закончили всего четвертую часть намеченной работы. Для того, чтобы закончить работу в срок, хозяин дома решил нанять ещё двух мастеров. За сколько времени закончат работу четверо мастеров?
- 3) За один месяц черепица подорожала два раза: в первый раз на 3,6%, второй раз на 4,8%. Найдите сколько процентов составят лишние расходы, если клиент купит черепицу по новой цене?

- 10» На рисунке представлен лист бумаги в форме квадрата ABCD. Точки H, E, F, G являются серединами сторон квадрата.

- 1) Зная, что $AB = 8 \text{ ед.}$, найдите площади:
- а) Прямоугольника ABFH;
 - б) Трапеции ABFJ;
 - в) Треугольника AEJ.

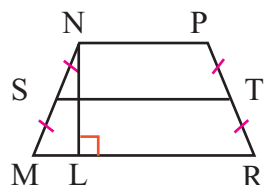
- 2) Представьте площадь листа в виде суммы площадей двух конгруэнтных трапеций и одного равнобедренного треугольника и найдите эту сумму.



Площадь трапеции

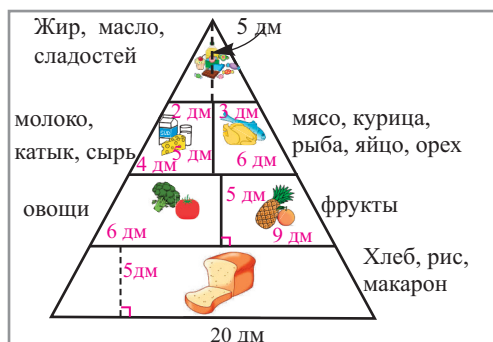
- 11** Трапеция MNPR является равнобедренной трапецией. По данным рисунка решите задачи:

- 1) Найдите ST, если $NP = 12$, $MR = 18$.
- 2) Найдите MR, если $ST = 16$, $NP = 8$.
- 3) Найдите ST, если $NP + MR = 5x + 12$, $ST = 3x + 4$.
- 4) Найдите MS, если периметр трапеции 64, а $ST = 12$.
- 5) Найдите площадь трапеции, если $NL = 8$ см, $NP + MR = 24$ см.

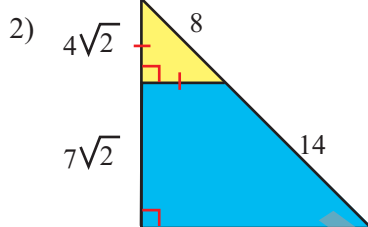
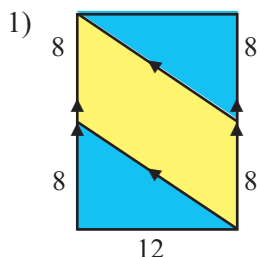


- 12** На витрине в форме пирамиды продукты расположены по группам. По данным рисунка найдите площади, отведённые для:

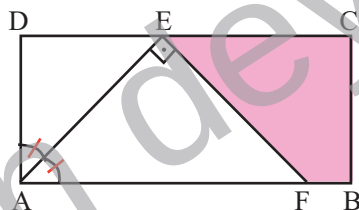
- а) масла и сладостей;
- б) фруктов;
- в) хлеба, риса, макарон.



- 13** Вычислите площади синих и жёлтых частей.

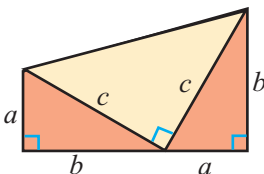


- 14** Дано: ABCD прямоугольник
 $AB = 15$ см, $AD = 4$ см, $\angle DAE \cong \angle EAF$
 Найдите: площадь трапеции FBCE



- 15** Существует много различных способов доказательства теоремы Пифагора. Одно из них принадлежит президенту США Джеймсу Гарфилду. Он представил это доказательство ещё в 1876 году, работая в Палате Представителей конгресса США. Проанализируйте доказательство теоремы в соответствии с планом, представленном ниже и запишите доказательство в тетради.

- 1) Выразил площадь трапеции через a и b .
- 2) Площади трёх прямоугольных треугольников выразил через a , b , c .
- 3) По аксиоме равенства площадей результат, полученный в пункте 1 и 2, приравнял и упростил.



Площадь ромба

Практическая работа. Проведите диагональ ромба или фигуры в форме воздушного змея. Разрежьте фигуру по диагонали на треугольники. Чтобы убедиться, что треугольники конгруэнтны, наложите их друг на друга. Исследуйте, какая связь существует между площадью ромба или фигуры в форме воздушного змея и полученными треугольниками.

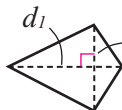
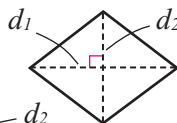
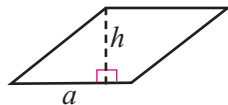
Площадь ромба

1. Площадь ромба равна произведению стороны и высоты: $S = ah$

Отметим что высоты ромбы равны.

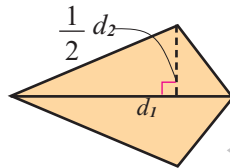
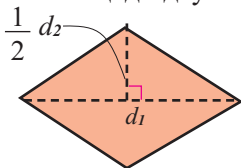
2. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

3. Площадь любого произвольного выпуклого четырёхугольника, диагонали которого взаимно перпендикулярными равна половине произведения диагоналей: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$

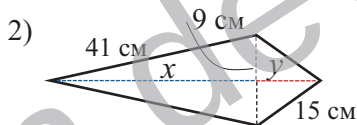
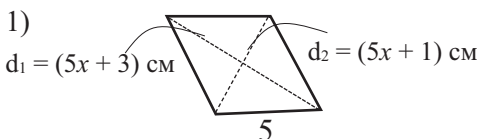


1» Докажите формулу $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$ нахождения площади ромба или фигуры в форме воздушного змея, по плану представленному ниже.

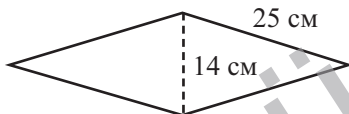
План для доказательства. 1. Докажите, что диагональ ромба или фигуры в форме воздушного змея делит его на два конгруэнтных треугольника. 2. Сложите площади двух треугольников.



2» Найдите площадь ромба или фигуры в форме воздушного змея по данным рисунка.



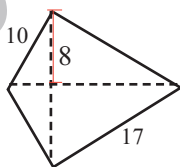
3» 1) Найдите площадь ромба.



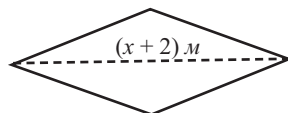
2) Площадь фигуры в форме воздушного змея равна 180 м^2 . Найдите другую диагональ.



4» 1) Найдите площадь фигуры в форме воздушного змея.

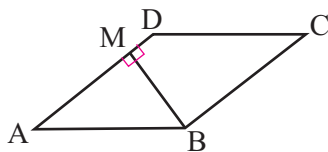


2) Площадь ромба $(4x^2 + 8x) \text{ м}^2$. Выразите другую диагональ через x .



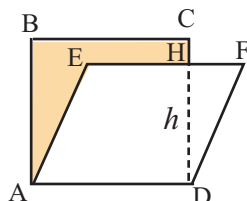
Площадь ромба

- 5» Высота ромба 6 см. Она делит противоположную сторону AD точкой M в отношении $AM:MD = 4:1$. Найдите площадь ромба.
Указание: обозначьте $MD = x$, $AM = 4x$ и для нахождения сторон используйте прямоугольный треугольник AMB.



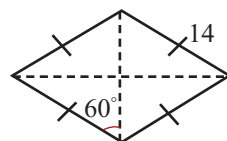
- 6» Площадь квадрата ABCD равна 625 см^2 , а площадь ромба AEFD 500 см^2 . Найдите площадь закрашенной части.

Указание: определите высоту ромба и найдите площадь $\triangle DHF$.



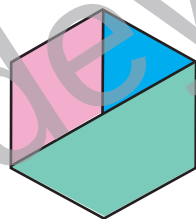
- 7» 1) Площадь прямоугольника ABCD равна 60 см^2 . Найдите площадь ромба, вершины которого являются серединами сторон данного прямоугольника.
2) Найдите площадь ромба, если его периметр равен 80 см, а одна из диагоналей 24 см.

- 8» По данным рисунка найдите периметр и площадь ромба.

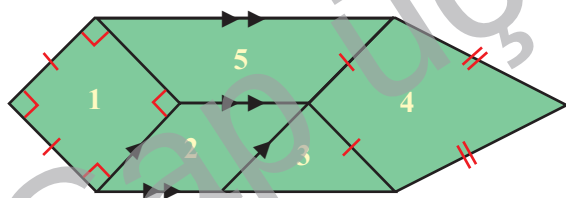


- 9» 1) Найдите периметр ромба, площадь которого равна $9,6 \text{ м}^2$, а одна из диагоналей 3,2 м.
2) Диагонали ромба относятся как 3:4, а площадь равна 54 см^2 . Найдите длины диагоналей ромба.

- 10» При помощи линейки произведите необходимые измерения с точностью до 1 мм и вычислите площади закрашенных частей, а также площадь всей фигуры.



- 11» Для каждой пронумерованной фигуры выберите соответствующую формулу нахождения площади.

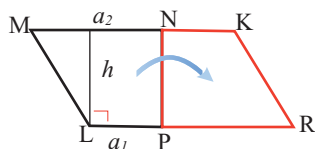


- A) $S = a^2$
B) $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$
C) $S = \frac{1}{2} ah$
D) $S = \frac{1}{2} h(a_1 + a_2)$
E) $S = ah$

Обобщающие задания

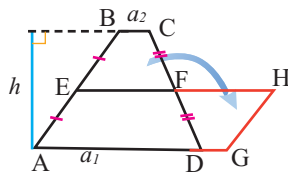
- 1» Дано: LMNP трапеция.
LMNP $\cong$ KRPN

Докажите, что: $S_{LMNP} = \frac{1}{2}h(a_1 + a_2)$



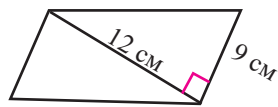
- 2» Дано: ABCD трапеция.
EBCF $\cong$ HGDF

Докажите, что: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}h(a_1 + a_2)$

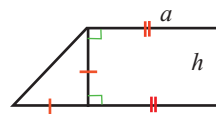


- 3» Для посадки помидоров, дядя Расим, загородил специальными щитами участок прямоугольной формы, размером 15 м $\times$ 25 м. Потом он решил увеличить площадь участка так, чтобы он стал квадратной формы и при этом не покупать новых щитов. На сколько квадратных метров увеличится площадь участка?

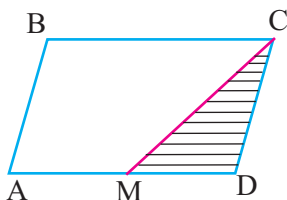
- 4» Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне. Найдите площадь параллелограмма по данным рисунка.



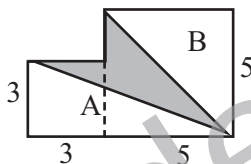
- 5» Запишите формулу для нахождения площади фигуры на рисунке.



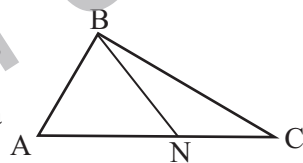
- 6» Дано: ABCD параллелограмм.
AM = MD; $S_{\triangle CMD} = 8 \text{ см}^2$
Найти: S_{ABCD}



- 7» Найдите площадь закрашенной части на рисунке.



- 8» 1) Найдите площадь $\triangle ABN$, если $S_{\triangle ABC} = 90 \text{ см}^2$,
 $AN : NC = 3 : 2$.
2) Найдите площадь $\triangle ABN$, если BN - медиана, а
 $S_{\triangle ABC} = 60 \text{ см}^2$.

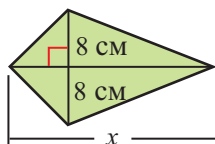


- 9» Найдите x по данным рисунка.

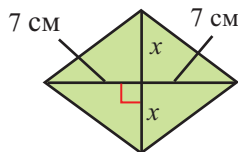
$S = 63 \text{ см}^2$



$S = 168 \text{ см}^2$



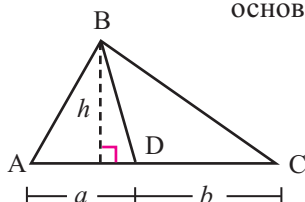
$S = 56 \text{ см}^2$



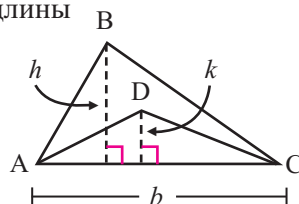
Обобщающие задания

- 10» Исследование.** Исследуйте отношение площадей двух треугольников в различных случаях.

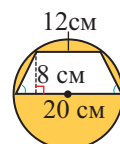
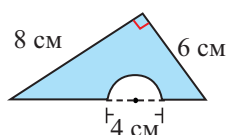
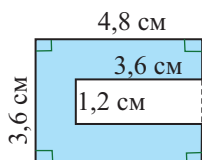
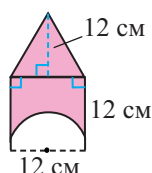
1) Если равны длины высот



2) Если равны длины оснований



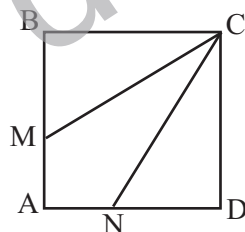
- 11»** По данным рисунка найдите площадь закрашенной части.



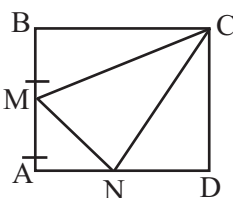
- 12»** Докажите, что отношение сторон обратно пропорционально отношению высот, т.е. $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

- 13»** 1) Найдите площадь равностороннего треугольника с высотой h .
2) Найдите катеты прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 13 см, а площадь 30 см^2 .
3) Найдите площадь остроугольного треугольника с высотой 7 см, если высота делит противоположающую сторону на отрезки 3 см и 9 см.

- 14»** Квадрат со стороной 3 см разделён отрезками CM и CN на три равные по площади части. Найдите длину отрезка CM.



- 15»** Площадь прямоугольника ABCD составляет 72 кв.ед. Точки M и N являются серединами сторон прямоугольника. Найдите площадь $\triangle CMN$. **Указание:** используйте что $S_{\triangle CMN} = S_{ABCD} - S_{\triangle BMC} - S_{\triangle DNC} - S_{\triangle AMN}$. Обозначьте $AD = a$, $AB = b$ и выразите площади через ab .



4.1. Рациональные уравнения

4.2. Подобие фигур

В этом разделе вы научитесь:

- решать различные задачи, при помощи рациональных уравнений;
- свойствам подобных треугольников;
- свойствам подобных четырёхугольников;
- решать различные задачи, применяя признаки подобия треугольников;
- изображать преобразования подобия;
- изображать различные виды движения фигур.

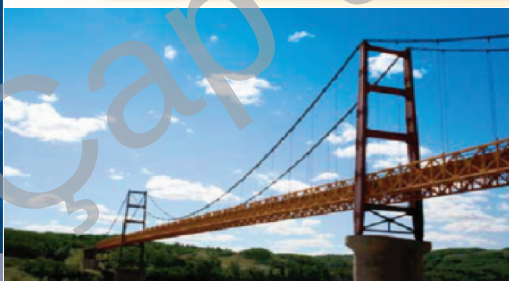
Рациональные уравнения широко применяются в приборостроении, космических исследованиях, финансовых операциях и т.д.

Подобие фигур широко применяется в измерительных, конструкторских и дизайнерских работах.

Это интересно!

На рисунке изображена модель орбитального космического корабля, предназначенная для полёта в космос туристов. Корабль рассчитан на 6 пассажиров и 2 члена экипажа.

Для того, чтобы рассчитать оптимальные размеры корабля конструкторам и инженерам пришлось решить много рациональных уравнений.



Рациональные уравнения

Уравнение, содержащее в левой и правой части рациональные выражения называется рациональным уравнением. Во многих задачах приходится решать рациональные уравнения, содержащие переменную в знаменателе. В этом случае необходимо указывать область допустимых значений переменных (ОДЗ).

Пример 1. $\frac{1}{x-3} = 2$ В данном уравнении ОДЗ $x \neq 3$. Учитывая, что $x \neq 3$ умножим обе части уравнения на $(x-3)$.

$$\frac{(x-3)}{x-3} = 2(x-3), \text{ отсюда получим } 1 = 2(x-3), 2x = 7 \quad x = 3,5$$

Подставим полученное значение в уравнение: $\frac{1}{3,5-3} = \frac{1}{0,5} = 2 \quad 2 = 2$

Таким образом, $x = 3,5$ является корнем уравнения. Данное уравнение не имеет других корней.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{x+5}{x-1} - \frac{x+1}{x-3} = \frac{-8}{(x-1)(x-3)}$

ОДЗ данного уравнения $x \neq 1, x \neq 3$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель $(x-1)(x-3)$.

$$(x-1)(x-3) \cdot \frac{x+5}{x-1} - (x-1)(x-3) \cdot \frac{x+1}{x-3} = \frac{-8(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)} \quad \text{Согласно равенству}$$

$$(x+5)(x-3) - (x+1)(x-1) = -8 \quad \text{После сокращения}$$

$$2x - 6 = 0 \quad \text{Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые}$$

$$x = 3$$

При $x = 3$ данное уравнение не имеет смысла (так знаменатель при этом превращается в «0»). Это говорит о том, что данное уравнение не имеет корней.

Пример 3. В уравнении, $\frac{12}{x+5} = \frac{4}{x+2}$ ОДЗ $x \neq -5, x \neq -2$.

Используя свойство пропорции можно написать:

$$12(x+2) = 4(x+5)$$

$$12x + 24 = 4x + 20 \quad 8x = -4 \quad x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Обучающие задания

1» Решите уравнения.

$$\frac{4}{a} = \frac{3}{a-2}$$

$$\frac{x}{x+1} = \frac{x-6}{x-1}$$

$$\frac{m-1}{m+1} - \frac{2m}{m-1} = -1$$

$$\frac{a-1}{a+1} - \frac{2a}{a-1} = 1$$

$$\frac{a}{3a+6} - \frac{a}{5a+10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2n}{n-1} + \frac{n-5}{n^2-1} = 1$$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{3}{3n-1} = \frac{2}{2n-1}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{x} = \frac{x}{12}$$

Рациональные уравнения

Пример 1. Решим уравнение. $\frac{12}{6-x} = x + 1$ Здесь ОДЗ, $x \neq 6$.

Умножим обе части уравнения на $(6-x)$: $12 = (x+1)(6-x)$

Отсюда $12 = 6x - x^2 + 6 - x$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x_1 = 2, x_2 = 3$$

Проверьте, являются ли оба этих числа корнями данного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{x^2-3x}{x-2} = \frac{2}{2-x}$, $x \neq 2$.

Запишем уравнение в виде $\frac{x^2-3x}{x-2} = \frac{-2}{x-2}$ и умножим обе стороны на

общий множитель $(x-2)$. Получим $x^2 - 3x = -2$

Отсюда $x^2 - 3x + 2 = 0$, $x_1 = 1, x_2 = 2$

При проверке, убеждаемся что, $x = 2$ не удовлетворяет уравнению, т.к. превращает знаменатель в «0». Таким образом, корнем данного уравнения является только $x = 1$.

Внимание! После решения рационального уравнения, содержащего переменную в знаменателе, нужно обязательно выполнить проверку корней.

1 Решите уравнения.

a) $\frac{10}{2x-3} = x - 1$

c) $\frac{8}{x} = 3x + 2$

e) $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{5x-6}{x^2-4}$

b) $\frac{x^2+4x}{x+2} = \frac{2x}{3}$

d) $\frac{3}{x^2+2} = \frac{1}{x}$

f) $\frac{x^2-6x}{x-5} = \frac{5}{5-x}$

2 Решите уравнения.

a) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2t} + \frac{2}{t^2} = 0$

c) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{t-2} + \frac{1}{t+2} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{5z-7}{2z-2} - \frac{3z+2}{z+1} = 0$

3 Решите уравнения.

a) $x = \frac{4}{x} - \frac{x}{9} + 2$

b) $(1 + \frac{1}{x})^2 = \frac{9}{x^2}$

4 a) Найдите число, если число обратное данному в 8 раз больше его квадрата.

b) Сумма числа и числа обратного данному равна $\frac{10}{3}$. Найдите это число.

c) Знаменатель обыкновенной дроби на 3 больше числителя. Если числитель увеличить на 7, а знаменатель на 5, то дробь увеличится на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

5 При каких значениях переменной: a) значение выражения $\frac{x^2+2x}{x+6}$ равно 1;

b) Разность выражений $\frac{6}{x-3}$ и $\frac{x+1}{x+3}$ равна произведению этих же выражений?

Решение задач, при помощи рациональных уравнений

Задачи на проценты и отношения

- 1» Команда Ахмеда из 20 игр, сыгранных до настоящего дня, выиграла 8 игр. Сколько ещё игр подряд должна выиграть команда, чтобы достичь 75%-го положительного результата?

План для решения: 1. Отношение выигранных игр ко всем играм равно $\frac{8}{20}$

2. Если сыграть ещё x игр и выиграть их подряд, то отношение выигранных игр ко всем играм станет: $\frac{8+x}{20+x}$

3. Уравнение: $\frac{8+x}{20+x} = 0,75$

- 2» Алия из 20 теннисных партий выиграла 12. Сколько подряд партий может проиграть Алия, чтобы её результат составлял 50%?

- 3» В классе 8 мальчиков и 18 девочек. После того, как в класс пришли ещё несколько мальчиков, вероятность того, что случайным образом выбранный ученик является мальчиком, стала равна $\frac{1}{3}$. Сколько мальчиков было принято в класс?

- 4» В 10 л сока 60 % чистого фруктового экстракта. Сколько фруктового экстракта нужно добавить в сок, чтобы его содержание составило 75% ?

- 5» Сколько соли нужно добавить в 40 л 10%-ного раствора, чтобы он стал 20%-ным?

- 6» Есть два раствора 30%-ый и 10%-ный. Сколько 30%-го раствора надо добавить к 1 л 10%-го раствора, чтобы раствор стал 22%-ным?

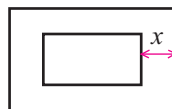
Геометрические задачи

- 7» 1) Одна сторона прямоугольника на 14 см больше другой, а диагональ равна 34 см. Найдите стороны прямоугольника.

2) Один из катетов прямоугольного треугольника на 3 см, а другой на 6 см меньше гипотенузы. Найдите длину гипотенузы.

3) Длина прямоугольника на 7 см больше ширины, а площадь равна 60 см^2 . Найдите периметр прямоугольника.

- 8» По периметру садового участка прямоугольной формы длиной 8 м и шириной 4 м, на одинаковом расстоянии от каждой из сторон, разбит цветник. Зная, что площадь сада вместе с цветником составляет 165 м^2 , найдите ширину цветника.



- 9» При увеличении на одинаковую длину всех сторон прямоугольника размерами $2 \text{ м} \times 4 \text{ м}$, его площадь увеличилась в 3 раза. Найдите новые размеры участка.

- 10» Площадь треугольника, основание которого на 20 см больше высоты, равна 78 см^2 . Найдите основание треугольника.

Задачи на работу

Задача. Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 12 дней. За сколько дней каждый рабочий выполнит эту работу в отдельности, если одному из них для выполнения этой работы потребуется на 10 дней больше, чем другому? **Решение:** Пусть, 2-ой рабочий может выполнить работу за x дней, тогда 1-ый рабочий выполнит её за $(x + 10)$ дней

Первый рабочий за 1 день выполняет $\frac{1}{x+10}$ - ую часть работы, 2-ой $-\frac{1}{x}$ - ую.

Вместе, за 1 день они выполняют $\frac{1}{x+10} + \frac{1}{x}$ часть работы. Зная, что вместе за 1 день они выполняют $\frac{1}{12}$ часть работы (согласно условию), составим

уравнение $\frac{1}{x+10} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$. Умножим обе части уравнения на $12x(x+10)$.

Получим, $12x + 12(x + 10) = (x + 10) \cdot x$. После упрощения имеем $x^2 - 14x - 120 = 0$. Решением данного уравнения являются числа $x_1 = 20$ и $x_2 = -6$ (не удовлетворяет условию, т.к. $x > 0$). Итак $x = 20$, $x + 10 = 30$.

Ответ: 2-ой рабочий выполняет работу за 20 дней, а 1-ый – за 30 дней.

- 1» Фарид может выполнить работу за 3 часа, а вместе с Кямраном ту же работу за 2 часа. За сколько времени выполнит эту работу Кямран, работая один?
- 2» Две бригады работая вместе закончили ремонт за 6 дней. За сколько дней закончит этот же ремонт каждая бригада в отдельности, если одной из них для этого понадобится на 5 дней больше, чем другой?
- 3» Два тракториста могут вспахать поле за 4 часа. За сколько часов вспашет это же поле каждый из трактористов в отдельности, если одному из них для выполнения этой работы потребуется на 6 часов больше, чем другому?
- 4» Через одну трубу бассейн наполняется в 2 раза быстрее, чем через другую. Если открыть обе трубы, то бассейн наполнится за 4 часа. За сколько времени наполняет бассейн каждая труба в отдельности?
- 5» Через одну трубу бассейн наполняется в 3 раза быстрее, чем через другую. Чтобы наполнить бассейн сначала на 1 час открыли только первую трубу, а затем на 4 часа открыли только вторую трубу. За сколько времени наполнят бассейн обе трубы вместе?
- 6» Два компьютера могут подсчитать зарплату работников фирмы за 3 часа. Один из компьютеров, используя более современную программу для расчётов, может закончить работу на 3 часа раньше другого. Сколько времени потребуется каждому компьютеру, чтобы закончить работу?
- 7» Двое работников, обрабатывают некоторую информацию и посылают её по электронной почте. Сколько времени, потребуется для выполнения этой же работы каждому работнику в отдельности, если один из них выполняет её в 3 раза быстрее другого?

Решение задач с помощью рациональных уравнений

Задачи на движение

Задача. Путь длиной 480 км проходит по асфальтовой и по просёлочной дороге. Автомобиль расстояние 80 км по просёлочной дороге, прошёл со скоростью на 40 км/час меньше, чем по асфальтовой дороге. Зная, что на весь путь он затратил 7 часов, найдите время, которое потратил автомобиль при движении по просёлочной дороге.

1 способ:

Путь	Пройденный путь (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)	Путь = скорость × время
По асфальтовой дороге	400	$v + 40$	t	$(v + 40)t = 400$
По просёлочной дороге	80	v	$7 - t$	$v(7 - t) = 80$

1-й способ: Из 2-ой строки таблицы: $v + 40 = \frac{400}{t}$ $v = \frac{400 - 40t}{t}$
Из 3-ей строки таблицы: $v = \frac{80}{7 - t}$

Отсюда получаем рациональное уравнение $\frac{40(10 - t)}{t} = \frac{80}{7 - t}$

Разделим обе части уравнения на 40: $\frac{10 - t}{t} = \frac{2}{7 - t}$

Получим $t^2 - 19t + 70 = 0$; $t_1 = 5$; $t_2 = 14$ (противоречит условию задачи)
Ответ: по просёлочной дороге 2 часа

2-ой способ: Автомобиль ехал по дороге, покрытой асфальтом

$\frac{400}{v + 40}$ часов, а по просёлочной дороге $\frac{80}{v}$ часов.

Зная, что на весь путь он потратил 7 часов, составим уравнение:

$\frac{400}{v + 40} + \frac{80}{v} = 7$ Решив данное уравнение, получим $v = 40$ км/ч. Тогда по просёлочной дороге он двигался $80 : 40 = 2$ часа.

- 1»** Автомобиль двигаясь со скоростью v км/ч преодолел расстояние между пунктами А и В за 10 часов. Если половину всего пути автомобиль двигался со скоростью $\frac{v}{2}$, а вторую половину пути со скоростью $\frac{v}{3}$, то за сколько времени он преодолет путь от города А до города В?
- 2»** Автомобиль, двигаясь из пункта А в пункт В, через два часа после начала движения увеличил скорость на 10 км и оставшийся путь проехал за 4 часа. Зная, что расстояние между пунктами А и В равно 460 км, найдите скорость с которой двигался автомобиль первые два часа.
- 3»** Один из лыжников дистанцию в 20 км проходит на 20 минут быстрее другого. Найдите скорость каждого лыжника, если скорость одного из них на 2 км/ч больше скорости другого.
- 4»** Турист на лодке для гребли проделал путь длиной 20 км по течению реки и вернулся обратно. На весь путь он потратил 7 часов. Найдите скорость течения, если скорость лодки в стоячей воде равна 7 км/ч.
- 5»** Лодка, за некоторое время, прошла по течению путь длиной в 48 км. На обратный путь она потратила на 1,6 часа больше. Скорость течения реки равна 4 км/ч.
 - 1) Найдите скорость лодки в стоячей воде
 - 2) За какое время лодка прошла путь туда и обратно?

Обобщающие задания

1» Решите уравнения.

a) $\frac{x-3}{x} = \frac{x-3}{x-6}$ b) $\frac{4}{a} = \frac{3}{a-2}$ c) $\frac{3}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{6}{1-x^2}$

d) $\frac{5}{4} + \frac{3y}{2} = \frac{7y}{6}$ e) $\frac{3}{x} = \frac{1}{x-2}$ f) $\frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+2} = \frac{20}{x^2-4}$

2» Оператор мобильной связи объявил ежемесячную абонентскую плату в размере 10 манат, и 50 гяпик за каждую минуту разговора с любой страной. Запишите выражение, которое показывает, сколько в среднем будет стоить минута разговора пользователя сотовой связи, если за месяц он разговаривал x минут? Сколько минут говорил пользователь, если минута разговора за месяц составила в среднем 60 гяпик?

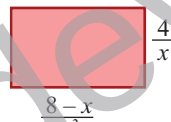
3» Решите уравнения.

$\frac{x^2}{x^2+x} = \frac{x-6}{x-1}$	$\frac{5}{y-2} - \frac{4}{y-3} = \frac{1}{y}$	$\frac{3}{y-2} + \frac{7}{y+2} = \frac{10}{y}$
$\frac{3x-3}{x^2-1} + \frac{2}{x} = 2$	$\frac{12}{x-1} - \frac{8}{x+1} = 1$	$\frac{4x}{2x+3} - \frac{2x}{2x-3} = 1$
$\frac{4}{x^2-9} + \frac{x+1}{x-3} = 1$	$\frac{2n}{n-1} + \frac{n-5}{n^2-1} = 1$	$\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$

4» Рахилия и Сона вместе убрали квартиру за 2 часа. За какое время убрала бы квартиру Рахилия, если известно, что Сона одна выполняет эту работу на 3 часа быстрее?

5» По данным на рисунке выполните следующие задания.

- 1) Запишите рациональное выражение, которое показывает разность ширины и длины прямоугольника.
- 2) Запишите выражение нахождения площади прямоугольника.
- 3) Найдите значение переменной x , если периметр прямоугольника равен 22 см.



6» В коробке находится 30 чёрных шаров и n белых. Найдите n , если вероятность того, что случайным образом вынутый из коробки шар является белым, равна $\frac{2}{5}$.

7» Сколько литров воды надо добавить к 40 гр 5%-ого раствора соли, чтобы он стал 4%-ным?

8» **Задача Омара Хайяма.** Решите уравнение разными способами.

$$\frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{4}$$

Обобщающие задания

- 9» Всадник поднялся по склону на гору и спустился обратно. Длина склона равна 6,5 км. Спускался он в 3 раза быстрее, чем поднимался. Составьте выражение, соответствующее времени, которое всадник потратил на всё путешествие, если скорость всадника на подъёме v км/ч.

- 10» Решите уравнения, применив метод разложения квадратного трёхчлена на множители.

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} + \frac{x^3 + x^2}{x} = -3 & 2) \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} + \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = x^2 - 3 \\ 3) \frac{3}{x^2 - 9} - \frac{1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{3}{2x^2 + 6x} & 4) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 2x - 3} \end{array}$$

- 11» Через одну трубу цистерна с бензином может наполниться за n часов, а через другую – за m часов. За сколько часов наполнится цистерна, если открыть обе трубы?

- 12» Растения пустыни экономно используют воду, накопленную в стволах. Вода испаряется от поверхности растений. Чем больше отношение площади поверхности, к воде содержащейся в растении, тем меньше вероятность выживания растения в пустыне. Кактус сорта «бочонок» имеет приблизительно форму сферы. Площадь сферы находится по формуле $S = 4\pi r^2$, а объём по формуле $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.
- 1) Определите отношение площади поверхности к объёму жидкости, которая содержится в кактусе.
 - 2) В каком случае кактус имеет более оптимальные размеры для выживания, при $r = 12$ см или $r = 8$ см?

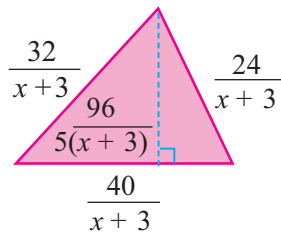


- 13» Запишите отношение площадей круга и квадрата на рисунке.



- 14» По данным рисунка решите следующие задачи:

- 1) Запишите выражение для нахождения площади треугольника.
- 2) Запишите выражение для нахождения периметра треугольника.
- 3) Периметр треугольника на рисунке равен 24 см. Найдите длины сторон и высоту треугольника.



Преобразование фигур. Поворот

Отображение плоскости на себя, которое сохраняет расстояния между точками, называется движением. Примерами движения являются такие преобразования, как центральная симметрия, осевая симметрия, поворот (вращение), скольжение.

Практическая работа. Вырежьте из картона различные буквы. Выполните движения, как показано на примере.



Осевая симметрия
(отражение)



Поворот
(вращение)



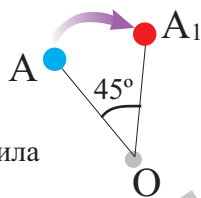
Скольжение
(параллельный перенос)

Поворот

Пусть, заданы точка O и угол α . Если при движении плоскости луч, выходящий из точки O совершает поворот на угол α , то такое движение называется поворотом вокруг точки O на угол α . Поворот может быть произведён в направлении, как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки. Если при повороте вокруг центра O , точка A перешла в точку A_1 , то верно следующее.

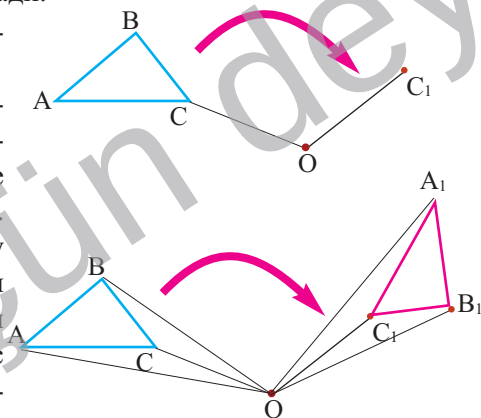
1. Если точка A не совпадает с точкой O , то $AO = A_1O$.
2. Если точка A совпадает с точкой O , то точки A и A_1 совпадают.

Пример 1. Угол поворота AOA_1 равен 45° . Точка A совершила поворот вокруг точки O , на угол 45° по часовой стрелке.



Пример 2. Проанализируйте последовательность шагов, при котором совершается поворот треугольника $\triangle ABC$ вокруг точки O , на угол 120° . Повторите эти шаги, выполнив построение в тетради.

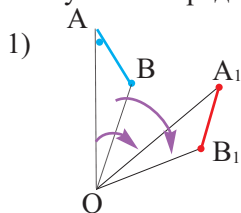
1. Соедините точку O и точку C отрезком прямой.
2. При помощи транспортира от OC постройте угол 120° в направлении по часовой стрелке и циркулем отложите отрезок OC_1 , конгруэнтный отрезку OC .
3. По тому же правилу соедините точку O с точками A и B . Постройте отрезки OA_1 и OB_1 конгруэнтные полученным отрезкам OA и OB и составляющие с ними угол 120° . Точки A_1 , B_1 , C_1 являются вершинами нового треугольника. Соедините эти точки.



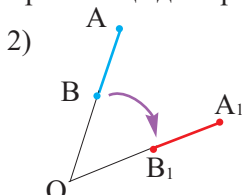
Примечание. Центральная симметрия является поворотом плоскости относительно центра симметрии на 180° .

Преобразование фигур. Поворот

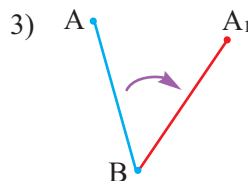
- 1»** На рисунках ниже изображены различные положения точек A и B при вращении их вокруг точки O в направлении по часовой стрелке. Для каждого случая в тетради начертите ещё два примера.



Точки A, B и O не расположены на одной прямой



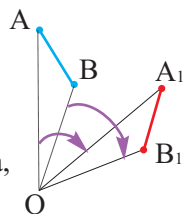
Точки A, B и O расположены на одной прямой



Точки B и O совпадают

- 2»** При повороте вокруг точки O точка A преобразована в точку A₁, а точка B - в точку B₁. Докажите, что $AB \cong A_1B_1$.

План для доказательства: 1. По определению поворота, установите конгруэнтные отрезки и конгруэнтные углы.
2. Используйте аксиому сложения углов.
3. Используйте признаки конгруэнтности треугольников.



- 3»** Начертите в тетради рисунок. Точки B, D, F, H есть середины сторон квадрата ACEG.

1) Для данной фигуры установите фигуру, которая получится при вращении относительно заданной точки.

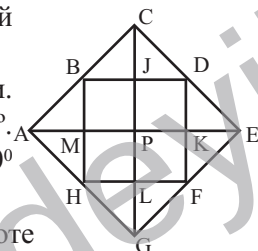
а) поворот AB вокруг точки P на угол 90° по часовой стрелке.

б) поворот CE вокруг точки E против часовой стрелки.

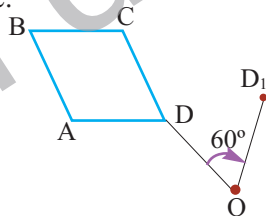
с) поворот треугольника $\triangle KEF$ вокруг точки P на 180° .

д) поворот треугольника $\triangle APG$ вокруг точки P на 90° по часовой стрелке.

2) Придумайте для соседа по парте вопрос о повороте какого-либо отрезка или треугольника на рисунке.

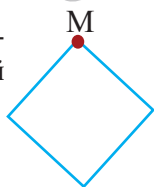


- 4»** Начертите в тетради поворот параллелограмма ABCD на угол 60° вокруг точки O по часовой стрелке. Для примера на рисунке изображен поворот точки D на угол 60° .



- 5»** Начертите в тетради поворот представленных ниже фигур вокруг точки M на заданный угол.

1) 100° в направлении против часовой стрелки



2) 75° в направлении по часовой стрелке

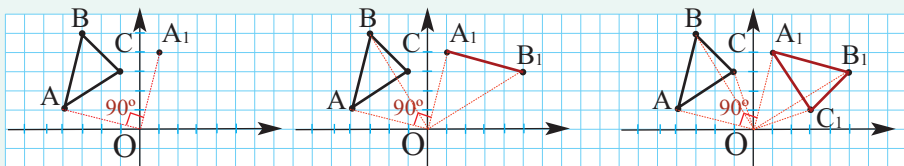


• M

Преобразование фигур. Поворот

Исследуйте и начертите в тетради.

На рисунке показана последовательность шагов, которые выполняются при повороте треугольника $\triangle ABC$ с вершинами $A(-4;1)$, $B(-3;5)$, $C(-1;3)$ на угол 90° в направлении по часовой стрелке.



При повороте на угол 90° в направлении по часовой стрелке координаты вершин изменяются следующим образом.

$\triangle ABC \rightarrow \triangle A_1B_1C_1$

$A(-4; 1) \rightarrow A_1(1; 4)$

$B(-3; 5) \rightarrow B_1(5; 3)$

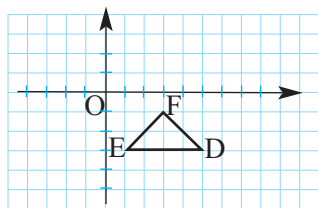
$C(-1; 3) \rightarrow C_1(3; 1)$

Координаты изменяются как $(x; y) \rightarrow (y; -x)$.

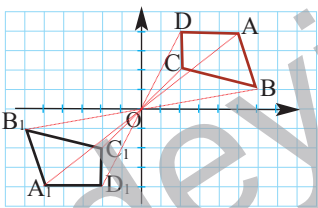
Внимание! $|OA| = |OA_1|$, $|OB| = |OB_1|$, $|OC| = |OC_1|$

$|AB| = |A_1B_1|$, $|BC| = |B_1C_1|$, $|AC| = |A_1C_1|$

- 6) Начертите треугольник, который получится при повороте вокруг точки O треугольника с вершинами $E(1;-3)$, $F(3;-1)$, $D(5;-3)$ в направлении по часовой стрелке на угол 90° . Запишите в общем виде, как при этом, изменились координаты вершин треугольника.



- 7) На рисунке изображён поворот четырёхугольника относительно начала координат O на угол 180° .



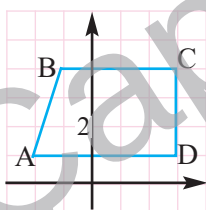
1) Проанализируйте координаты вершин полученной фигуры относительно исходной фигуры и обобщите своё мнение.

2) По рисунку запишите все возможные конгруэнтные отрезки

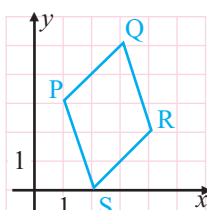
- 8) Начертите на координатной плоскости поворот любого треугольника относительно начала координат на углы 90° , 180° , 270° и 360° в направлении против часовой стрелки.

- 9) Запишите координаты вершин фигур, которые получатся после поворота фигур, изображённых на рисунке, в направлении по часовой стрелке на заданный угол относительно начала координат.

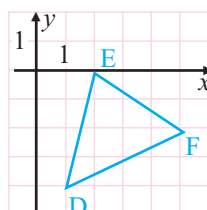
1) 90°



2) 180°



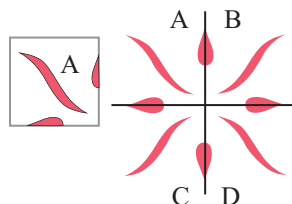
3) 360°



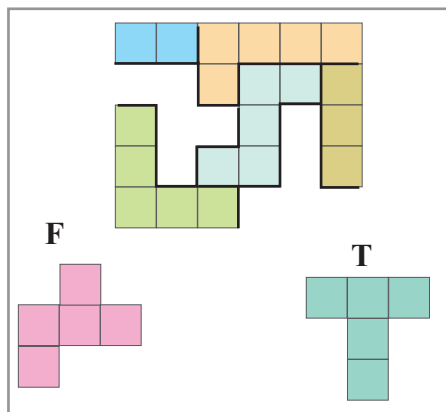
Преобразование фигур. Поворот

- 10** $\Delta A_1B_1C_1$ получен из ΔABC при помощи симметрии относительно оси OX , $\Delta M_1N_1K_1$ получен из ΔMNK поворотом относительно начала координат в направлении против часовой стрелки на угол 90° . Начертите рисунки по условию.

- 11** Узор на рисунке можно получить, если сложить лист на четыре равные части, и вырезать узор на одной из них. При этом на 4-х частях получаются симметричные узоры. Объясните, при помощи какого вида движения одна часть узора преобразована в другую.



- 12** Компьютерные игры созданы на основе заполнения (составления мозаики) различных прямоугольных областей фигурами в виде сгруппированных квадратов: домино (по два), тримино (по три), пентамино (по пять). Какие действия надо выполнить для того, чтобы разместить на место пентамимы F и T в мозаичной области размером 6×5 ? Покажите эти движения на рисунке.

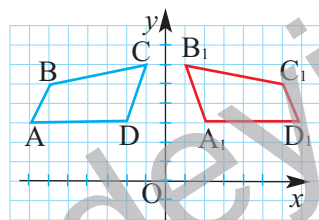


- 13** Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ получен отражением четырёхугольника $ABCD$ симметрично относительно оси OY .

1) Запишите как изменились при этом координаты вершин четырёхугольника, по образцу

$$A(-7;3) \rightarrow A_1(7;3)$$

2) Запишите обобщённую запись изменения координат точки при симметрии относительно оси ординат.



- 14** Начертите фигуры, координаты вершин которых заданы ниже и фигуры симметричные заданным согласно условию.

1) Вершин $E(-3; 2)$, $F(0; 2)$, $G(-2; 5)$ относительно оси абсцисс

2) Вершин $J(2; -1)$, $K(4; -2)$, $L(4; -3)$, $M(2; -3)$ относительно оси ординат

3) Вершин $P(2; -2)$, $Q(4; -2)$, $R(3; -4)$ относительно прямой $y = x$

4) Вершин $A(2; 2)$, $B(-2; 2)$, $C(-1; 4)$ относительно прямой $y = -x$

- 15** Начертите рисунок, отображающий поворот фигуры, вершины которой имеют следующие координаты, относительно начала координат в направлении по часовой стрелке на угол, указанный в условии:

1) $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(4; 4)$; 90°

2) $A(1; 3)$, $B(4; 1)$, $C(4; 4)$; 180°

3) $M(2; 2)$, $N(5; 2)$, $P(3; -2)$, $Q(0; -2)$; 90°

4) $G(-2; 1)$, $H(-3; -2)$, $J(-1; -4)$; 180°

Отношение, пропорция

- 1» Закончите запись:
Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ то,

a) $\frac{a+2b}{b} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{\square}{\square}$

c) $\frac{a+b}{c+d} = \frac{\square}{\square}$

Свойства пропорции

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ то, $ad = bc$.

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ то, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ то, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ то, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

- 2» Упростите отношения.

1) $\frac{3\text{ м}}{12\text{ км}}$

2) $\frac{60\text{ см}}{1\text{ м}}$

3) $\frac{350\text{ г}}{1\text{ кг}}$

4) $\frac{2\text{ км}}{3000\text{ м}}$

5) $\frac{6\text{ км}}{10\text{ м}}$

6) $\frac{2\text{ кг}}{20\text{ г}}$

7) $\frac{400\text{ м}}{0,5\text{ км}}$

8) $\frac{20\text{ кг}}{4\text{ г}}$

- 3» Упростите отношения.

1) $\frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 - 49}$

2) $\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 36}$

3) $\frac{x^2 - 3x - 4}{(x - 4)^2}$

4) $\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 9x + 18}$

- 4» Решите уравнения.

1) $\frac{2}{b+2} = \frac{4}{b}$

2) $\frac{5y+7}{4} = \frac{5y}{3}$

3) $\frac{4}{2c+6} = \frac{10}{7c-2}$

4) $\frac{2a-4}{a^2+2a} = \frac{3}{a}$

- 5» Верно ли, что:

1) если $\frac{c}{8} = \frac{d}{12}$,то $\frac{c}{d} = \frac{2}{3}$

2) если $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$,то $\frac{b+4}{4} = \frac{c+4}{5}$

- 6» Найдите отношение расстояний между точками на числовой прямой.



1) $\frac{AB}{CD}$

2) $\frac{BD}{CF}$

3) $\frac{BF}{AD}$

4) $\frac{CF}{AB}$

5) $\frac{FD}{EC}$

- 7» 1) Назрин играла в компьютерную игру. При этом она попала в цель 3 раза из 12. Сколько раз, по-вашему, она попадёт в цель, сделав 100 выстрелов?
- 2) При проверке качества было обнаружено, что из 400 автомобилей 4 не прошли испытания, т.к. имели дефекты. Дайте прогноз, сколько автомобилей будут иметь дефект из 2000 испытуемых автомобилей.

- 8» Коэффициент передачи ведущих колёс к ведомым колёсам измеряется отношением зубцов на колёсах. Найдите количество зубцов ведомого колеса, если количество зубцов ведущего колеса равно 20, а коэффициент передачи равен 5:2.
- 9» Найдите разность между наибольшим и наименьшим из углов треугольника, градусные меры углов которого относятся как 2:3:4.
- 10» Страус за 60 минут пробегает 55 км. За сколько минут страус пробежит 22 км?
- 11» Решите задачи при помощи модели часть- целое.



В группе альпинистов количество девочек составляет $\frac{3}{8}$ от количества мальчиков. Сколько девочек в группе, если мальчиков на 20 больше, чем девочек.

2) $\frac{2}{3}$ части денег у Дилары составляет $\frac{1}{2}$ часть денег Джавида. Найдите отношение денег Дилары к деньгам Джавида.

3) Отношение количества книг у Лалы к количеству книг Мурада 1: 2. Если Лала купит ещё 12 книг, то это отношение станет 2 : 1.

а) Сколько книг у Мурада? Как изменится это отношение, если Мурад купит ещё 4 книги?

- 12» Самир за каждую проданную книгу зарабатывает 40 гяпик, при этом продав 50 книг он получает ещё 4 маната. Сколько заработал Самир, если он продал 775 книг?

- 13» Махир хочет увеличить рисунок железного дерева, размером 5 см × 7 см, до размеров плаката, так чтобы чтобы ширина плаката была 0,75 м. Сколько метров составит длина плаката?



- 14» Участники флешмоба «Вам есть письмо» раздали гражданам последнее письмо, которое написал отцу и матери Национальный Герой Азербайджана Мубариз Ибрагимов совершив беспрецедентный по храбрости поступок в успешных боях за целостность Азербайджана. Зачитав прощальное письмо они отправились на Аллею Шехидов к могиле героя. $\frac{2}{3}$ участников флешмоба были молодые люди в возрасте от 16 до 25 лет. После того, как к акции присоединились ещё 55 молодых людей, отношение количества молодёжи ко всем участникам составило 5:7. Сколько молодёжи участвовало в флешмобе?

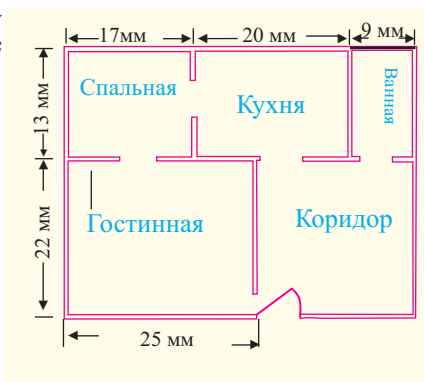
Масштаб

- 1» План квартиры сделан в масштабе 1: 300. Найдите реальные размеры всех комнат. Для примера найдены размеры салона.

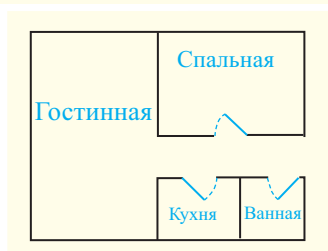
Если на рисунке длина салона равна 2,5 см, а ширина 2,2 см, то реальные размеры будут:

$$\frac{1 \text{ см}}{3 \text{ м}} = \frac{2,5 \text{ см}}{x \text{ м}}; x = 3 \cdot 2,5 = 7,5 \text{ (м)}$$

$$\frac{1 \text{ см}}{3 \text{ м}} = \frac{2,2 \text{ см}}{y \text{ м}}; y = 3 \cdot 2,2 = 6,6 \text{ (м)}$$



- 2» При помощи линейки выполните соответствующие измерения и найдите реальные размеры каждой комнаты, изображённой на рисунке, в соответствии с указанным масштабом.



Масштаб: 1:500

- 3» Начертите площади фигур указанных ниже в масштабе. Для правильного определения масштаба выполните повторные измерения и проверьте вычисления.

1) Бильярдный стол размерами

1,6 м × 3,2 м

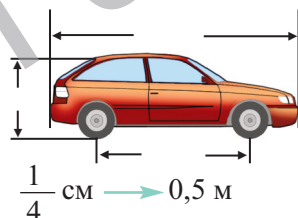
2) Баскетбольную площадку размерами 28 м × 15 м

3) Дорожку для игры в боулинг размерами 18,2 м × 1,7 м.

4) Футбольное поле размерами 64 м × 100 м.

- 4» Дизайнер газеты решил уменьшить размеры фотографии размером 6 см × 9 см. Найдите длину уменьшенной фотографии, если её ширина стала 4 см.

- 5» Найдите реальные размеры автомобиля на рисунке в соответствии с указанным масштабом



- 6» 1) Длине отрезка 2,5 см на карте на местности соответствует 15 км. Найдите расстояние между двумя городами, если на этой карте ему соответствует отрезок 23,2 см.

2) Лейла рисует уменьшенную копию скульптуры. Найдите реальную высоту скульптуры, если на рисунке её высота равна 18,4 см, а масштаб 1:85.

Пропорциональные отрезки

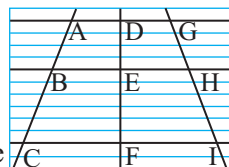
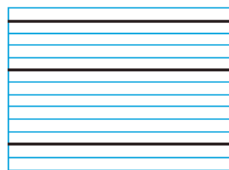
Практическая работа. Пропорциональные отрезки.

1. Начертите в тетради 3 параллельные прямые.
2. Проведите 3 секущие, которые пересекают эти прямые.
3. Измерьте отрезки AB, BC, AC, DE, EF, DF, GH, HI и GI.
4. Запишите и вычислите следующие отношения

$$1) \frac{AB}{BC}, \frac{DE}{EF}, \frac{GH}{HI} \quad 2) \frac{AB}{AC}, \frac{DE}{DF}, \frac{GH}{GI}$$

$$3) \frac{BC}{AC}, \frac{EF}{DF}, \frac{HI}{GI}$$

5. Можно ли по результатам сказать, что параллельные линии делят секущие на пропорциональные отрезки?



Пропорциональные отрезки

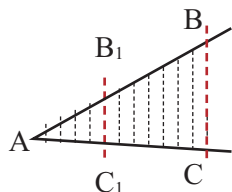
Если для отрезков AB, CD, A_1B_1 , C_1D_1 выполняется $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$,

то отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 .

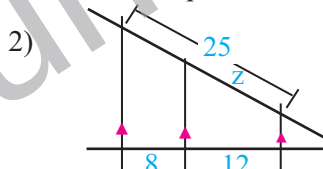
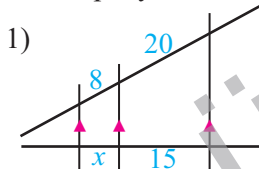
Теорема. Параллельные линии, пересекающие стороны угла, отсекают от них пропорциональные отрезки.

Доказательство. Допустим, что параллельные прямые пересекают стороны угла A в точках B и C, B_1 и C_1 . Для простоты, предположим, что существует отрезок длины δ такой, что он помещается целое число раз как в отрезке AC, так и в отрезке AC_1 , т.е.: $AC = n\delta$, $AC_1 = m\delta$ ($n > m$). Разделим отрезок AC на равные отрезки длиной δ в количестве n раз. В этом случае, одной из точек деления будет точка C_1 . Через точки деления проведём прямые, параллельные BC. По теореме Фалеса эти прямые разобьют отрезок AB на равные отрезки некоторой длины δ_1 . Получим, что $AB = n\delta_1$, $AB_1 = m\delta_1$.

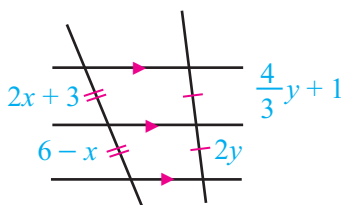
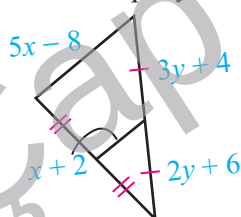
Отсюда $\frac{AC}{AC_1} = \frac{n\delta}{m\delta} = \frac{n}{m}$ и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{n\delta_1}{m\delta_1} = \frac{n}{m}$. Таким образом, $\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1}$.



- 1) По данным рисунка найдите неизвестные длины отрезков.



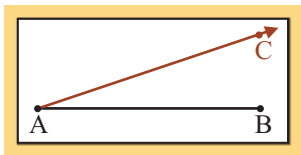
- 2) По данным рисунка найдите x и y.



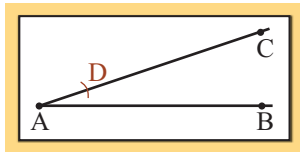
Пропорциональные отрезки

- 1** а) Следуя инструкциям, выполните деление отрезка длины, на конгруэнтные части.

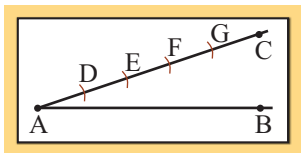
1. Начертите отрезок АВ и точку С не принадлежащую отрезку. Соедините точки А и С.



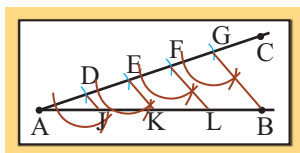
2. Установите циркуль на точке А и проведите дугу, пересекающую сторону АС. Обозначьте точку пересечения через D.



3. Не меняя раствора циркуля, проведите ещё несколько дуг, обозначив точки пересечения через E, F, G, начиная от точки D и т.д.



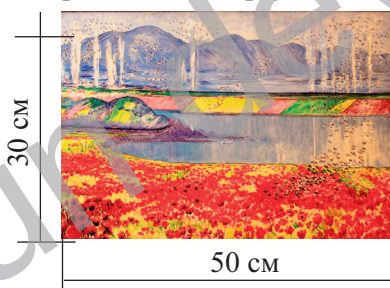
4. Начертите отрезок GB. Через точки D, E, F проведите прямые параллельные GB. На основании чего можно утверждать, что $AJ = JK = KL = LB$ являются конгруэнтными отрезками?



б) Начертите некоторый отрезок и разделите его на части в отношении 1:2:3.

- 2** 1) Найдите длины сторон треугольника, периметр которого равен 40 см, а стороны относятся как 8:7:5.
2) Найдите длины сторон треугольника, периметр которого равен 9,4 см, а стороны относятся как $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$.
3) Углы треугольника относятся как 2:3:7. Определите вид треугольника.

- 3** В магазине продаётся репродукция известной картины Саттара Бахлулзаде «Мечта Земли», оригинал которой находится в Национальном музее искусств Азербайджана. Найдите реальную длину картины, если её ширина равна 1,5 м.



- 4** Стороны прямоугольника на рисунке находятся в золотом отношении. Данный прямоугольник разделили по длине на квадрат и маленький прямоугольник. 1) По данным рисунка, найдите длины сторон маленького прямоугольника. 2) Докажите, что длины сторон маленького прямоугольника, также находятся в золотом отношении.

$$2 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} 2 + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} 2$$

$1+\sqrt{5} \qquad 2 \qquad x$

Подобные четырёхугольники, подобные треугольники

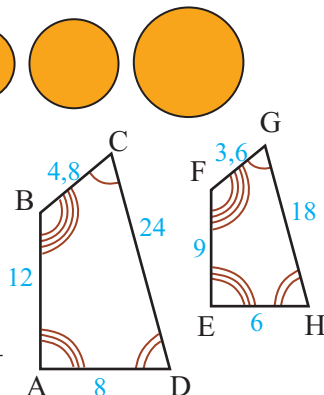
Подобные четырёхугольники, подобные треугольники

Подобными называются фигуры одинаковые по форме и у которых соответствующие размеры пропорциональны. Например, все квадраты подобны друг другу, так же как и окружности разных радиусов.



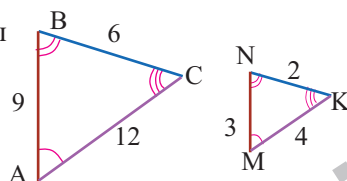
Подобными называются многоугольники, у которых соответствующие углы конгруэнтны, а соответствующие стороны являются пропорциональными отрезками. Например, на рисунке четырёхугольники ABCD и EFGH являются подобными четырёхугольниками. Так как,

$$\angle A \cong \angle E, \angle B \cong \angle F, \angle C \cong \angle G, \angle D \cong \angle H, \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = \frac{4}{3}$$



У подобных треугольников соответствующие углы конгруэнтны, а соответствующие стороны являются пропорциональными отрезками. Здесь, говоря о соответствующих сторонах, имеются в виду стороны, которые находятся напротив конгруэнтных углов. На рисунке для $\triangle ABC$ и $\triangle MNK$ имеем:

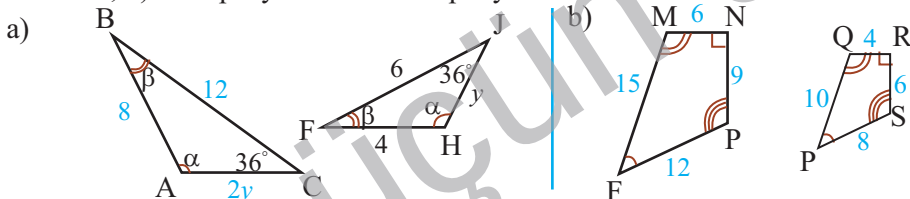
Конгруэнтные углы	Соответствующие стороны
$\angle A \cong \angle M$	BC и NK
$\angle B \cong \angle N$	AC и MK
$\angle C \cong \angle K$	AB и MN



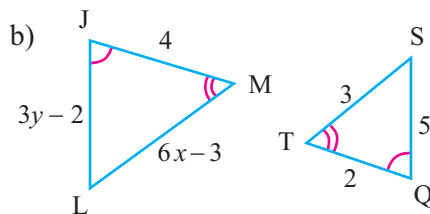
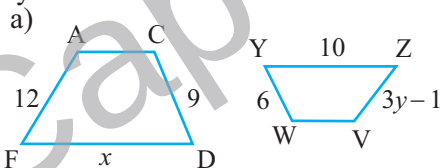
Так как $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK} = \frac{AC}{MK} = 3$, то $\triangle ABC$ и $\triangle MNK$ являются подобными треугольниками. Подобие обозначается знаком “~”. $\triangle ABC \sim \triangle MNK$.

Отношение соответствующих сторон называется коэффициентом подобия и обозначается буквой k . Коэффициент подобия треугольников на рисунке равен 3.

1» Обоснуйте подобие, записав соответствующие условия для а) треугольников; б) четырёхугольников на рисунке.



2» Найдите переменные подобных а) трапеций; б) треугольников на рисунке.



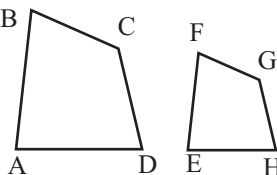
Периметр подобных многоугольников

Теорема. Отношение периметров двух подобных B многоугольников равно отношению соответствующих сторон (или коэффициенту подобия).

Если $ABCD \sim EFGH$, то

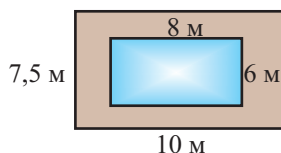
$$\frac{AB+BC+CD+DA}{EF+FG+GH+HE} = \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$$

Запишите доказательство теоремы, приняв коэффициент подобия за k . Для этого можно использовать равенство $AB = k \cdot EF$, которое следует из отношения соответствующих сторон.



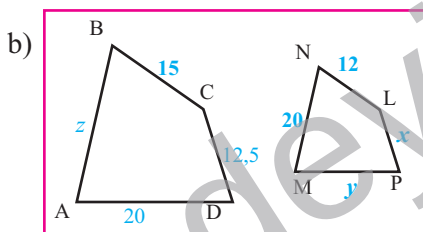
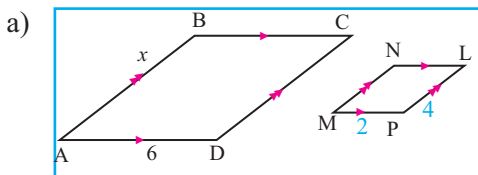
- 3» На рисунке представлен план бассейна и площади, прямоугольной формы вокруг бассейна, облицованной плитам. Зная, что данные прямоугольники подобны, по плану найдите:

- 1) Коэффициент подобия;
- 2) Отношение периметров.



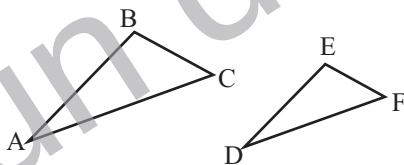
- 4» Зная, что $ABCD \sim MNLP$, найдите:

- 1) Коэффициент подобия $ABCD$ к $MNLP$;
- 2) Коэффициент подобия $MNLP$ к $ABCD$;
- 3) Переменные x, y, z ;
- 4) Отношение периметров.



- 5» Дано: $ABC \sim DEF$, $\frac{AB}{DE} = \frac{m}{n}$

Докажите: $\frac{P(\triangle ABC)}{P(\triangle DEF)} = \frac{m}{n}$



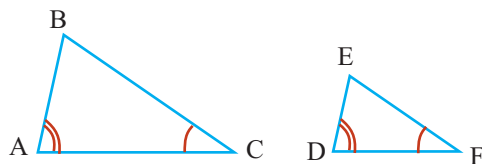
- 6» 1) Коэффициент подобия двух подобных прямоугольников равен $\frac{3}{2}$. Найдите периметр маленького прямоугольника, если периметр большого прямоугольника равен 90 см.
- 2) Коэффициент подобия двух подобных треугольников равен $\frac{4}{5}$. Найдите периметр большого треугольника, если периметр маленького треугольника равен 0,64 м.

Признаки подобия треугольников

Признак подобия УУ (угол угол)

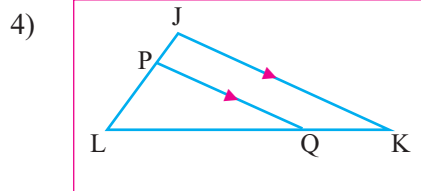
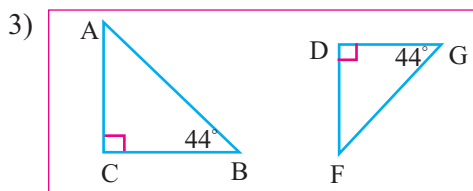
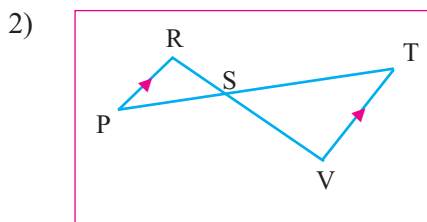
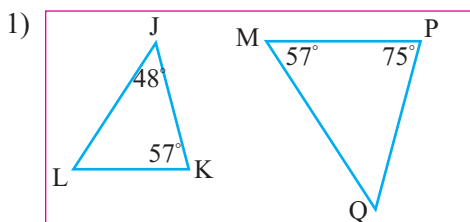
Если два угла одного треугольника конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Этот признак подобия коротко записывается как УУ.



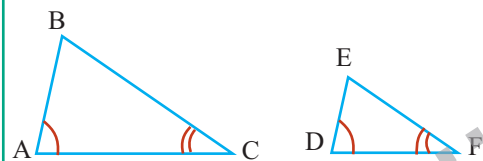
Если, $\angle A \cong \angle D$, $\angle C \cong \angle F$
то, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

1) Какие из данных треугольников подобны? Обоснуйте своё мнение.



Признак подобия CCC

Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны. Этот признак подобия коротко записывается как CCC.

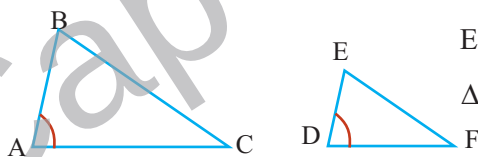


Если, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, то
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Признак подобия СУС

Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами конгруэнтны, то такие треугольники подобны.

Этот признак подобия коротко записывается как СУС.



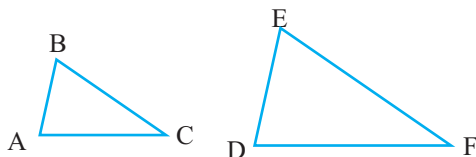
Если $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ и $\angle A \cong \angle D$, то
 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Признаки подобия треугольников

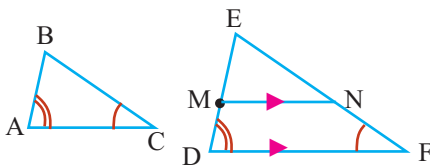
- 2» Сначала проанализируйте доказательство признака CCC, а затем самостоятельно запишите данное доказательство в тетради.

Дано: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

Докажите: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



Доказательство: на стороне DE $\triangle DEF$ отметим точку M, так чтобы $ME \cong AB$. Через точку M проведём прямую MN параллельную DF.



В $\triangle DEF$ и $\triangle MEN$ угол $\angle E$ является общим углом. Т.к. $MN \parallel DF$ секущая проходящая через DE образует соответствующие углы и $\angle EMN \cong \angle D$. По признаку подобия УУ $\triangle DEF \sim \triangle MEN$, а отсюда можно записать, что

$$\frac{ME}{DE} = \frac{EN}{EF} = \frac{MN}{DF}$$

Приняв во внимание, что $ME \cong AB$, тогда $\frac{AB}{DE} = \frac{EN}{EF} = \frac{MN}{DF}$.

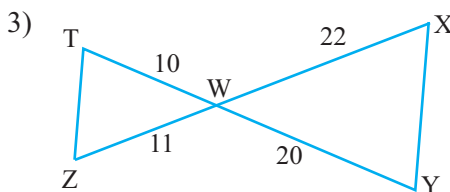
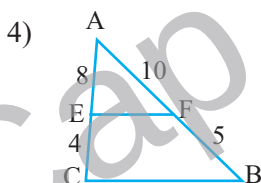
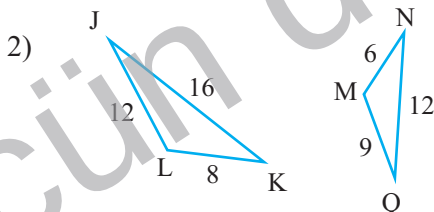
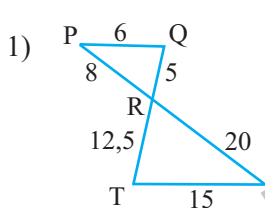
С другой стороны так как, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, то

$$\frac{BC}{EF} = \frac{EN}{EF}, \quad \frac{AC}{DF} = \frac{MN}{DF} \quad \text{А это значит, что } EN = BC, MN = AC.$$

Отсюда по признаку подобия CCC получаем $\triangle ABC \cong \triangle MEN$.

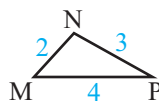
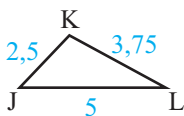
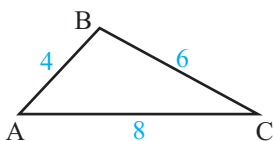
Таким образом, из того, что $\triangle MEN \sim \triangle DEF$ и $\triangle ABC \cong \triangle MEN$, следует, что $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

- 3» Определите, по какому признаку подобны данные треугольники? Запишите соответствующие конгруэнтные углы и отношение соответствующих сторон.



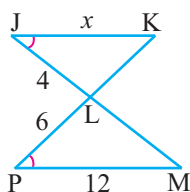
Признаки подобия треугольников

4) Какой из треугольников подобен $\triangle ABC$? Ответ обоснуйте.

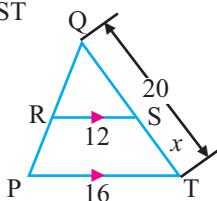


5) По данным рисунка докажите подобие треугольников и найдите неизвестные размеры.

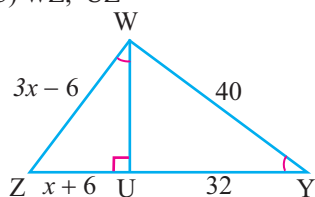
1) JK



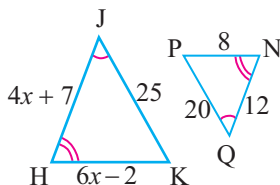
2) ST



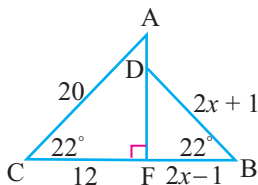
3) WZ, UZ



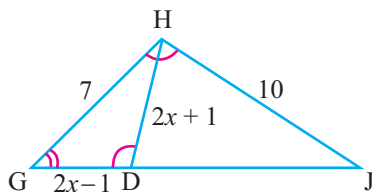
4) HJ, HK



5) DB, CB



6) GD, DH

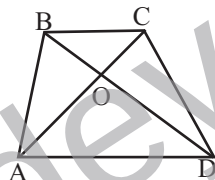


6) Выполните задания по рисунку.

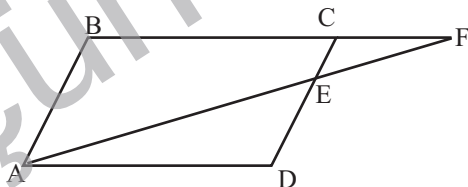
1) На какие подобные треугольники делят диагонали трапецию ABCD?

2) Запишите условия равенства соответствующих углов и отношений соответствующих сторон подобных треугольников.

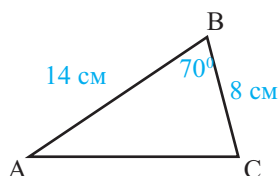
Найдите BC, если $BO = 8$ см, $OD = 12$ см, $AD = 15$ см.



7) Дано: ABCD параллелограмм
 $AB = 6$ см, $AD = 9$ см, $CF = 3$ см
Найдите длины CE и ED.



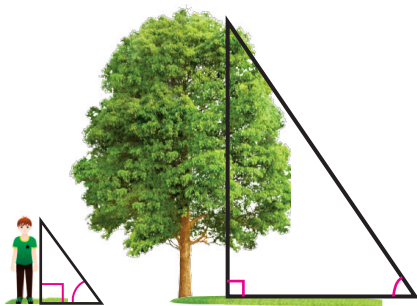
8) Постройте треугольник, подобный треугольнику на рисунке. Докажите подобие, записав конгруэнтность углов и пропорциональность отношение соответствующих сторон подобных треугольников.



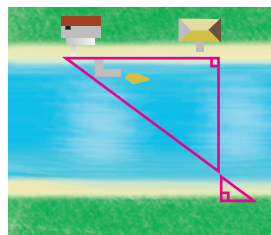
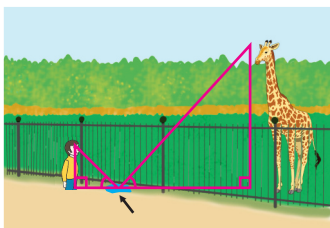
Признаки подобия треугольников

- 9» Чтобы узнать размеры объектов, к которым невозможно приблизиться, используют подобие треугольников. Докажите подобие треугольников на рисунке и объясните какие измерения нужно сделать, чтобы определить высоту дерева.

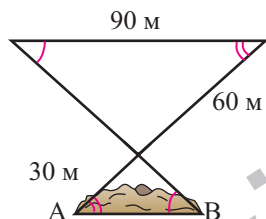
Указание: лучи солнца, падающие на Землю можно считать параллельными. Поэтому они и образуют с Землёй конгруэнтные углы.



- 10» Объясните, по какому признаку подобны треугольники на рисунке.

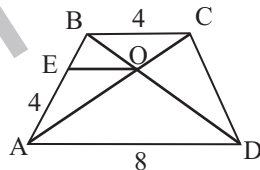


- 11» Часть подземного тоннеля будет пробурена в горе. Найдите длину тоннеля AB .

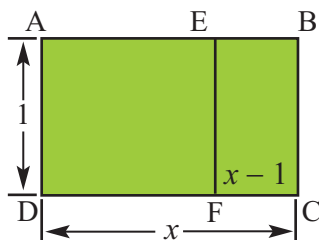


- 12» В солнечную погоду тень от флага равна 12 м. Недалеко от него стоит человек, рост которого 1,65 м, а длина его тени равна 2,2 м. Найдите высоту флага. Нарисуйте рисунок, на котором будет изображено солнце, флаг и человек.

- 13» Дано: $ABCD$ трапеция
 $AD = 8$, $BC = 4$, $AE = 4$
 $OE \parallel AD$
 Найдите: BE



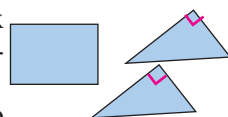
- 14» Стороны прямоугольника $ABCD$ на рисунке находятся в золотом отношении. Этот прямоугольник можно разделить на квадрат и малый прямоугольник, подобный данному прямоугольнику. Стороны этих прямоугольников также находятся в золотом отношении. По данным рисунка найдите значение переменной x .



Подобие прямоугольных треугольников

Исследование

1. Разрежьте прямоугольник на два конгруэнтных прямоугольных треугольника, как показано на рисунке.



2. Сложите один из полученных треугольников по высоте, обозначив след от высоты.

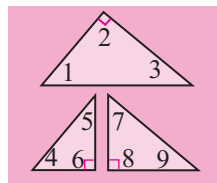
3. Разрежьте треугольник по намеченной линии высоты на два треугольника

4. Измерьте все углы полученных треугольников.

5. Какие углы конгруэнтны $\angle 1$?

6. Какие углы конгруэнтны $\angle 2$?

7. Запишите ваше мнение по поводу подобия этих треугольников.

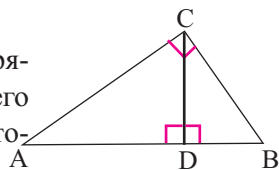


Высота, проведённая к гипотенузе

Теорема. Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$$

Доказательство данной теоремы проводится на основании признака подобия УУ. Для каждого из трёх треугольников нужно определить два конгруэнтных угла.



Среднее геометрическое

Среднее геометрическое. Для положительных чисел a и b средним геометрическим называется положительное число x , удовлетворяющее равенству $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Т.е., $x = \sqrt{ab}$

Высота, проведённая из вершины прямого угла на гипотенузу, делит её на два отрезка (на рисунке AD и DB).

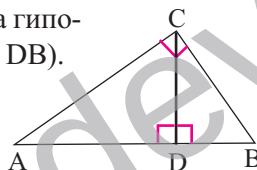
Здесь отрезки AD и DB являются проекциями катетов AC и BC на гипотенузу, соответственно.

Следствие 1. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла есть среднее геометрическое отрезков, на которые она делит гипотенузу.

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB} \quad CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

Следствие 2. Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \quad AC = \sqrt{AB \cdot AD}; \quad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} \quad BC = \sqrt{AB \cdot BD}$$



1» Найдите среднее геометрическое для пар чисел

1) 9 и 16

2) 4 и 9

3) 12 и 48

4) 6 и 12

5) 15 и 20

Подобие прямоугольных треугольников

2) 1) Докажите теорему о высоте, проведённой из вершины прямого угла на гипотенузу (стр.140), записав отношение соответствующих сторон, если $\triangle ADC \sim \triangle CDB$.

2) Докажите равенство отношения соответствующих сторон записав их из того, что $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ и $\triangle ABC \sim \triangle CBD$.

3) По данным рисунка допишите пропорции.

1. $\frac{r}{h} = \frac{h}{\blacksquare}$

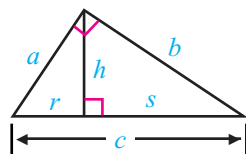
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{\blacksquare}$

3. $\frac{\blacksquare}{b} = \frac{b}{s}$

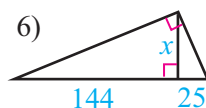
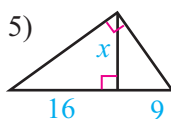
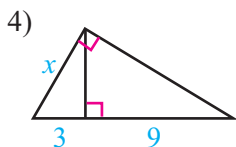
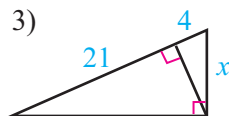
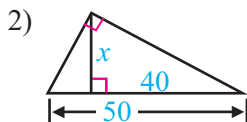
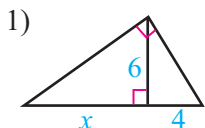
4. $\frac{r}{\blacksquare} = \frac{\blacksquare}{c}$

5. $\frac{r}{h} = \frac{\blacksquare}{s}$

6. $\frac{s}{b} = \frac{\blacksquare}{c}$

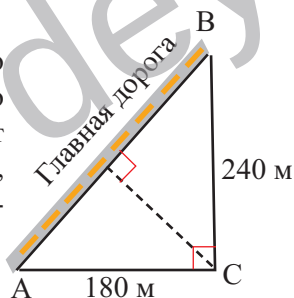


4) По данным рисунка найдите x .

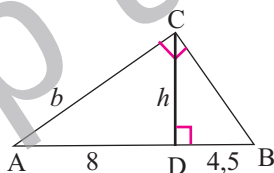


5) Высота, проведённая из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на два отрезка, длины которых равны 2 см и 8 см. Найдите длину высоты.

6) Для фирм А, В и С на главной дороге намечено построить здание новой столовой и от неё новую дорогу до фирмы С. На каком расстоянии от фирмы А должна быть расположена столовая, чтобы расстояние от неё до фирмы С было наименьшим?



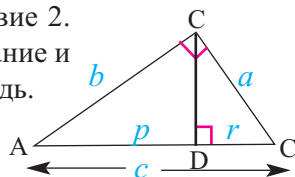
7) По данным рисунка найдите b и h .



Подобие прямоугольных треугольников

- 8 Докажите теорему Пифагора используя следствие 2. Для каждого предположения запишите обоснование и закончите доказательство, переписав его в тетрадь.

Дано: прямоугольный треугольник ABC и его высота CD

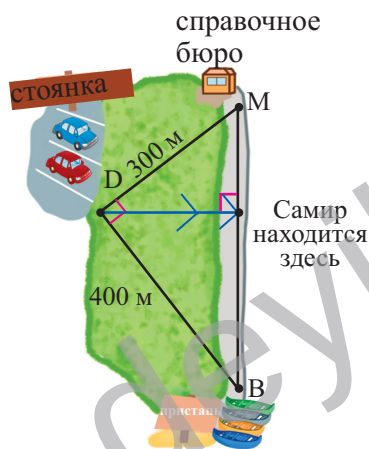


Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$

Предположение	Обоснование
1. CD высота $\triangle ABC$	1. ?
2. $\frac{c}{a} = \frac{a}{r}$, $\frac{c}{b} = \frac{b}{p}$	2. ?
3. $cr = a^2$, $cp = b^2$	3. ?
4. $cr + cp = a^2 + b^2$	4. ?
5. $c(r + p) = a^2 + b^2$	5. ?
6. $(r + p) = c$	6. ?
$c^2 = a^2 + b^2$	7. ?

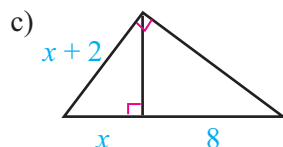
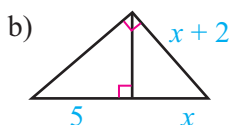
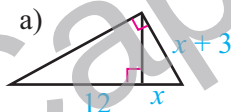
- 9 В открывшемся в городе Мингячевир Олимпийском учебно-спортивном центре по гребле «Кюр» проводятся различные международные соревнования.

Самир собирается принять участие в соревнованиях по гребле. Он начал движение от автомобильной стоянки, как показано на рисунке и при помощи дорожных знаков определил направление до пристани. Сколько метров составляет расстояние от места, где находится Самир до справочного бюро?



Примите во внимание, что длина пути от автомобильной стоянки до справочного бюро равна 300 м, а до пристани - 400 м, и дороги пересекаются под прямым углом.

- 10 По данным рисунка найдите x .



Применение подобия треугольников

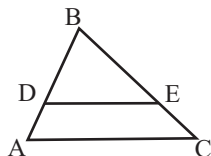
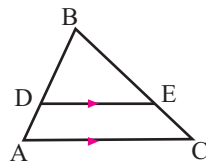
Пропорциональные отрезки

Теорема. Прямая, пересекающая две стороны треугольника, и параллельная третьей стороне делит стороны на пропорциональные отрезки.

$$\text{Если } DE \parallel AC, \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$$

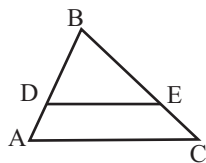
Обратная теорема. Если прямая, пересекающая две стороны треугольника делит их на пропорциональные отрезки, то эта прямая параллельна третьей стороне.

$$\text{Если } \frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}, \text{ то } DE \parallel AC.$$

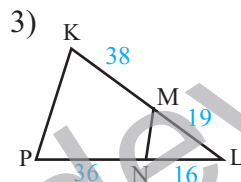
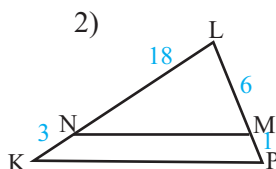
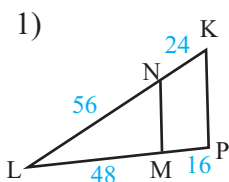


- 1) Запишите по плану, представленному ниже доказательство теоремы.
- Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ по признаку подобия УУ.
 - Запишите соответствующие пропорции, используя аксиому сложения отрезков.

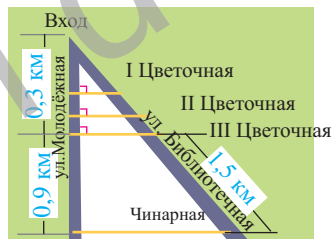
- 2) В $\triangle ABC$ $AB = 15$, $BD = 10$. Длина BE в 2 раза больше, чем EC . Покажите что $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC}$ и докажите, что $DE \parallel AC$.



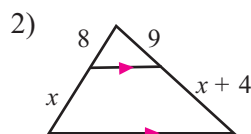
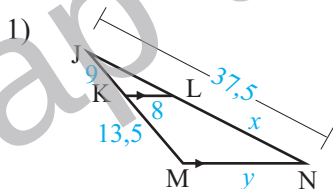
- 3) В каком из треугольников можно утверждать, что $MN \parallel PK$?



- 4) На рисунке представлен часть плана университетского городка. I, II и III Цветочные улицы параллельны друг другу, а также улице Чинарной. Расстояние от улицы Чинарной до входа в городок вдоль улицы Молодёжной равно 1,2 км. Найдите расстояние от Чинарной улицы до входа в городок по Библиотечной улице.



- 5) По данным рисунка найдите неизвестные длины сторон.

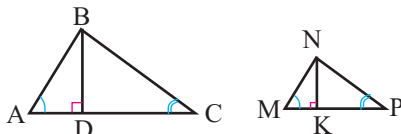


Применение подобия треугольников

Высоты, медианы и биссектрисы подобных треугольников

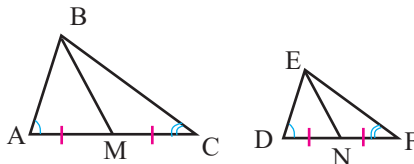
Теорема 1. Если два треугольника подобны, то отношение длин соответствующих высот равно отношению длин соответствующих сторон.

$$\frac{BD}{NK} = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$



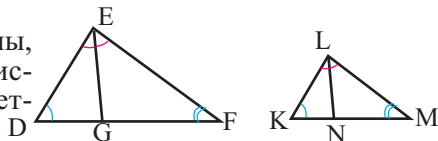
Теорема 2. Если два треугольника подобны, то отношение длин соответствующих медиан равно отношению длин соответствующих сторон.

$$\frac{BM}{EN} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$



Теорема 3. Если два треугольника подобны, то отношение длин соответствующих биссектрис равно отношению длин соответствующих сторон.

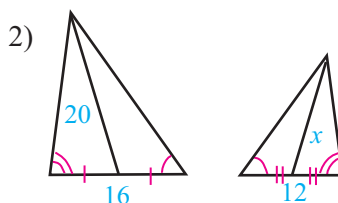
$$\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$$



6» Закончите доказательство теоремы 3. Запишите доказательства теорем 1 и 2.

Предположение	Обоснование
1. $\angle D \cong \angle K$	1. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
2. $\angle DEG \cong \angle GEF$ $\angle KLN \cong \angle NLM$	2. _____
3. $\angle DEF \cong ?$	3. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
4. $\angle DEG \cong \angle KLN$	4. Свойство равенства
5. $\triangle DEG \sim \triangle KLN$	5. _____
6. $\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL}$	6. $\triangle DEG \sim \triangle KLN$
7. $\frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$	7. $\triangle DEF \sim \triangle KLM$
8. $\frac{EG}{LN} = \frac{DE}{KL} = \frac{EF}{LM} = \frac{DF}{KM}$	8. _____

7» По данным рисунка найдите x .

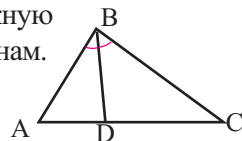


Применение подобия треугольников

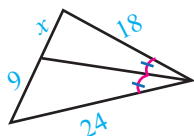
Свойство биссектрисы треугольника

Теорема. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки пропорциональные двум другим сторонам.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

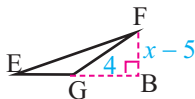
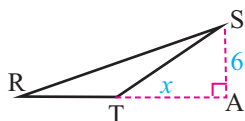


8» По данным рисунка найдите x .

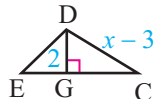
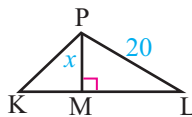


9» Периметр треугольника равен 50 см. Найдите две стороны треугольника, если биссектриса угла треугольника делит третью сторону на отрезки длиной 4 см и 6 см.

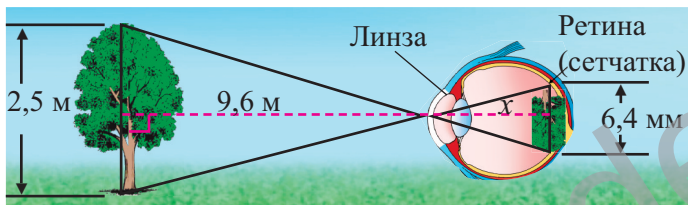
10» Дано: $\triangle RST \sim \triangle EFG$
SA и FB – высоты.
Найдите: FB



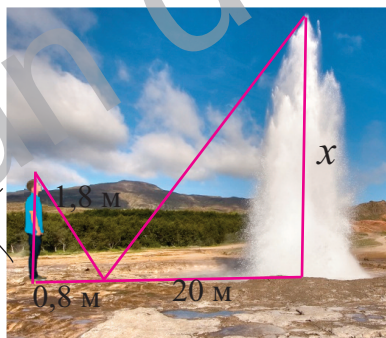
11» Дано: $\triangle KPL \sim \triangle EDC$
PM и DG – высоты.
Найдите: PM и DC



12» Глазной хрусталик принимает световые лучи, которые идут от объекта, и передаёт уменьшенную копию на сетчатку глаза. В этот момент образуются подобные треугольники, как показано на рисунке. Найдите расстояние от линзы до сетчатки.



13» Горячие подземные источники при извержении, подобно вулкану, выбрасывают наружу фонтан горячей воды и пара. В холодной северной столице Исландии Рейкьявике есть много подземных источников гейзеров, которые всегда привлекают большое внимание туристов. Гейзеры каждые 10 минут 3-хкратно выбрасывают вверх 40-60-десяти метровый фонтан воды. Один из туристов измерил высоту столба воды. Для этого он положил зеркало на некотором расстоянии от гейзера и стал отходить от зеркала до тех пор пока в зеркале не отразится верхушка столба. По рисунку, найдите высоту гейзера.



Применение подобия треугольников

- 14** Для того, чтобы измерить высоту флага Эльдар на расстоянии 6 м от флагштока (шеста) на земле расположил зеркало, а сам встал на расстоянии 0,9 м от зеркала. Расстояние от глаз Эльдара до зеркала 1,5 м. Объясните способ, при помощи которого Эльдар собирался узнать высоту флагштока флага и найдите эту высоту.

- 15** По данным рисунка найдите периметр треугольника.

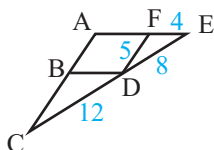
1) Дано:

$$\triangle ABCD \sim \triangle FDE,$$

$$CD = 12, FD = 5,$$

$$FE = 4, DE = 8$$

Найти: $P_{\triangle ABCD}$



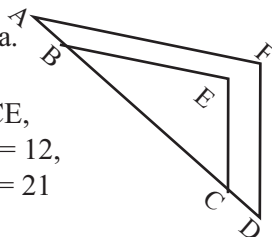
2) Дано:

$$\triangle ADF \sim \triangle BCE,$$

$$BC = 24, EB = 12,$$

$$CE = 18, DF = 21$$

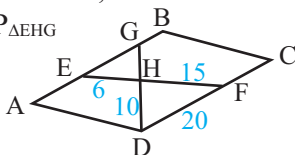
Найти: $P_{\triangle ADF}$



3) Дано: ABCD параллелограмм,

$$EH = 6, HF = 15, HD = 10$$

Найти: $P_{\triangle ENG}$

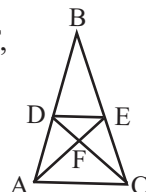


4) Дано: $\triangle DEF \sim \triangle CAF,$

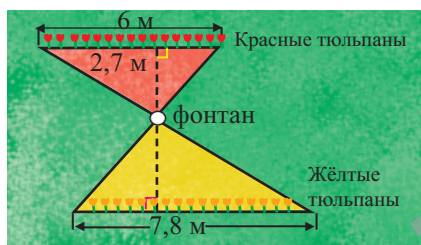
$$P(\triangle CAF) = 28, DF = 6,$$

$$FC = 8$$

Найти: $P_{\triangle DEF}$



- 16** На рисунке дана часть плана парка. Сколько метров от жёлтых тюльпанов до фонтана?



- 17** По легенде Древний греческий учёный Фалес странствуя по Египту, был поражен величиим пирамиды Хеопса. Он спросил у жрецов какова высота пирамиды, но в ответ услышал: «Это может знать только бог Солнца, а не человек». Фалес повернулся к ним и сказал: «Сейчас я измерю высоту пирамиды». Он измерил длину своей тени. Она оказалась вдвое больше роста Фалеса. Из этого он сделал вывод, что в данный момент все предметы имеют тень вдвое больше, чем их собственная высота. Тогда он измерил высоту тени пирамиды Хеопса. Тень пирамиды на рисунке 2 равна отрезку ОК на рисунке 1. Зная, что $TD = ON$, получим $OK = TD + NK$. Фалес с лёгкостью измерил эти расстояния, и нашёл, что высота пирамиды равна 145 м. Жрецы пришли в негодование и приказали Фалесу поскорее покинуть Египет. По рисунку высота пирамиды Хеопса равна 145 м. Проведите вычисления, чтобы проверить результат полученный Хеопсом.

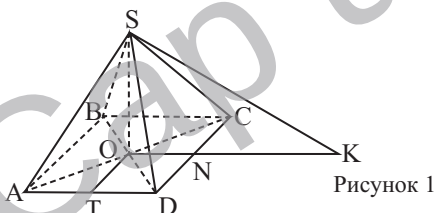


Рисунок 1

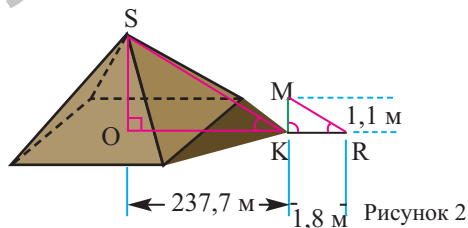
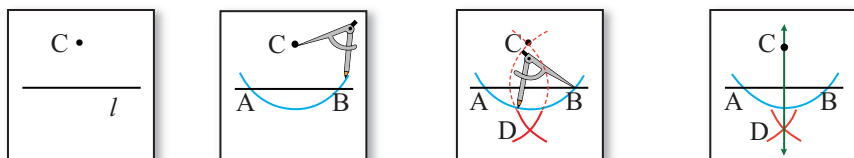


Рисунок 2

Задачи на построение

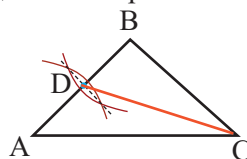
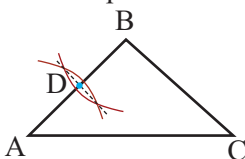
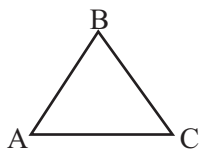
Построение 1. Построение перпендикуляра к данной прямой из заданной точки.



1. Проведём прямую l и отметим точку C , не принадлежащую данной прямой.
2. Установим остриё циркуля на точке C и начертим дугу, пересекающую прямую в двух точках. Обозначим точки пересечения буквами A и B .
3. Не меняя раствора циркуля, проведём окружности с центрами в точках A и B . Точку их пересечения, лежащая в полуплоскости, отличной от той, в которой лежит точка C , обозначим буквой D .
4. Через точки C и D проведём прямую $CD \perp AB$.

Построение 2. Построение медианы треугольника при помощи построения точки, которая является серединой отрезка.

1. Построим $\triangle ABC$
2. Построим точку D , которая является серединой стороны AB .
3. Соединим точки C и D . Отрезок CD является медианой стороны AB .



1. Как построить перпендикуляр к прямой через точку, которая расположена на данной прямой вы можете узнать посмотрев интернет страницу <http://www.mathopenref.com/constperplinepoint.html>. Выполните данные построения самостоятельно в тетради.
2. Начертите остроугольный треугольник и постройте его высоты.
3. Начертите прямоугольный треугольник. Постройте медиану, проведённую из вершины прямого угла. Измерьте и сравните длины медианы и гипотенузы.

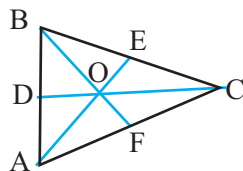
Теорема. Свойство медиан треугольника

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в точке пересечения в отношении 2:1, начиная от вершины.

$$CO : OD = 2 : 1 \quad AO : OE = 2 : 1 \quad BO : OF = 2 : 1$$

$$CO = \frac{2}{3} CD \quad AO = \frac{2}{3} AE \quad BO = \frac{2}{3} BF$$

Точка пересечения медиан треугольника называется центром тяжести треугольника.



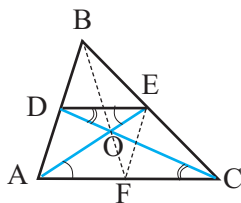
Свойство медиан

Доказательство теоремы представлено в виде двухстолбчатой таблицы.

Дано: $\triangle ABC$, CD и AE медианы треугольника

Доказать: $AO:OE = CO:OD = BO:OF = 2:1$

Доказательство: соединим точки D и E .



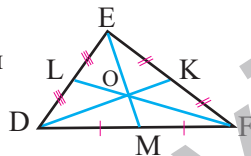
Предположение	Обоснование
1. $AD = DB$ и $BE = EC$	1. По определению медианы
2. DE средняя линия треугольника	2. По определению средней линии
3. $DE \parallel AC$, $DE = \frac{AC}{2}$, $\frac{AC}{DE} = \frac{2}{1}$	3. По свойству средней линии
4. $\angle DEA \cong \angle EAC$, $\angle EDC \cong \angle ACD$	4. Внутренние накрест лежащие углы
5. $\triangle AOC \sim \triangle EOD$	5. Признак подобия треугольников УУ
6. $\frac{AO}{OE} = \frac{CO}{OD} = \frac{AC}{DE} = \frac{2}{1}$ $AO:OE = CO:OD = 2:1$	6. Равенство отношений соответствующих сторон подобных треугольников
7. $AO:OE = BO:OF = 2:1$	7. По аналогичному правилу можно соединить точку пересечения медиан BF и AE $\triangle AOB \sim \triangle FOE$
8. $AO:OE = CO:OD = BO:OF = 2:1$ Теорема доказана	8. По свойству равенства

- 1** Точка O является точкой пересечения медиан треугольника DEF . $DE = 10$ см, $FL = 15$ см, $EM = 9$ см и $DK = 12$ см. Найдите периметры треугольников:

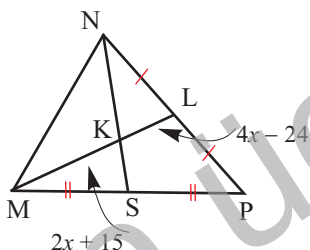
1) $\triangle EOD$

2) $\triangle DLO$

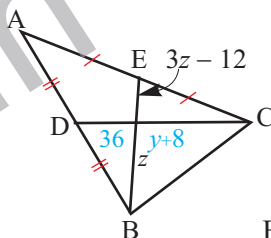
3) $\triangle LOE$



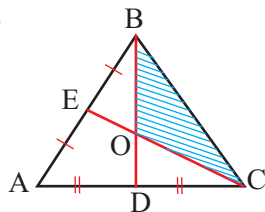
- 2** По данным рисунка найдите MK , если ML и NS – медианы треугольника.



- 3** Найдите значение переменной на рисунке, если BE и CD – медианы треугольника.



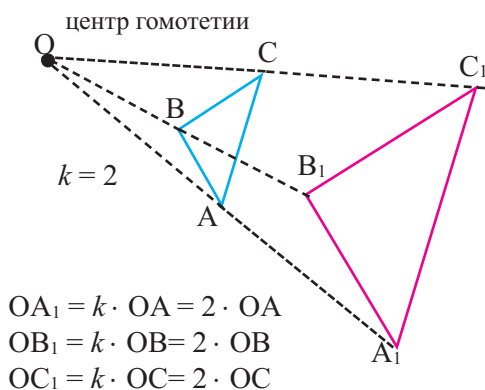
- 4** Площадь $\triangle ABC$ равна 24 см^2 , а его медианы BD и CE пересекаются в точке O . Найдите площадь $\triangle OBC$.



Гомотетия

Преобразование плоскости на себя, при котором расстояние между любыми двумя точками изменяется в одно и то же число раз называется преобразованием подобия. Фигуры называются подобными, если одна фигура переводится в другую преобразованием подобия. Если при преобразовании подобия точки A и B на плоскости соответственно преобразованы в точки A_1 и B_1 , то $A_1B_1 = k \cdot AB$. Число $k > 0$ называется коэффициентом подобия. Преобразование подобия при $k = 1$ называется движением. Предположим, что заданы точка O и число $k > 0$. Преобразование плоскости на себя при котором для произвольной точки A плоскости и преобразованной точки A_1 выполняется равенство $OA_1 = k \cdot OA$, называется гомотетией. Точка O называется центром гомотетии, число k — коэффициентом гомотетии, точки A и A_1 гомотетичными точками.

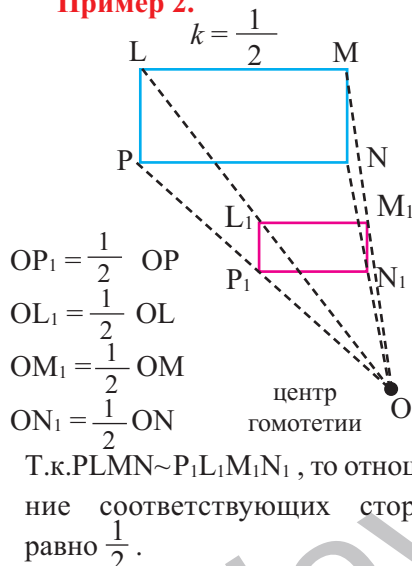
Пример 1.



Если $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, то
 $A_1B_1 = 2AB$, $B_1C_1 = 2BC$,
 $A_1C_1 = 2AC$

*Если $k > 1$, то фигура увеличивается относительно исходной фигуры.
 Если $0 < k < 1$, то фигура уменьшается относительно исходной фигуры.
 Если $k = 1$, то фигура конгруэнтна исходной фигуре.*

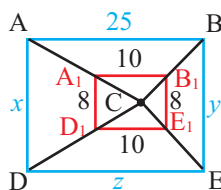
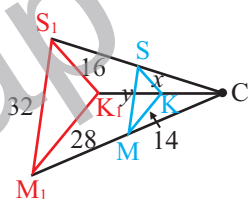
Пример 2.



- 1» На рисунке изображена гомотетия при которой синяя фигура была преобразована в красную относительно заданного центра с коэффициентом k . Какой из рисунков соответствует случаю $k > 1$, а какой $k < 1$?

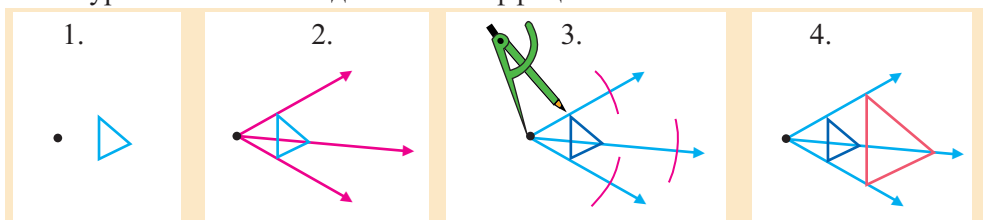


- 2» Найдите коэффициент гомотетии k и неизвестные длины отрезков на рисунках.



Преобразование подобия

- 3» Выполните в тетради последовательность действий для построения фигуры гомотетичной данной с коэффициентом гомотетии $k = 2$.



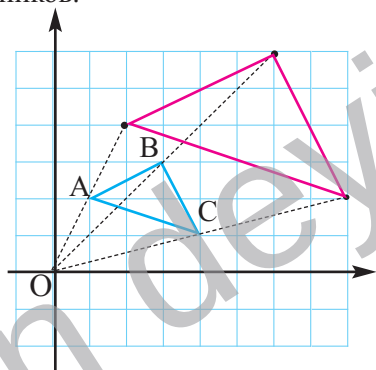
- 4» При помощи линейки и циркуля выполните построение преобразования гомотетии относительно заданного центра с коэффициентом k .



- 5» 1) В какие точки переходят точки а) $A(2;0)$ б) $B(0;3)$ в) $C(2;3)$ при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом $k = 3$
 2) Покажите, что в гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии k точка $A(x;y)$ переходит в точку $A_1(kx; ky)$.
 Указание: используйте подобие треугольников.

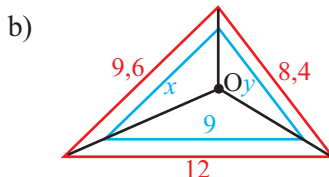
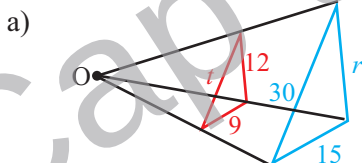
- 6» 1) Дан треугольник с вершинами $A(1;2)$, $B(3;3)$, $C(4;1)$. Постройте треугольник гомотетичный $\triangle ABC$ с центром в начале координат и коэффициентом гомотетии $k = 2$

$$\begin{aligned} A(1; 2) &\longrightarrow A_1(2; 4) \\ B(3; 3) &\longrightarrow B_1(6; 6) \\ C(4; 1) &\longrightarrow C_1(8; 2) \end{aligned}$$



- 2) Постройте прямоугольник гомотетичный прямоугольнику, вершинами которого являются точки $A(2; 2)$, $B(6; 2)$, $C(6; 4)$ и $D(2; 4)$, с центром $O(0;0)$ и $k = \frac{1}{2}$.

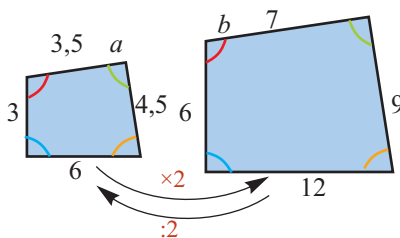
- 7» На рисунке красная фигура гомотетична синей. Найдите неизвестные стороны и коэффициент подобия.



Площади подобных фигур

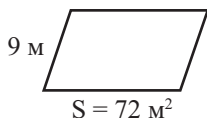
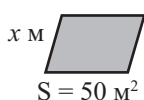
Площади подобных фигур

Теорема. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия. Например, если отношение соответствующих сторон двух подобных четырёхугольников равно $a : b$, то отношение площадей равно $a^2 : b^2$.

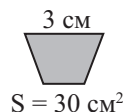
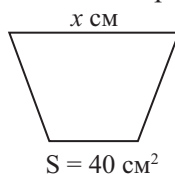


1» Для двух фигур – закрашенной и не закрашенной -используя признаки подобия и свойство площадей подобных фигур найдите масштаб (коэффициент подобия) и значение неизвестной x на рисунке.

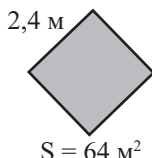
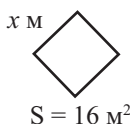
1)



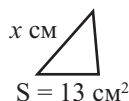
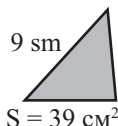
2)



3)



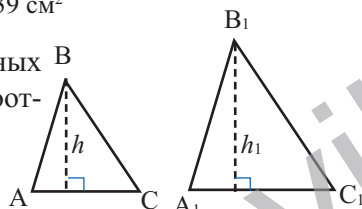
4)



2»

Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату отношения соответствующих сторон.

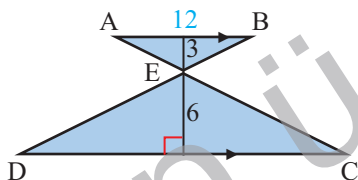
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AC}{A_1C_1} \right)^2 = k^2$$



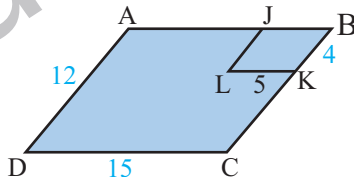
План для доказательства теоремы: отношение высот подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон.

3»

1) Докажите, что треугольники DEC и BEA подобны и найдите их площади.



2) Докажите, что параллелограммы ABCD и JBKL подобны. Найдите площадь параллелограмма ABCD, если площадь параллелограмма JBKL равна 18 см^2 .



4»

Гипотенуза прямоугольного треугольника ABC равна 8 см, а площадь 12 см^2 . Найдите площадь треугольника DFE подобного данному, если его гипотенуза равна 20 см.

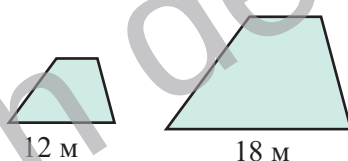
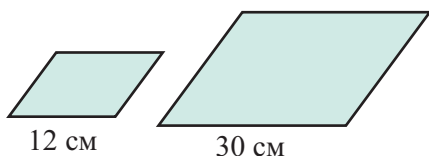
Площади подобных фигур

- 5» Сторона зеркала прямоугольной формы равна 2,5 м и оно стоит 125 манат. Сторона другого зеркала, имеющего подобную форму равна 3 м. Сколько стоит второе зеркало, если зеркала продаются по квадратным метрам?
- 6» Площади двух подобных треугольников равны 45 см^2 и 80 см^2 . Найдите периметр каждого треугольника, если сумма их периметров равна 35 см.
- 7» Стороны двух подобных параллелограммов относятся как 2:3. Найдите площадь меньшего параллелограмма, если площадь большего параллелограмма равна 54 см^2 .
- 8» Найдите отношение периметров двух подобных участков, имеющих форму прямоугольников, если площадь одного равна 540 м^2 , а площадь другого 135 м^2 .
- 9» В парке предусмотрены велосипедные дорожки, как показано на рисунке. Эти дорожки образуют подобные треугольники. Гусейн сначала двигался по синей дорожке вдоль сторон прямоугольного треугольника. После чего он перешёл на вторую дорожку. Сколько километров Гусейн проехал по второй дорожке?
- 10» Две фигуры на рисунке подобны друг другу. По данным рисунка, найдите площадь одной из них, если:



1) Площадь меньшего параллелограмма равна 60 см^2

2) Площадь большей трапеции равна 108 см^2



- 11» Какие из слов **всегда**, **иногда**, **никогда** можно выбрать, для высказывания «периметр ABC больше, чем периметр GHK», чтобы оно было верным?

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \\ \text{коэффициент подобия } \frac{3}{2}$$

$$\triangle DEF \sim \triangle GHK \\ \text{коэффициент подобия } \frac{4}{3}$$

Обобщающие задания

1» В каком случае о подобии двух треугольников можно сказать *всегда*, *иногда*, *никогда*:

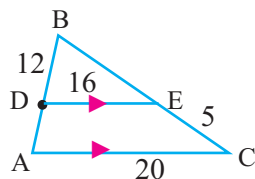
- два равнобедренных треугольника;
- два равносторонних треугольника;
- остроугольный и тупоугольный треугольник?

2» Для каждого случая определите, какие два высказывания отрицают друг друга.

- 1) $\triangle ABC$ равнобедренный
2) $\triangle ABC$ тупоугольный
3) в $\triangle ABC$ все углы разные
- 1) $\angle 1 \cong \angle 2$
2) $\angle 1$ прямой, $\angle 2$ острый
3) $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

3» По рисунку найдите:

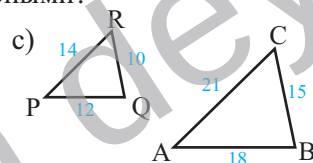
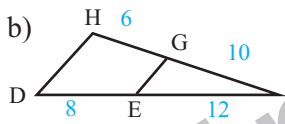
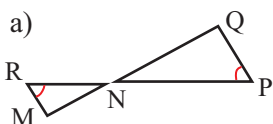
- Периметры $\triangle ABC$ и $\triangle DBE$.
- Коэффициент подобия.
- Периметр трапеции $ADEC$.



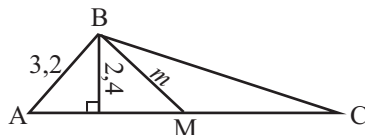
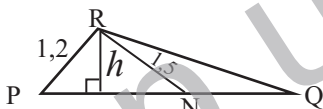
4» Периметр одного из подобных треугольников составляет $\frac{2}{3}$ другого. Зная, что разность длин соответствующих сторон равна 5 см, найдите длины сторон треугольников.

5» Длина тени дерева равна 2,8 м. В этот же момент, тень человека рост которого равен 1,8 м, достигает 1,2 м. Найдите высоту дерева, используя подобие треугольников.

6» Какие из треугольников подобны? Обоснуйте, согласно каким признакам данные треугольники можно назвать подобными?



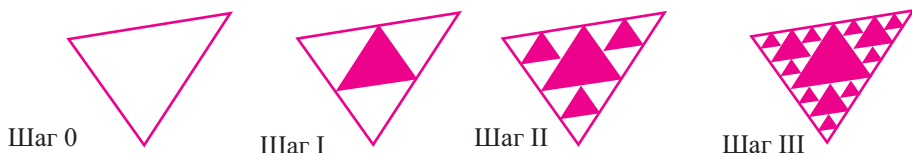
7» $\triangle ABC \sim \triangle PRQ$, а точки M и N соответственно являются серединами сторон AC и PQ. Найдите h и m .



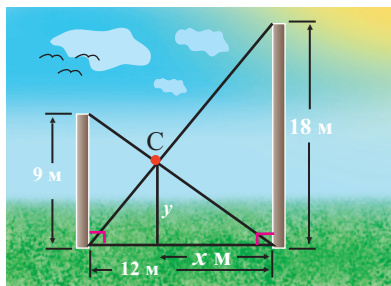
8» При преобразовании подобия с коэффициентом $k = 2$ $\triangle DEF$ был преобразован в $\triangle D_1E_1F_1$. Найдите периметр $\triangle D_1E_1F_1$, если периметр $\triangle DEF$ равен 60 см.

Обобщающие задания

- 9** Дизайн треугольников на рисунке основан на использовании средней линии. Приняв периметр начального треугольника за единицу, найдите периметры закрашенных треугольников на а) 1-ом шаге; б) 2-ом шаге; в) 3-ем шаге.



- 10** Конструкция на рисунке состоит из двух столбов, которые вкопаны перпендикулярно в землю. Снизу и сверху они соединены через муфту металлическими проводами. Муфта расположена в точке C. Длина одного столба 9 м, а другого 18 м. Расстояние между столбами 12 м.



- 1) Найдите расстояние от муфты до большого столба.
- 2) На каком расстоянии от земли расположена муфта?
- 3) Длину провода от муфты до верхней точки маленького столба.
- 4) Длину провода от муфты, до самой нижней точки большого столба.

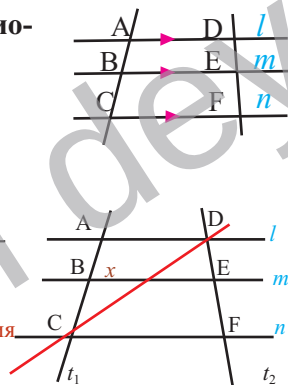
- 11** Параллельные прямые, пересекающие две и более прямые делят эти прямые на пропорциональные отрезки.

Если $l \parallel m \parallel n$, то

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \quad \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}, \quad \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$$

Докажите это высказывание, используя дополнительную линию, как показано на рисунке.

дополнительная линия



- 12** Найдите коэффициент подобия и длины сторон B_1C_1 и A_1C_1 , если $\Delta A_1B_1C_1$ был получен преобразованием ΔABC и $AB = 6$, $BC = 9$, $AC = 12$, $A_1B_1 = 2$.

- 13** Используя возможности интернет страницы <http://www.mathopenref.com> выполните различные геометрические задачи на вычисление и построение.

5.1. Неравенства

5.2. Тригонометрические соотношения

5.3. Сбор и обработка информации

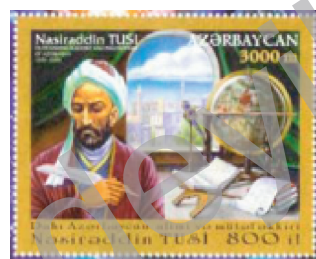
5.4. Вычисление вероятности

В этом разделе вы научитесь:

- решать неравенства;
- решать задачи из реальной жизни, при помощи неравенств;
- тригонометрическим соотношениям;
- применять тригонометрические соотношения при решении задач;
- систематизировать и представлять информацию в различных формах;
- при помощи мер центральных тенденций оценивать и давать прогнозы;
- определять генеральную совокупность (или популяцию) и выборку для исследования;
- различать независимые и зависимые события, а также вычислять их вероятность.

Это интересно!

Великий Азербайджанский мыслитель, философ, математик, астроном Насреддин Туси создал научные труды, которые внесли большой вклад в историю человечества. В письменных источниках его называют "Отцом тригонометрии". В своём труде «Об измерении круга» он впервые доказал теорему синусов и применил их для астрономических расчетов.



Неравенства



Исследование

Исследуйте следующие ситуации. Для каждого высказывания запишите аналогичное высказывание. Для каждого случая запишите своё мнение о значениях, которые может принимать переменная.

- 1) Вес посылки не должен превышать 8 кг.
- 2) Телевизор стоит больше 200 манат.
- 3) Для того чтобы пройти во второй тур, Сеймур должен набрать в первом туре не меньше 50 баллов.
- 4) В гимнастической группе занимаются дети младше 13 лет.

Неравенства

Неравенства записываются при помощи знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Неравенства могут быть записаны словами или математическими символами, а также изображены на числовой оси.

Все действительные числа больше -2	$x > -2$	
Все действительные числа больше или равно 3	$x \geq 3$	
Все действительные числа меньше -1	$x < -1$	
Все действительные числа меньше или равно 0	$x \leq 0$	

● если точка закрашена, то координаты этой точки удовлетворяют неравенству.

○ если точка не закрашена, то координаты этой точки не удовлетворяют неравенству.

Для сравнения чисел и выражений применяются различные методы. Одним из них является метод оценки разности.

- если разность $a - b$ положительна, то число a больше числа b ; $a - b > 0$; $a > b$
- если разность $a - b$ отрицательна, то число a меньше числа b ; $a - b < 0$; $a < b$
- если разность $a - b$ равна нулю, то число a равно числу b ; $a - b = 0$; $a = b$
- если разность $a - b$ не отрицательна, то число a не меньше числа b ;
 $a - b \geq 0$; $a \geq b$
- если разность $a - b$ не положительна, то число a не больше числа b ;
 $a - b \leq 0$; $a \leq b$

На числовой оси большему числу соответствует точка, расположенная правее, а меньшему числу соответствует точка, расположенная левее.

Значит, если $a > b$, то точка a расположена правее точки b , если $a < b$, то - левее.

Пример. Сравним выражения $a^2 + 1$ и $2a$. Для этого рассмотрим разность $a^2 + 1 - 2a = (a - 1)^2 \geq 0$. Значит, при любых значениях переменной значение выражения $a^2 + 1$ не меньше (больше или равно) значения выражения $2a$.

Неравенства

Обучающие задания

- 1» На выполнение домашнего задания Самир тратит меньше двух часов. Эльчин и Улькер представили это в виде следующих выражений. Какая из записей соответствует истине?

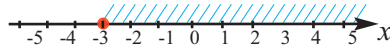
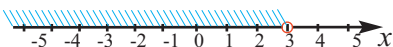
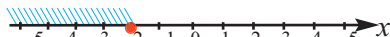
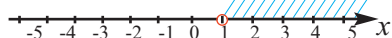
Эльчин 😊 $t \geq 2$

Улькер 😊 $t < 2$

- 2» Следующие высказывания запишите в виде неравенства.

- 1) Совершать прогулки верхом на лошади на высоте более 1500 м над уровнем моря не рекомендуется по медицинским показаниям.
- 2) Для получения 10%-ой скидки в магазине надо сделать покупку на сумму не менее 1000 манат.
- 3) При выезде за границу каждый человек может взять с собой сумму 10000 манат без уплаты налога.
- 4) Детям в возрасте меньше 7 лет вход в кинотеатр без сопровождения родителей запрещён.

- 3» Изображения на числовой оси представьте в виде неравенств и опишите словами.



Свойства неравенств

- 1) Если $a > b$, то $b < a$
- 2) Если $a < b$, то $b > a$
- 3) Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$
- 4) Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$

Доказательство 3-го свойства: если $a > b$, то $a - b > 0$; если $b > c$, то $b - c > 0$. Тогда $a - c = (a - b) + (b - c) > 0$, отсюда следует, что $a > c$.

если оба слагаемых положительны, то сумма также положительна

- 4» Запишите неравенства так, чтобы переменная находилась в левой части.

- a) $19 > x$ b) $-10 < a$ c) $-10 > b$ d) $0 < t$

- 5» Запишите реальные жизненные ситуации, соответствующие неравенствам.

- a) $x \geq 15$ b) $x < 11$ c) $x \geq 0$ d) $x > 100$

- 6» Изобразите неравенства на числовой оси.

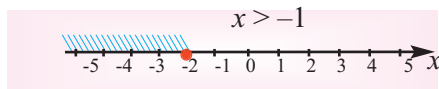
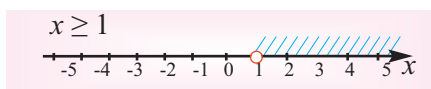
- | | | | |
|---------------|-----------------|-----------------|---------------|
| 1) $a > 4$ | 2) $x > 6$ | 3) $n < 11$ | 4) $x < 5$ |
| 5) $t \geq 9$ | 6) $b \geq 8$ | 7) $d \leq 5$ | 8) $z \leq 8$ |
| 9) $x > -4$ | 10) $n \geq -3$ | 11) $x \leq -5$ | 12) $x < -2$ |

- 7» Проверьте, выполняется ли неравенство при заданных значениях переменных. Задайте ещё два значения переменных и проверьте их.

- | | | |
|-------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1) $18 - x > 4, x = 12$ | 2) $14 + n < 23, n = 8$ | 3) $5k > 35, k = 8$ |
| 4) $16 \leq 3c, c = 8$ | 5) $\frac{x}{3} \geq 2, x = 9$ | 6) $\frac{14}{c} \leq 7, c = 2$ |

Неравенства

- 8» Сравните числа c и d , если разность $c - d$ равна: -3 ; 4 ; 0 .
- 9» Сравните числа m и n , если: а) $m - n = 0,1$; б) $m - n = -1,2$; в) $m - n = 0$.
- 10» Если известно, что $a > b$, то может ли разность, $a - b$, быть равной: $-4,3$; 0 ; $5,2$?
- 11» Определите, какие из следующих выражений истинны при $x > 2$.
а) разность $x - 2$ положительное число;
б) разность $x - 4$ положительное число;
в) разность $x - 1$ положительное число;
г) разность $2 - x$ положительное число.
- 12» Укажите ошибки на следующих рисунках?



- 13» Отметьте на числовой оси несколько точек, которые удовлетворяют неравенствам:
а) $x > 2$; б) $x < 5$; в) $x > -1$; г) $x < 0$.

Прикладные задания

- 14» Найдите наименьшее целое значение, удовлетворяющее неравенству.
а) $x > 10$ б) $x \geq 7$ в) $x > -8$ г) $x \geq -3$
- 15» Найдите наибольшее целое значение, удовлетворяющее неравенству.
а) $x < 9$ б) $x \leq 8,2$ в) $x < -4,1$ г) $x \leq -3$
- 16» Сравните значения выражений $b(b + 1)$ и $(b + 2) \cdot (b - 3)$ при $b = -4$; $b = -3$; $b = 2$. Можно ли утверждать, что при любых значениях b значение первого выражения больше значения второго выражения?
- 17» Докажите, что при любых значениях переменных:
а) значение выражения $a^2 - 4a$ больше значения выражения $2a - 10$;
б) значение выражения $(2a + 3)(2a + 1)$ больше значения выражения $4a(a + 2)$;
в) значение выражения $7c - 1$ меньше значения выражения $c(c + 7)$.
- 18» Докажите неравенство.
а) $c^2 + 1 \geq 2c$ б) $a(a + 3) \geq 3a$
в) $d^2 - cd + c^2 \geq cd$ г) $a(a - b) \geq b(a - b)$



Исследование

Рассмотрим неравенство $x + 3 < 10$

x	-1,75	0	6,99	7	7,01	7,1
$x + 3$	1,25	3	9,99	10	10,01	10,1
$x + 3 < 10$	$1,25 < 10$	$3 < 10$	$9,99 < 10$	$10 < 10$	$10,01 < 10$	$10,1 < 10$
Является ли решением?	Да	Да	Да	Нет	Нет	Нет

При значении переменной меньше 7, значение суммы $x + 3$ меньше 10.

При значении переменной равной 7, значение суммы $x + 3$ равно 10.

При значении переменной больше 7, значение суммы $x + 3$ больше 10.

Неравенство $x + 3 < 10$ верно для всех чисел меньше 7.

Свойства неравенств

Теорема. Если неравенство верное, то прибавив или отняв от обеих частей данного неравенства одно и то же число, получим верное неравенство.

Если $a > b$, то для любого числа c $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$;

Если $a < b$, то для любого числа c $a + c < b + c$ и $a - c < b - c$.

Обучающие задания

- 1» Удовлетворяет ли неравенству $x + 7 > 1$ значение переменной:
а) 6; б) -3; в) 1,5 д) 0; е) -7 ?
- 2» а) Сумма переменной y и числа 13 меньше 25. Какие значения может принимать переменная y ?
б) Сумма двух чисел равна 18. Какие значения может принимать одно из чисел, если другое число равно 7?
- 3» Зная, что $a > b$ сравните.
а) $a - 6$ и $b - 6$ б) $a + 12$ и $b + 12$
в) $a + m$ и $b + m$ д) $a - k$ и $b - k$
- 4» Используя свойства неравенств, найдите возможные значения переменных.

Пример. К обеим частям неравенства $5 + x \leq 18$ прибавим -5 , тогда получим $5 + x + (-5) \leq 18 + (-5)$, $x \leq 13$, т.е переменная принимает значения не больше 13.

$$5 + x \leq 18$$

$$3 < y + 8$$

$$-2 < b - 6$$

$$-10 \geq x + 6$$

$$2 + m \geq 3,5$$

$$p - 4,8 > -6$$

$$10 + n \geq -2$$

$$c + 10 < 9$$

$$s - 12 \leq -5$$

$$a - 3 \leq 5$$

$$q + 0,8 \leq -0,5$$

$$d - \frac{2}{3} \leq \frac{1}{3}$$

$$-4 < k + 6$$

$$g - 4 \geq 13$$

$$t - 3 < -9$$

$$-11 > g - 4$$

$$v - 6 > 2,7$$

$$5 > f + \frac{2}{3}$$

Свойства неравенств

Прикладные задания

Пример

Масса морского тюленя может достигать максимально 650 кг. В настоящее время тюлень весит 398 кг. Как при помощи неравенства можно записать массу, которую ещё сможет набрать тюлень?

Масса тюленя на настоящий момент	плюс	масса которую он сможет набрать	меньше или равно	650 кг
398	+	m	$\leq$	650

$$398 + m \leq 650 \quad \text{Запишем неравенство}$$

$$398 - 398 + m \leq 650 - 398 \quad \text{Вычтем с обеих сторон 398}$$

$$m \leq 252$$



5» Если Рашад запишет ещё 21 песню в музыкальный MP3 центр, то их наибольшее количество станет равным 90. Запишите в виде неравенства, сколько песен было в MP3 центре вначале?

6» Эмин поставил перед собой цель: поднять вес как минимум 90 кг. Сейчас он поднимает гири весом в 50 кг. Запишите в виде неравенства, сколько килограмм должен ещё поднять Эмин для достижения результата?

7» Изобразите на числовой оси, какие значения может принять переменная?

a) $y - (-1,8) > -6,2$ b) $-8 > n - \frac{2}{3}$ c) $a + \frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

8» Запишите соответствующие неравенства.

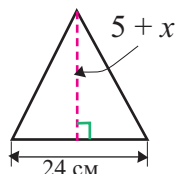
a) Если увеличить число (-8) на некоторое число, то получим значение меньше или равно 30.

b) Какое число при уменьшении на 8 будет больше 25?

9» Зная, что $d + 5 \geq 18$ докончите запись следующих неравенств.

a) $d \geq ?$ b) $d + ? \geq 19$ c) $d - 2 \geq ?$

10» Основание треугольника меньше высоты. Какие значения может принимать переменная x ?



11» Составьте задачи, решениями которых могут быть следующие неравенства.

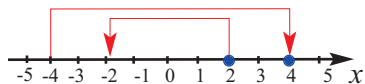
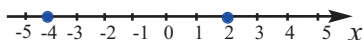
a) $x + 15 > 100$

b) $m - 40 \leq 2000$

c) $d + 3 \geq 12$

Свойства неравенств

Исследование. Отметьте на числовой оси заданные числа. Сравните их и сделайте соответствующую запись. Умножьте каждое из чисел на одно и то же число. Сравните полученные результаты. Например, умножьте каждое из чисел на -1 и изобразите на числовой оси новые значения, как показано на рисунке. Обобщите мнение и изобразите его графически.



Свойства неравенств

✓ Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство.

Для любых чисел a и b при $c > 0$ получим:

1. Если $a > b$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ **Пример 1.** $3 < 4$; $3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$; $6 < 8$

2. Если $a < b$, то $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ **Пример 2.** $6 > -9$; $\frac{6}{3} > \frac{-9}{3}$; $2 > -3$

✓ Если обе части верного неравенства разделить или умножить на одно и то же отрицательное число и поменять знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

Для любых чисел a и b при $c < 0$ получим:

1. Если $a > b$, то $ac < bc$ и $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ **Пример 3.** $5 > 1$; $5 \cdot (-2) < 1 \cdot (-2)$.

2. Если $a < b$, то $ac > bc$ и $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ **Пример 4.** $-8 < -6$; $\frac{-8}{-2} > \frac{-6}{-2}$; $4 > 3$

Обучающие задания

1» Известно, что $a > b$. Запишите верные неравенства, согласно следующим условиям:

- а) умножив обе части на 4 ; б) умножив обе части на -5 ;
с) разделив обе части на $\frac{1}{2}$; д) разделив обе части на -2 .

2» Запишите верные неравенства, которые получатся, если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же число.

Пример 1. Умножим обе части неравенства $\frac{3}{4}y \geq -6$ на $\frac{4}{3}$:

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}y \geq -6 \cdot \frac{4}{3}; \quad y \geq -8$$

1) $4x < 4$

4) $-15 \leq 5b$

7) $\frac{p}{6} > 5$

10) $\frac{t}{9} < -12$

2) $7y > 63$

5) $7 \geq \frac{h}{14}$

8) $144 < 12d$

11) $30 > \frac{1}{2}n$

Пример 2. Разделим обе части неравенств $-4x < 12$ на -4 и изменим знак неравенства на противоположный:

$$\frac{4x}{-4} > \frac{12}{-4}; \quad x > -3$$

3) $13a \geq -26$

6) $15 \geq 3t$

9) $-3m > -33$

12) $-\frac{3}{4}r \leq -6$

3» Определите знак переменной a в неравенствах.

а) $3a > 2a$

б) $4a < 3a$

с) $-2a < 2a$

д) $a > -a$

Свойства неравенств

Прикладные задания

- 4** Запишите в виде неравенства. Какие значения может принимать переменная ?
- четырёхкратное число x больше 28.
 - произведение y и числа -2 не больше 14.
- 5** Заработная плата Эльмира составляет 6 манат в час. Сколько часов должен работать Эльмир, чтобы заработать 300 манат или более?
- 6** Для получения квартиры на льготных условиях в фирме было зарегистрировано больше 9 человек, что составляет $\frac{1}{9}$ всех сотрудников фирмы. Запишите в виде неравенства количество всех сотрудников фирмы.
- 7** Известно, что $a < b$. Вставьте вместо $\bullet$ знаки сравнения чтобы неравенство стало верным.
- $3a \bullet 3b$
 - $0,1a \bullet 0,1b$
 - $-\frac{a}{3} \bullet -\frac{b}{3}$
 - $-4a \bullet -4b$
- 8** Гюльназ за 1 минуту проплывает 40 м. Она решила, что сегодня должна проплыть не меньше 1200 м. Сколько минут как минимум должна проплыть Гюльназ?
- 9** Какие значения может принимать переменная?
- $6 > -\frac{x}{7}$
 - $\frac{r}{-2} < -2$
 - $-\frac{y}{3} < -7$
 - $\frac{k}{-2} < 9$
 - $-6a > -78$
 - $-25t \leq 400$
 - $\frac{y}{4} \geq 2,4$
 - $\frac{n}{5} \leq 0,8$
 - $-3 \leq -\frac{c}{4,5}$
- 10**
- Докажите, что если, $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
 - Для положительных чисел a, b, c, d известно, что $a > b$, $b > d$ и $c > a$. Запишите числа $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ в порядке возрастания.
- 11** Решите задачу, составив соответствующее условию неравенство:
- У Хиджран есть лента длиной 28 см. Она хочет разрезать ленту на части длиной по 3 см каждая так, чтобы оставшаяся часть была не меньше 15 см. На сколько частей можно разрезать ленту?
 - Если в онлайн (on-line) интернет магазине сделать покупку на сумму как минимум 25 манат, то доставка осуществляется бесплатно. Какова минимальная цена одной книги, если Орхан купил 4 книги и при этом у него не взяли деньги за доставку ?

12» Исследование. Каково наибольшее произведение двух натуральных чисел, сумма которых равна 10?

✓ Так как сумма двух чисел остаётся постоянной, то их произведение принимает наибольшее значение, если эти числа равны друг другу (это высказывание иногда называют теоремой о постоянной сумме).

$m + n = 10$	$m \cdot n$
$1 + 9 = 10$	$1 \cdot 9 = 9$
$2 + 8 = 10$	$2 \cdot 8 = 16$
$3 + 7 = 10$	$3 \cdot 7 = 21$
$4 + 6 = 10$	$4 \cdot 6 = 24$
$5 + 5 = 10$	$5 \cdot 5 = 25$

На основании полученных результатов, найдите следующее:

- Наибольшее значение произведения двух натуральных чисел, если их сумма равна 16.
- Среди всех прямоугольников с периметром 40 см, прямоугольник, с наибольшей площадью.

13» Исследование: Среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.

Покажите, что для неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Здесь равенство возможно только при $a = b$.

Рассмотрим разность левой и правой части. Приведём её к общему знаменателю и упростим.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$$

Данное неравенство верно, т.к. квадрат разности двух чисел не может быть отрицательным числом.

На основании исследования, найдите следующее:

- Прямоугольник с наименьшим периметром среди всех прямоугольников с площадью 36 см^2 .
- Наименьшее значение суммы $x + y$, если $xy = 16$ и $x > 0$.

14» 1) Эльшан собирается покрыть керамической плиткой пол на кухне, имеющей размеры $3 \text{ м} \times 4 \text{ м}$. Площадь каждой плитки $\frac{3}{10} \text{ м}^2$. Какое наименьшее количество плиток потребуется для этого?

2) Эльмар работает менеджером в магазине по продаже электроники. Его постоянная зарплата составляет 500 манат плюс премия в размере 30 манат за каждый проданный компьютер. Эльмар уверен, что в этом месяце он получит минимум 800 манат. Какое наименьшее количество компьютеров он продал в этом месяце?

3) Составьте задачу, решением которой является неравенство $\frac{3}{4}x > 9$.

15» а) Оцените периметр квадрата со стороной a , если $0,2 < a < 0,3$.

б) Оцените сторону квадрата с периметром P см, если $12,4 < P < 12,8$.

Сложение и вычитание неравенств

Исследование. 1) Анар младше Вусала, а Турал младше Орхана. Определите сумма возрастов Анара и Турала больше или меньше суммы возрастов Вусала и Орхана?

$$\begin{array}{r} 2) \quad \begin{array}{r} 3 < 8 \\ + \quad 4 < 6 \\ \hline 7 \text{ ? } 14 \end{array} \end{array}$$

Сложите почленно неравенства и запишите выводы.

Сложение числовых неравенств

Теорема. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$

Если к обеим частям неравенства $a > b$ прибавить c , то $a + c > b + c$

Если к обеим частям неравенства $c > d$ прибавить b , то $b + c > b + d$

Из $a + c > b + c$ и $b + c > b + d$ получим, что $a + c > b + d$.

Данная теорема верна при сложении двух и более неравенств.

✓ Если почленно сложить верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.

$$\begin{array}{r} a > b \\ + \quad c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

Умножение числовых неравенств

Теорема. Если перемножить почленно верные неравенства одного знака, левые и правые части которых – положительные числа, то получится верное неравенство.

Если a, b, c, d положительные числа, $a > b$ и $c > d$, тогда $ac > bd$.

Если в неравенстве $a > b$ обе части умножим на c , а в неравенстве $c > d$ обе части умножим на b , то получим $ac > bc$ и $bc > bd$.

Отсюда следует что, $ac > bd$.

Следствие. Если a и b положительные числа и $a > b$, тогда $a^n > b^n$. (n -натуральное число).

Обучающие задания

- 1**» Сложите почленно неравенства
а) $8 > 5$ и $6 > 4$ б) $-2 < 10$ и $6 < 7$

- 2**» Умножьте почленно неравенства.
а) $6 > 3$ и $4 > 2$ б) $6 < 8$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

- 3**» Зная, что $4 < a < 6$ и $5 < b < 7$ оцените выражения.
а) $a + b$ б) ab в) $2a + 3b$

Сложение и умножение неравенств

4 Разберите следующие примеры. Аналогичным образом, выполните следующие задания.

1) Если $3 < x < 4$ и $6 < y < 8$, то оцените выражения:

a) $x - y$ b) $2x - y$ c) $x - 3y$ d) $3x - 2y$

2) Если $15 < x < 20$ и $2 < y < 3$, то оцените выражения.

a) $\frac{x}{y}$

b) $\frac{2x}{y}$

c) $1 + \frac{3x}{2y}$

Пример 1. Зная, что $5 < a < 10$ и $2 < b < 4$ оцените разность, $a - b$ представив её виде $a - b = a + (-b)$.

Зная, что $2 < b < 4$, то $-2 > -b > -4$, т.е. $-4 < -b < -2$.

Теперь применим почленное сложение.

$$\begin{array}{r} +5 < a < 10 \\ -4 < -b < -2 \\ \hline 1 < a - b < 8 \end{array}$$

Пример 2. Зная, что $10 < x < 16$ и $4 < y < 5$, оцените $\frac{x}{y}$.

Запишем следующее $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$ и оценим выражение $\frac{1}{y}$.

Если $4 < y < 5$, то $\frac{1}{4} > \frac{1}{y} > \frac{1}{5}$ т.е. $\frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$

Применим теорему о почленном умножении

$$\begin{array}{r} 10 < x < 16 \\ \times \frac{1}{5} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4} \\ \hline 2 < \frac{x}{y} < 4 \end{array}$$

Прикладные задания

5 Зная, что $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ и $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, оцените числа.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

c) $\sqrt{6}$

6 Длина основания равнобедренного треугольника a , длины боковой стороны b . Зная, что $16 \leq a \leq 18$ и $24 \leq b \leq 26$, оцените периметр треугольника.

7 При измерении длины прямоугольника a и ширины b (в см) было установлено, что $4,5 < a < 4,6$ и $3,4 < b < 3,5$. Оцените:

a) периметр прямоугольника;

b) площадь прямоугольника.

8 1) α и β углы треугольника. Зная, что $58^\circ \leq \alpha \leq 59^\circ$ и $82^\circ \leq \beta \leq 83^\circ$. Оцените третий угол треугольника.

2) Оцените градусную меру угла, при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании больше 30° , но меньше 32° .

Числовые промежутки

Исследование. Отметьте на числовой оси две точки с координатами -2 и 3 . Возьмите любую точку, расположенную между данными точками. Сравните число, соответствующее этой точке с числами -2 и 3 . Проверьте, что любая точка, расположенная между данными удовлетворяет условию $-2 < x < 3$. Множество этих точек называется промежутком от -2 до 3 и обозначается так: $(-2 ; 3)$.

Числовые промежутки

При $a < b$ множество всех действительных чисел, удовлетворяющих соотношению $a < x < b$, называется интервалом $(a; b)$.

Если в множество точек интервала $(a; b)$ добавить точки a и b , то полученный промежуток будет называться отрезком $[a; b]$.

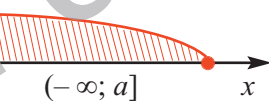
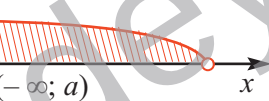
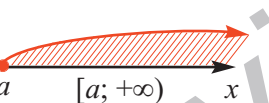
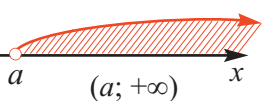
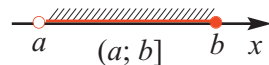
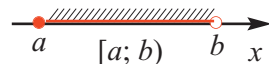
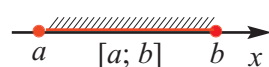
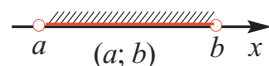
Множество всех чисел x , удовлетворяющих двойному неравенству $a \leq x < b$ и $a < x \leq b$, соответственно записывается как $[a; b)$ и $(a; b]$.

Множество всех точек, удовлетворяющих условию $x > a$ и расположенных справа от точки с координатой a , записывается как $(a; +\infty)$ и читается так: промежуток от a до плюс бесконечности.

Если точка a принадлежит множеству чисел, удовлетворяющих условию $x \geq a$, то это записывается как $[a; +\infty)$ и графически изображается так:

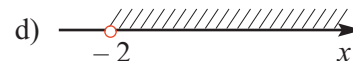
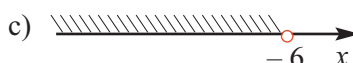
Множество всех чисел, удовлетворяющих условию $x < a$, записывается как $(-\infty; a)$ и графически изображается так:

Если точка a принадлежит множеству чисел, удовлетворяющих условию $x \leq a$, то это записывается как $(-\infty; a]$ и графически изображается так:



Обучающие задания

1 Запишите промежутки, изображённые на рисунке.

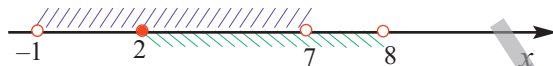


Числовые промежутки

- 2** На числовой оси изобразите следующие числовые промежутки.
- a) $(-1; 3)$ b) $(0; 5)$ c) $(2; +\infty)$ d) $(3; +\infty)$
e) $(-5; +\infty)$ f) $(-\infty; -4)$ g) $(-\infty; 6)$ h) $(-2; +\infty)$
- 3** На числовой оси изобразите множество чисел, удовлетворяющих неравенству.
- a) $x \geq -6$ b) $x \leq 3$ c) $x < -6$ d) $x > 4$
- 4** На числовой оси изобразите множество чисел, удовлетворяющих двойному неравенству.
- a) $-2,5 \leq x \leq 3$ b) $-5 < x \leq 1\frac{1}{2}$
c) $-3 < x < 1,5$ d) $3 \leq x < 7$
- 5** a) Какие из чисел $-2; 4; -1,2; 4,5; 5$ принадлежат промежутку $(-3; 4,5)$?
b) Принадлежат ли числа $-7; -6; -4,5; 0; 1,2; 4$ промежутку $(-7; 4,1)$?
- 6** Запишите все целые числа принадлежащие данным промежуткам.
- a) $(-5; 3)$ b) $[-2,5; 4)$ c) $(-\sqrt{11}; \sqrt{30})$
- 7** Покажите наибольшее и наименьшее целое число, принадлежащее промежутку.
- a) $(-12; 8)$ b) $(-4; 5,2)$ c) $[-\sqrt{17}; \sqrt{8}]$
- 8** Разберите пример и найдите пересечение следующих промежутков.
- a) $(-2; 5)$ и $(-1; 6)$ c) $(-3; 9)$ и $(4; +\infty)$
b) $(5; +\infty)$ и $(-\infty; 7)$ d) $(1; +\infty)$ и $(3; +\infty)$

Пример. Найдём пересечение (общую часть) промежутков $(-1; 7)$ и $[2; 8)$

Графическое представление:

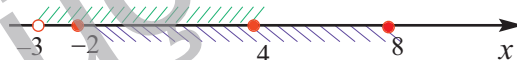


Математическая запись: $(-1; 7) \cap [2; 8) = [2; 7)$

- 9** На числовой оси покажите объединение следующих промежутков.
- a) $(-5; 1)$ и $[-2; 5)$ c) $(-\infty; 2]$ и $[-1; +\infty)$
b) $[-6; 2)$ и $(1; 3)$ d) $(2; +\infty)$ и $[6; +\infty)$

Пример. Найдём объединение промежутков $(-3; 4]$ и $[-2; 8]$.

Графическое представление:



Математическая запись:

$$(-3; 4] \cup [-2; 8] = [-2; 8]$$

- 10** Известно, что, $A = [-2; 1)$, $B = (0; 3)$, $C = (-1; 2)$. Найдите следующее:
- a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A \cup C$
d) $A \cap C$ e) $A \setminus B$ f) $B \setminus C$
g) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$ h) $A \setminus (B \cup C)$

Исследование. Начертите прямоугольник, ширина которого 4 см.

- 1) Найдите периметр прямоугольника, если его длина 6 см.
- 2) Оцените периметр, если длина прямоугольника больше 6 см.
- 3) Чему должна равняться длина прямоугольника, чтобы его периметр был меньше 24 см?

Обозначим длину прямоугольника через x . Тогда его периметр можно записать в виде неравенства $2x + 8 < 24$. Проверьте, удовлетворяют ли длины 6 см; 7 см 8 см; 9 см условию $P < 24$. При каких значениях переменной верно неравенство? При каких значениях переменной неравенство неверно?

Решение линейных неравенств с одной переменной

Определение. Решением линейного неравенства с одной переменной называется множество всех значений переменной превращающих данное неравенство в верное.

Решить неравенство, значит найти все его решения или доказать, что решений нет. Неравенства, имеющие одинаковые множества решений, называются равносильными. Неравенства, не имеющие решения, также называются равносильными. При решении неравенств используются следующие следствия, полученные из свойств числовых неравенств:

- ✓ 1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.
- ✓ 2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство.
Например, неравенство $6x - 2 > 10$ равносильно неравенству $6x > 12$, а неравенство $6x > 12$ равносильно неравенству $x > 2$.
- ✓ 3) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

Неравенства вида $ax > b$ и $ax < b$ (где a и b некоторые числа) называются линейными неравенствами, зависящими от одной переменной.

Решение неравенства $ax > b$

1) Если $a > 0$, то $x > \frac{b}{a}$;

2) Если $a < 0$, то $x < \frac{b}{a}$.

Решение неравенства $ax < b$

1) Если $a > 0$, то $x < \frac{b}{a}$;

2) Если $a < 0$, то $x > \frac{b}{a}$.

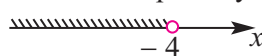
Пример: $-3x + 6 > 18$

$$-3x > 18 - 6$$

$$-3x > 12$$

разделим обе части на -3

$x < -4$ решением неравенства является промежуток $(-\infty; -4)$.

Графическое представление решения: 

Обучающие задания

- 1**» Решите неравенства и изобразите множество решений на числовой оси
а) $x - 7 > 0$ б) $x + 6 < 0$ в) $x + 1,5 \geq 0$ г) $x - 0,6 \leq 0$

- 2**» Решите неравенства.
а) $2x > 11$ б) $6x < 18$ в) $\frac{1}{2}y > -3$
г) $-2y \leq 15$ д) $5x \geq 0$ е) $-4\frac{1}{2}x \leq -3$

- 3**» Решите неравенства.
а) $6x - 3,2 > 0,4$ б) $15 - x < 12 - 4x$ в) $3 - 4y > 7$
г) $29 + 5x \leq 17 - 7x$ д) $3 - 4a \leq 1$ е) $3 + 5y \geq 15 + 8y$

- 4**» а) при каких значениях x двучлен $2x - 7$ принимает положительные значения?
б) при каких значениях y двучлен $15 - 3y$ принимает отрицательные значения?
в) при каких значениях x двучлен $3x + 1$ принимает значения меньше 25?

- 5**» Решите неравенства.
а) $5(x - 2) + 12 > 7 - 3(x + 4)$ в) $4(x - 1,5) + 1 \geq 6x + 1,2$
б) $3(a + 8) - 5(a - 1) < 7$ г) $4x - (x + 6) - 3(2 - x) \leq 4$

- 6**» Решите неравенства.
а) $0,3(x - 2) - 0,8x > -4,4$ в) $\frac{2x - 1}{3} < 5$ г) $\frac{2}{7}(x - 4) > 3$
б) $\frac{15 - 3x}{12} \geq 5$ д) $3 > \frac{6 - x}{4}$ е) $\frac{7 - 2x}{2} \geq \frac{3x - 7}{4}$

- 7**» Решите неравенства.
а) $x(x - 3) > x^2 - 6x + 1,2$ в) $6x(x - 1) - 3x(2x - 2) > 6$
б) $3y^2 - y(3y - 4) \leq 16$ г) $(3y - 1)^2 > (y + 3)(9y - 1)$

- 8**» Лейла должна ввести в память компьютера 56 фотографий при помощи сканера. За одну минуту она сканирует 4 фотографии. Сколько минут должна работать Лейла, чтобы у неё осталось меньше 10 фотографий?

- 9**» У Наримана есть подарочный чек на сумму 50 манат, из которых он уже успел потратить 15 манат. Чтобы не просрочить чек, он решил на оставшуюся часть денег приобрести забавные очки, цена которых 2,55 манат. Сколько пар очков он сможет приобрести?

Решение линейных неравенств с одной переменной

Прикладные задания

- 10**» При каких значениях переменной: а) значение дроби $\frac{5-7y}{3}$ больше соответствующего значения дроби $\frac{2-3y}{6}$?
б) Значение двучлена $3x-1$ меньше соответствующего значения дроби $\frac{2x+1}{2}$?
- 11**» Решите неравенства.
- а) $(3-\pi) \cdot (3-2x) > 0$ б) $(\sqrt{2}-3) \cdot (5-x) < 0$
- с) $\frac{x-4}{\pi-2} \geq 0$ д) $\frac{x+1}{\sqrt{3}-2} \leq 0$
- 12**» а) При каком значении y сумма дробей $\frac{2y-1}{3}$ и $\frac{y+1}{3}$ положительна?
б) При каком значении x разность дробей $\frac{2x-1}{2}$ и $\frac{1+x}{3}$ отрицательна?
- 13**» а) Найдите наибольшее целое число удовлетворяющее неравенству $3-(5-2x) < 6$.
б) Найдите наименьшее целое число удовлетворяющее неравенству $4(3-y) < 14,6-2y$.
- 14**» При каких значениях n :
а) разность $(3-2n)-(5n-26)$ положительна?
б) сумма $(-18,3+3n)+(7,3+2n)$ отрицательна?
- 15**» Сумма трёх последовательных нечётных чисел больше 105. Найдите наименьшее число.
- 16**» Длина прямоугольника 8 см. Каким должна быть ширина прямоугольника, чтобы его периметр был меньше периметра квадрата со стороной 7 см?
- 17**» Туристы плыли на моторной лодке по течению реки. При этом, они должны возвратиться в лагерь не позже, чем через 3 часа.
На какое наибольшее расстояние смогут удалиться от лагеря туристы, если скорость течения реки равна 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч?
- 18**» Из двух пунктов, расстояние между которыми 45 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость одного из них 12 км/ч. Найдите с какой скоростью должен двигаться другой велосипедист, чтобы они встретились меньше, чем через 2 часа?

Решение линейных неравенств с одной переменной

- 19** Исследования показывают, что для переноса груза чаще всего используются рюкзаки. Однако тем, кто постоянно пользуется рюкзаком, надо обратить внимание на его вес. Полный рюкзак должен весить как минимум в 3 раза меньше веса человека, который его переносит. Представьте себе, что ваш вес составляет 54 кг. Сам рюкзак весит 4 кг. Какое максимальное количество килограммов груза можно поместить в рюкзак?
- 20** Чтобы обедать на работе, Ульвия в этом месяце положила на кредитную карту 80 манат. Стоимость обеда 4 маната 50 гяпик. Через сколько дней на карте у Ульвии останется меньше 20 манат? Составьте соответствующее неравенство и решите его.
- 21** Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника находится по формуле $180^\circ(n - 2)$. Какое наименьшее количество сторон может иметь многоугольник, сумма внутренних углов которого больше 900° ?
- 22** Турист начал движение со скоростью 4 км/ч из лагеря в город, расстояние между которыми 24 км. Через 2 часа из того же лагеря вышел другой турист. С какой скоростью должен двигаться второй турист, чтобы прийти в город раньше первого?
- 23** Для награждения 16 учащихся были приобретены иллюстрированные книги и альбомы для рисования. Иллюстрированная книга стоит 1 манат 50 гяпик, а альбом для рисования - 80 гяпик. Сколько иллюстрированных книг нужно купить, чтобы стоимость всех подарков не превышала 17 манат?
- 24** Рашад ежемесячно платит за услуги мобильному оператору 10 манат и дополнительно ещё 0,02 маната, за каждую минуту разговора. Он старается, чтобы в этом месяце плата за услуги не превысила бы 25 манат. Сколько минут максимум сможет говорить Рашад по мобильному телефону?
- 25** Составьте задачи по неравенствам.
- a) $3(x + 6) \leq 30$ b) $3x + 6 \geq 350$
- 26** При каких значениях x значение функции $y = -\frac{1}{3}x$ будет:
- a) $y = 0$; b) $y > 0$; c) $y < 0$
- 27** При каком значении x функция заданна формулой $y = 3x - 15$ принимает:
- a) положительные значения; b) отрицательные значения?

28 При каких значениях переменной имеют смысл выражения?

а) $\sqrt{2x-7}$ б) $\sqrt{6-2x}$ в) $\sqrt{\frac{2}{3}x+1}$

Решение двойных неравенств

Двойные неравенства		
Словесная запись	Мат. запись	Граф. представление
Все действительные числа больше 2 и меньше 5	$x > 2$ и $x < 5$ $2 < x < 5$	
Все действительные числа не меньше 2 и не больше 5	$x \geq 2$ и $x \leq 5$ $2 \leq x \leq 5$	
Все действительные числа меньше 2 или больше 6	$x < 2$ или $x > 6$	
Все действительные числа не больше 2 или не меньше 6	$x \leq 2$ или $x \geq 6$	

Пример 1. Запишем неравенство $-2 < x + 4 < 1$ в виде двух неравенств

$$-2 < x + 4 \text{ и } x + 4 < 1$$

Надо найти такие значения x , которые будут удовлетворять неравенствам $-2 < x + 4$ и $x + 4 < 1$.

$$\begin{array}{ccccccc} -2 < x + 4 & \text{и} & x + 4 < 1 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{array}$$

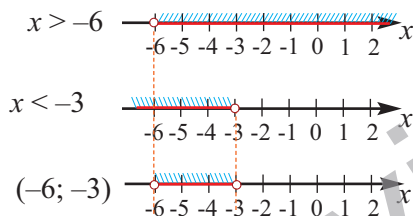
$$-6 < x \text{ и } x < -3$$

$$x > -6 \text{ и } x < -3$$

$$-6 < x < -3$$

Ответ: $(-6; -3)$

Графическое решение неравенства:



Пример 2. $-3 + x > 0$ или $-3 + x < -4$

Надо найти такие значения x , которые будут удовлетворять неравенствам $-3 + x > 0$ или $-3 + x < -4$.

Решаем каждое неравенство и находим объединение множеств.

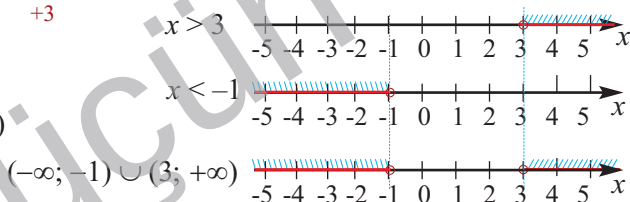
$$\begin{array}{ccccccc} -3 + x > 0 & \text{или} & -3 + x < -4 \\ +3 & +3 & +3 & +3 \end{array}$$

$$x > 3 \text{ или } x < -1$$

Ответ:

$$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$$

Графическое решение неравенства:



Пример 3. Двойное неравенство $-7 < 2x + 1 \leq 17$ можно решить используя свойства неравенств.

$$\begin{array}{ccc} -7 < 2x + 1 \leq 17 \\ -1 & -1 & -1 \end{array} \quad \text{Вычтем 1}$$

$$-8 < 2x \leq 16 \quad \text{Разделим на 2}$$

$$-4 < x \leq 8 \quad \text{Ответ: } (-4; 8]$$

Решение двойных неравенств

Обучающие задания

1» Решите неравенство графически.

1) $x > 5$ и $x \leq 9$

2) $s < -7$ и $s \leq 0$

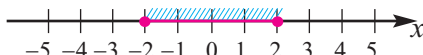
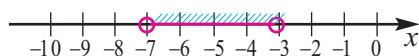
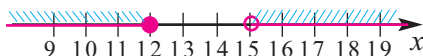
3) $r < 5$ или $r > 9$

4) $m \leq -4$ или $m > 6$

5) $7 < d < 11$

6) $-1 \leq g < 3$

2» Составьте неравенства по рисункам.



3» Решите неравенства и изобразите решение графически.

1) $k - 4 > 3$ или $k - 4 \leq 1$

2) $d - 10 < -2$ или $d + 3 > 12$

3) $3 < 2x - 3 < 15$

4) $4 < 2y - 2 < 10$

5) $3t - 7 \geq 5$ и $2t + 6 \leq 12$

6) $8 > 5 - 3n$ и $5 - 3n > -13$

7) $1 + y \leq 3$ или $1 - y \leq -4$

8) $3t + 1 \leq 13$ или $3 - 3t \leq -12$

4» Запишите неравенства по высказываниям.

1) Разность числа и числа 5 меньше 14 и больше 5.

2) Сумма удвоенного произведения числа и числа 3 расположена между числами -8 и 12.

3) Пятикратное значение величины или больше 30 или меньше 10.

Прикладные задания

5» Составьте неравенства соответствующие ситуациям.

а) Среднее количество осадков за год в некоторых районах Азербайджана достигает 300 мм или менее, а в других - более 7000 мм.

б) Капитан, управляющий самолётом на высоте 9000 м, информировал центр управления полётами о том, что для избежания воздушного вихря, он должен либо увеличить высоту до 10000 м, либо снизить до 7000 м.

6» Вода может находиться в трёх состояниях: кристаллическом, жидком или газообразном. Она замерзает при температуре ниже 0°C , а при увеличении температуры выше 100°C вода превращается в пар. Запишите неравенство, которое выражает температуру воды, не находящейся в состоянии жидкости.

7» Запишите чем отличаются неравенства $x < 5$ и $x > 3$, от неравенств $x < 5$ или $x > 3$.

Решение двойных неравенств

- 8» На банковском счету Фармана имеется 100 манат. Банк ежемесячно начисляет дополнительно 15 манат. У Гюльназ на счету - 155 манат, и банк ежемесячно начисляет дополнительно 12 манат. Через сколько месяцев сумма вклада Фармана станет больше суммы вклада Гюльназ?

- 9» Решите неравенства.

a) $-2 \leq x + 3 < 9$

b) $-3 \geq x - 1$ и $x - 5 > 2$

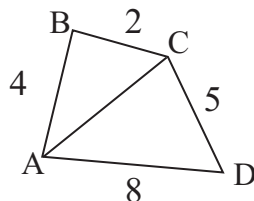
c) $-2x > -8$ и $x + 7 \geq 6$

d) $m + 2 < -1$ или $m - 2 > 6$

e) $-2 > r + 2$ или $r + 4 < 5$

f) $5 > y + 9$ или $y - 4 > 2$

- 10» Какие целые значения может принимать диагональ AC в четырёхугольнике ABCD с заданными сторонами?



- 11» Решите двойное неравенство и запишите три числа, являющихся решением данного неравенства.

a) $-7,5 \leq \frac{7x+6}{2} \leq 20,5$

b) $-2 \leq \frac{3x+1}{7} \leq 0$

c) $-1 < \frac{3-x}{3} < 5$

d) $-3,5 \leq \frac{1-3x}{2} \leq 2,5$

- 12» Магомед надеется набрать по результатам двух тестов в среднем не меньше 93 балла. За первый тест он набрал 90 баллов. Сколько баллов ему надо набрать за второй тест, для достижения цели (максимальный балл за тест равен 100).

- 13» Аслан по результатам двух тестов набрал 81 и 90 баллов соответственно. Если он должен набрать в среднем от 85 до 95 баллов, то сколько баллов он должен набрать за третий тест. Составьте и решите неравенство (максимальный балл за тест равен 100).

Творческое применение

- 14» Чувство обоняния у собак в 1000 раз сильнее, чем у человека, а способность видеть намного меньше, чем у людей.

Информация о слуховой способности человека и собаки представлена в виде таблицы. Звуковые волны оцениваются частотой и измеряются в герцах.

1) Запишите двойные неравенства, выражающие интервал частоты слуха у человека и собаки.

2) В каком интервале эти частоты совпадают?

3) Запишите интервал частот, где собака слышит, а человек - нет.

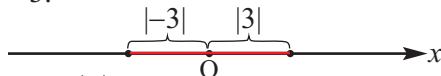


	Частота в герцах
Человек	20-20000
Собака	15-50000

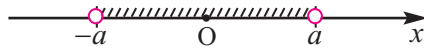
Простые неравенства с переменной, входящей под знак модуля

Простые неравенства, содержащие переменную под знаком модуля

Геометрически решением неравенства $|x| < 3$ является множество всех точек, расположенных на расстоянии меньше 3-х единиц от числа 0. Это все действительные числа, которые расположены между числами -3 и 3 , т.е. $-3 < x < 3$.



При $a > 0$ неравенство $|x| < a$ геометрически выражает расстояние от точки 0 до точек x , при котором это расстояние будет меньше a . Оно состоит из множества точек x , размещённых на интервале $(-a; a)$.



Поэтому неравенство $|x| < a$ равносильно двойному неравенству $-a < x < a$. Аналогично, неравенство $|x| \leq a$ равносильно двойному неравенству $-a \leq x \leq a$.

При $a > 0$ неравенство $|x| > a$ геометрически выражает расстояние от точки 0 до точек x , при котором это расстояние будет больше a .

Для любого x , взятого из промежутков $(-\infty; -a)$ или $(a; +\infty)$ расстояние от начала отсчета до точки x больше a . Поэтому, множеством решений

неравенства $|x| > a$ является $(-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$, т.е. объединение промежутков, удовлетворяющее неравенствам $x < -a$ или $x > a$.



Множество решений неравенства $|x| \geq a$ будет $(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$.

Обучающие задания

1 Какие из чисел -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 являются решением неравенства?

a) $|x| < 2$

b) $|x| > 1$

c) $|x| \leq 3$

d) $|x| > 4$

2 Решите неравенства.

a) $|x| < 4$

b) $|x| \leq 2$

c) $|x| < -1$

d) $|x| < 5$

e) $|x| > 4$

f) $|x| > 2$

g) $|x| > -1$

h) $|x| > 0$

3 Решите неравенства по образцу.

a) $|x - 2| > 2$

b) $|x - 1| > 3$

c) $|2x - 5| \geq 3$

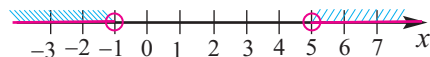
d) $|2x + 1| > 5$

e) $|7x - 2| \geq 5$

f) $|3x - 1| > 8$

Образец. Решим неравенство $|x - 2| > 3$. Это неравенство верно в том случае, если верны неравенства $x - 2 < -3$ или $x - 2 > 3$. Из первого неравенства получаем $x < -1$, а из второго $x > 5$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$



Простые неравенства с переменной, входящей под знак модуля

4» Решите неравенства по образцу

a) $|x - 5| < 1$

b) $|x + 1| < 3$

c) $|2x - 1| \leq 7$

d) $|3x + 2| < 8$

e) $|7x - 2| \leq 5$

f) $|3x - 1| < 8$

Образец: Решим неравенство $|2x - 3| < 7$..

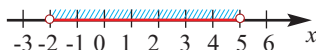
$$-7 < 2x - 3 < 7 \quad \text{Прибавим 3}$$

$$-4 < 2x < 10 \quad \text{Разделим на 2}$$

$$-2 < x < 5$$

Графическое решение неравенства:

Ответ : $(-2 ; 5)$



5» По стандарту масса риса в мешке должна составлять 450 г. На мешке указана информация $450 \text{ г} \pm 14 \text{ г}$. В каком интервале находится масса риса в действительности?

Пример решения задачи.

Словесная запись:

Стандарт 450 г

В действительности x

Абсолютная погрешность 14

$$\left| \begin{array}{l} \text{масса по} \\ \text{стандарту} \end{array} - \begin{array}{l} \text{действительная} \\ \text{масса} \end{array} \right| \leq \begin{array}{l} \text{абсолютная} \\ \text{погрешность} \end{array}$$

Математическая запись:

$$|x - 450| \leq 14$$

$$-14 \leq x - 450 \leq 14$$

$$436 \leq x \leq 464$$

6» Уровень кислотности воды в плавательном бассейне рекомендуется сохранять в пределах pH 7,5. Этот показатель может колебаться в пределах 0,3 pH. Запишите соответствующее неравенство.

7» Абонентская плата в центре здоровья составляет 25 манат. Однако она может увеличиваться или уменьшаться до 5-ти манат в соответствии с количеством выбранных услуг. Запишите изменение цены в виде неравенства с модулем.

8» Решите неравенства.

1) $\left| \frac{2p - 8}{4} \right| \geq 9$

2) $\left| \frac{7c + 3}{2} \right| \leq -5$

3) $\left| \frac{2g + 3}{2} \right| > -7$

4) $|-6r - 4| < 8$

5) $|-3p - 7| > 5$

6) $|-h + 1,5| < 3$

9» При каких значениях a , решением неравенства является множество действительных чисел R ?

a) $|x + 1| \geq a - 2$

b) $|x - 3| > a + 1$

10» Запишите выражения в виде двойных неравенств и решите их.

a) $|x + 8| < 5$

b) $|9 - x| > 21$

c) $|10 - 3x| \geq 17$

d) $|11 - 2x| \geq 13$

e) $|x + 5| \leq 9$

f) $|14x + 10| < 18$

11» Прибор измеряет скорость автомобиля, движущегося со скоростью 55 км/ч с погрешностью в интервале 3 км/ч. Запишите соответствующее неравенство.

12» Какие из следующих неравенств имеют решения или нет? Представьте решения на числовой оси.

a) $|m + 4| < -2$

b) $|-2c - 3| > -4$

c) $|-h + 1,5| < 3$

Обобщающие задания

- 1» Фирма А предоставляет автомобили на прокат по цене 4 маната за день и 0,25 манат за каждый километр. Фирма В - по цене 25 манат за день и 0,15 манат за каждый километр. Сколько километров в день должен проехать клиент, чтобы предложение фирмы А было выгоднее, чем предложение фирмы В?

Фирма А

плата за день + плата за 1 км ×
пройденный путь

$$4 + 0,25x < 25 + 0,15x$$

$$0,25x - 0,15x < 25 - 4$$

$$0,1x < 21$$

$$\frac{0,1x}{0,1} < \frac{21}{0,1}$$

$$x < 210$$

Фирма В

плата за день + плата за 1 км ×
пройденный путь

Если за день пройденное расстояние будет меньше 210 км, то выгоднее предложение фирмы А.

Проверим: например, при $x=200$ км,

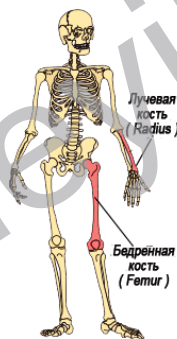
Фирма А: $4 + 0,25 \cdot 200 = 54$,

Фирма В: $25 + 0,15 \cdot 200 = 55$

$$54 < 55.$$

- 2» Фирма планирует покупку новых принтеров. Цена принтера А составляет 85 манат, и для печати одного экземпляра расходуется 0,05 манат. Цена принтера В - 215 манат, и для печати одного экземпляра расходуется 0,01 манат. При каких условиях выгоднее купить принтер В?

- 3» Специалист по медицинской экспертизе может приблизительно определить рост человека, измеряя его кости. Рост молодой девушки можно приблизительно вычислить по длине бедренной кости, используя неравенство $|h - (2,47f + 54,10)| \leq 3,72$, рост юноши можно приблизительно вычислить, зная длину лучевой кости, используя неравенство $|h - (3,32r + 85,43)| \leq 4,57$. Здесь f - длина бедренной кости (Femur), r - длина лучевой кости (Radius), h - рост.



- а) В каком интервале может находиться значение роста девушки, если длина бедренной кости равна 30,25 см?
б) Подумайте, в каком интервале находится значение роста молодого человека, длина лучевой кости которого равна 25,45 см?

- 4» Между единицами измерения температуры по Фаренгейту и Цельсия существует следующая зависимость $F = \frac{9}{5}C + 32^\circ$. Если температура в течение дня изменилась с 65° до 115° по Фаренгейту (65° и 115° включительно), то выразите изменение температуры по Цельсию.

Обобщающие задания

5 Решите неравенства.

a) $|x - 3| < 2$

b) $|x + 1| < 5$

c) $|y - 5| \leq 1$

d) $|2x - 3| \leq 7$

e) $|7x + 5| < 16$

f) $|4x + 1| < 5$

6 При каких значениях a , неравенства не имеют решения? Покажите какое-либо значение a , при котором неравенство будет иметь решение и найдите это решение.

a) $|x - 2| < a - 1$

b) $|x + 3| \leq a + 1$

7 Найдите произведение наибольшего и наименьшего целых решений неравенства $|3 - 2x| < 5$.

8 Сумма трёх последовательных целых чисел находится между числами 63 и 81. Запишите множество чисел, удовлетворяющих данному условию.

9 Длина листа бумаги прямоугольной формы в 2 раза больше ширины. После того, как с каждой стороны листа отрезали 1 см, периметр листа стал иметь максимальную длину 1 м. Найдите наибольшие размеры, нового прямоугольника.

10 В случае, если решение не является пустым множеством, изобразите его на числовой оси.

$$2x + 3 > 1$$

$$2t + 7 \geq 13$$

$$-5 < 1 - 2k < 3$$

$$5x - 9 \geq 6$$

$$5t - 4 < 6$$

$$-6 \leq 5 - 3m \leq 7$$

$$|12 - x| \leq 9$$

$$|16 - x| \geq 10$$

$$-3 < 2 - \frac{d}{3} \leq -1$$

11 Длина линии метрополитена равна 9 км. Поезд между первой и последней станциями останавливается ещё на 6-ти станциях. Один рейс вместе с остановками поезд преодолевает не более, чем за 20 минут. Сколько минут максимально может стоять поезд на каждой станции, если скорость движения поезда составляет 36 км за час?

12 Изобразите на числовой оси. Запишите в виде неравенств.

1) все действительные числа меньше -5 и больше 8 ;

2) числа больше 3 и меньше 8 .

13 При каких значениях переменной выражение имеет смысл?

a) $\sqrt{12 - 3x}$

b) $\sqrt{2x + 15}$

c) $\sqrt{(1 - \sqrt{6})(x - 6)}$

d) $\sqrt{(3 - \sqrt{8})(8 - x)}$

e) $\sqrt{|x - 1| - 2}$

f) $\sqrt{3 - |x - 1|}$

14 При каких значениях c уравнение $x^2 - 2x + c = 0$:

a) имеет два различных действительных корня;

b) не имеет действительных корней?

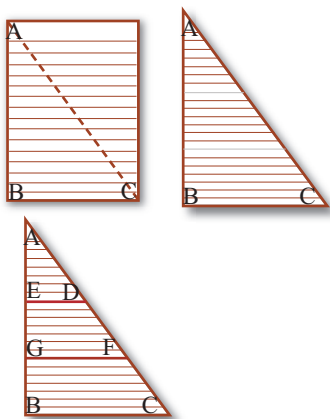
Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения

Практическая работа 1. Сложите по диагонали лист бумаги и разрежьте его по линии сгиба. Полученный прямоугольный треугольник обозначьте через ABC.

2. Сложите треугольник ещё два раза так, чтобы получились линии, перпендикулярные стороне AB. Линии сгибов прочертите карандашом.

3. Отметьте точки D, E, F и G, как показано на рисунке, и при помощи линейки измерьте длины отрезков AC, AB, BC, AF, AG, FG, AD, AE и DE с точностью до миллиметров.

4. Запишите отношения проведённых измерений. Результаты округлите до тысячных и заполните таблицу.



$\triangle ABC$	$\triangle AED$	$\triangle AGF$
$\frac{BC}{AC} \approx$	$\frac{ED}{AD} \approx$	$\frac{GF}{AF} \approx$
$\frac{AB}{AC} \approx$	$\frac{AE}{AD} \approx$	$\frac{AG}{AF} \approx$
$\frac{BC}{AB} \approx$	$\frac{ED}{AE} \approx$	$\frac{GF}{AG} \approx$

5. Обобщите свои мнения по поводу этих отношений

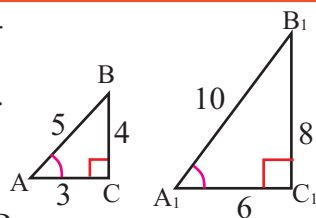
6. Какие мнения можно высказать по поводу $\angle A$ в треугольнике ABC?

Тригонометрия древнегреческое слово, которое состоит из двух слов. **Trigonon** – «угол» и **metreo** – «измеряю». Отношения, которые рассмотрены нами выше - отношения двух сторон в прямоугольном треугольнике, называются тригонометрическими отношениями и эти отношения (в данном случае для угла A) в каждом конкретном случае имеют названия, которые в сокращённой форме записываются так: *sinus* - *sin*, *kosinus* - *cos*, *tangens* - *tg*.

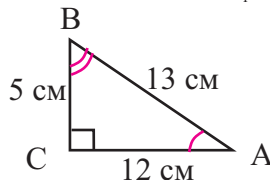
Тригонометрические отношения		
Синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.	$\sin \angle A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$	
Косинус острого угла равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.	$\cos \angle A = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$	
Тангенс острого угла равен отношению противолежащего катета к прилежащему катету.	$\text{tg} \angle A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BC}{AC}$	

Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения

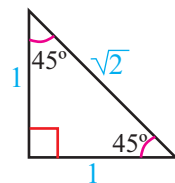
- 1» $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ на рисунке являются подобными треугольниками (по признаку ССС). Найдите синус, косинус и тангенс углов A и A_1 . Обобщите выводы.



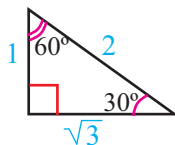
- 2» По рисунку вычислите:
а) $\sin \angle A$, $\cos \angle A$, $\operatorname{tg} \angle A$;
б) $\sin \angle B$, $\cos \angle B$, $\operatorname{tg} \angle B$



- 3» Используя длины сторон прямоугольного треугольника с углами 45° , 45° , 90° , найдите синус, косинус и тангенс угла 45° .

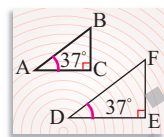


- 4» При помощи прямоугольного треугольника с углами 30° , 60° , 90° , найдите синус, косинус и тангенс углов:
а) 30° ; б) 60° .



- 5» По результатам двух предыдущих заданий составьте таблицу значений синуса, косинуса и тангенса углов 30° , 45° , 60° .

- 6» Сабина утверждает, что синус угла D в $\triangle DEF$ больше синуса угла A в $\triangle ABC$, так как треугольник DEF больше треугольника ABC по размерам. Выскажите и запишите письменно своё мнение по поводу утверждения Сабины.



- 7» Может ли синус или косинус острого угла быть больше единицы? Может ли тангенс острого угла быть больше (меньше) или равен единице?

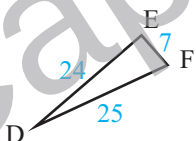
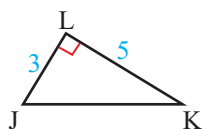
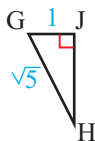
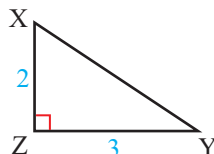
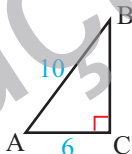
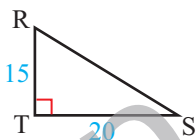
- 8» По следующим данным постройте углы.

1) $\operatorname{tg} \angle A = \frac{4}{3}$

2) $\sin \angle A = \frac{3}{5}$

3) $\cos \angle A = \frac{3}{5}$

- 9» По данным рисунка найдите синус, косинус и тангенс острых углов. При необходимости округлите результаты до десятых.

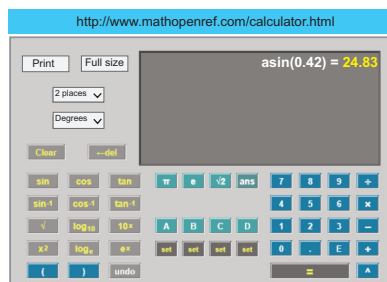


Прямоугольный треугольник и тригонометрические отношения

Для того, чтобы найти синус, косинус и тангенс угла, а также градусную меру угла, по заданным тригонометрическим отношениям, можно использовать специальный калькулятор

<http://www.mathopenref.com/calculator.html>.

1) На рисунке показано правило нахождения синуса угла 74° . Аналогичным образом, при помощи этого калькулятора, можно вычислить косинус и тангенс.



2. Для того, чтобы вычислить градусную меру угла $\angle A$ зная, что $\sin \angle A = 0,42$, надо использовать клавиши $\sin^{-1}$ ($\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$). В данном случае вычисления проведены с точностью до сотых. В меню можно установить точность, с которой проводится вычисления, выбрав количество цифр после запятой.

Пример	Клавиши калькулятора	Показания калькулятора
$\sin 74^\circ$	SIN 74 ENTER или sin	0,9613
$\sin \angle A = 0,42$	SIN⁻¹ 0,42 ENTER или sin⁻¹	24,83

10 а) При помощи калькулятора вычислите с точностью до сотых

- | | | | |
|--------------------|--------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| 1) $\cos 70^\circ$ | 3) $\operatorname{tg} 2^\circ$ | 5) $\sin 78^\circ$ | 7) $\cos 36^\circ$ |
| 2) $\cos 23^\circ$ | 4) $\cos 63^\circ$ | 6) $\sin 56^\circ$ | 8) $\operatorname{tg} 66^\circ$ |

б) При помощи калькулятора найдите градусные меры углов с точностью до десятых.

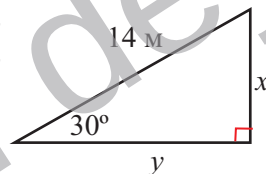
- | | | |
|--|--|----------------------------|
| 1) $\operatorname{tg} \angle A = 0,5095$ | 3) $\operatorname{tg} \angle B = 1,4653$ | 5) $\cos \angle A = 0,25$ |
| 2) $\sin \angle A = 0,35$ | 4) $\cos \angle A = 0,135$ | 6) $\sin \angle A = 0,135$ |

11 Зная тригонометрические отношения в прямоугольном треугольнике можно найти углы треугольника и длины его сторон.

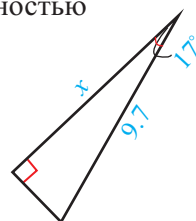
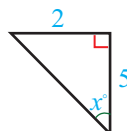
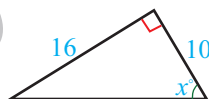
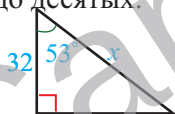
Например, найдём неизвестные стороны прямоугольного треугольника.

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{14} \quad x = 14 \cdot \sin 30^\circ = 14 \cdot 0,5 = 7 \text{ (м)}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{14} \quad y = 14 \cdot \cos 30^\circ \approx 14 \cdot 0,866 = 12,124 \approx 12,1 \text{ (м)}$$



Найдите углы или стороны, обозначенные через x с точностью до десятых.

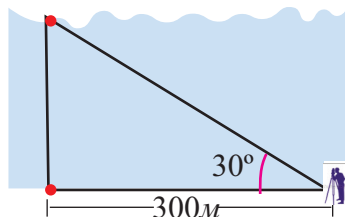


Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений

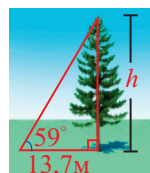
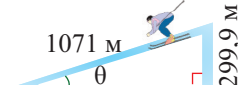
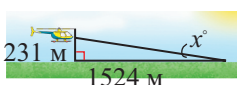
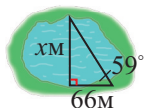
Теодолит – специальный прибор, предназначенный для измерения углов. Измерив углы, специалисты при помощи тригонометрии могут вычислить требуемую длину или высоту.



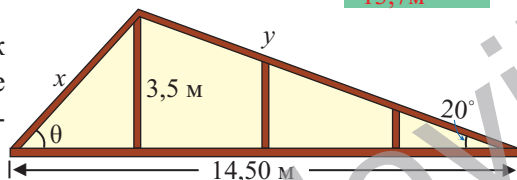
- 1» Для того чтобы построить мост через реку инженер проводит измерения при помощи теодолита. Сначала он измерил расстояние длиной 300 м вдоль берега реки, на котором находился сам и поставил метку. Затем, он установил теодолит так, чтобы точка, которая находится прямо напротив отмеченной, но на противоположном берегу, была видна под углом 30° от места, где находился сам. Найдите ширину реки с точностью до метра.



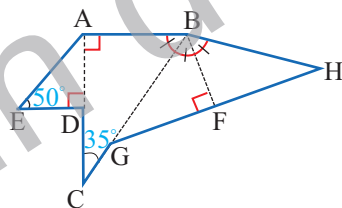
- 2» По данным рисунка найдите неизвестные длины сторон и градусные меры углов.



- 3» На рисунке изображён рисунок фасада крыши дома. Найдите длины сторон x и y данной конструкции и угол θ .



- 4» Найдите периметр фигуры на рисунке, если $AD = GF$, $AC = 25$ м и точка D середина AC .



- 5» Передатчик, расположенный на вышке главной станции, передаёт радиоволны на три станции S_1 , S_2 и S_3 вдоль магистральной дороги. Кратчайшее расстояние от главного источника до дороги 35 км. Расположение трёх других станций показано на рисунке. Найдите расстояние от источника радиоволн до каждой станции.

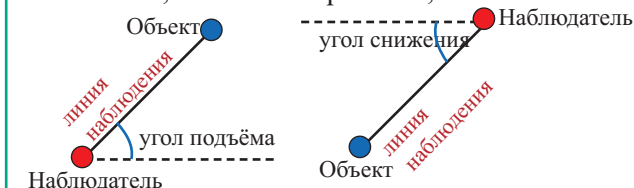
Источник радиоволн



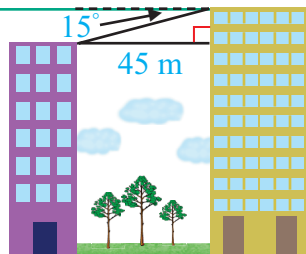
Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений

Тригонометрические отношения помогают в реальных жизненных ситуациях находить высоту различных объектов или расстояние между ними. Для решения задач данного типа используется **углы подъёма и снижения**.

Углы подъёма и снижения - это углы, образованные линией наблюдения, между наблюдателем и объектом, и линией горизонта,

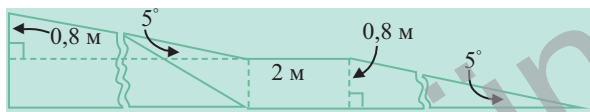


- 6» Расстояние между двумя высотными зданиями 45 м. Высота здания с большим количеством этажей равна 60 м. Найдите высоту другого здания.



- 7» При сооружении лестниц, для людей с ограниченными возможностями, рекомендуется придерживаться определённых стандартов. Наиболее правильным вариантом считается лестница, состоящая из наклонных частей высотой 80 см и углом наклона 5° , которые соединены прямыми пролётами длиной 2 м. В соответствии с планом, отражающим эти требования, решите следующие задачи.

1. Сколько минимум частей потребуется для специального перехода длиной 65 м?
2. Сколько метров составила бы обыкновенная прямая дорога?



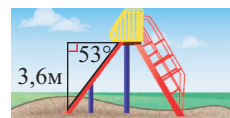
- 8» Эльдар находится на расстоянии 8 м от Девичьей Башни. Угол подъёма, который измерил Эльдар, составил 75° . Нарисуйте рисунок, по данным задачи и найдите высоту Девичьей Башни.



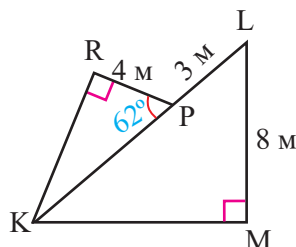
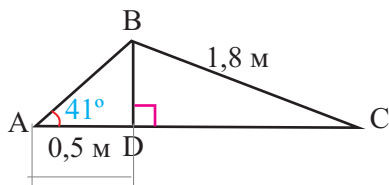
- 9» Что вы можете сказать о прямоугольном треугольнике, у которого равны значения синуса и косинуса острого угла?

Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений

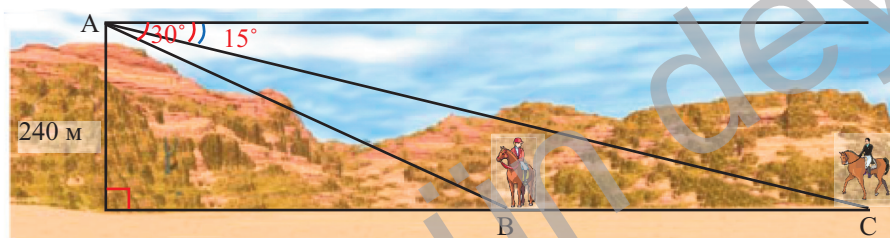
- 10»** Угол снижения горки равен 53° , а высота горки равна 3,6 м. Найдите длину горки.



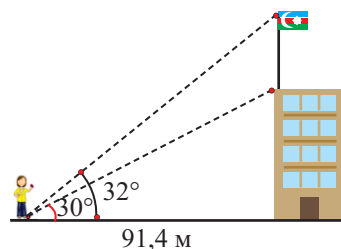
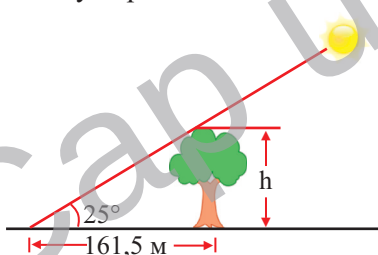
- 11»** Вы находитесь на высоте 30 м и наблюдаете за парусником в море.
1. Начертите соответствующий рисунок.
 2. Найдите длину линии (гипотенузы), если угол снижения под которым вы видите парусник равен соответственно 30° , 40° , 50° , 60° . Результаты запишите в таблице.
- 12»** Найдите длины сторон и градусные меры углов $\triangle ABD$ и $\triangle BDC$.
- 13»** Найдите длины сторон и градусные меры углов $\triangle KRP$ и $\triangle KLM$.



- 14»** Представьте себе, что вы находитесь на вершине горы высотой 240 м. Отсюда вы видите двух всадников на лошадях, движущихся по направлению к горе. Угол снижения от вас до всадника В составляет 30° , а до всадника С - 15° .
1. Сколько метров в данный момент составляет расстояние между вами и каждым всадником?
 2. Чему равно расстояние между двумя всадниками?

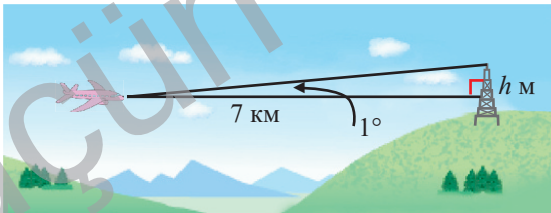


- 15»** По данным рисунка найдите высоту дерева.
- 16»** По данным рисунка найдите высоту дома и высоту флага.



Решение прикладных задач при помощи тригонометрических отношений

Для каждой задачи начертите соответствующий рисунок.

- 17»** Вертикальная высота эскалатора в торговом центре 4,3 м. При подъёме на эскалаторе, пройденный путь по горизонтали составит 15 м.
- 1) Найдите длину эскалатора. Начертите соответствующий рисунок.
 - 2) Измените, данные в задачи таким образом, чтобы её можно было решить при помощи тригонометрических отношений.
- 18»** Кямилль наблюдает из окна отеля за движением автобуса. За время пока автобус не скрылся из поля зрения, угол снижения изменился от 46° до 18° . Окно комнаты Кямилля находится на высоте 20 м. Найдите длину пути, который мог наблюдать мальчик, при движении автобуса.
- 19»** Сможет ли Ахмед поместить деревянную палку, длиной 34 см в ящик, размеры которого $12\text{ см} \times 20\text{ см} \times 24\text{ см}$?
- 20»** Наука, изучающая поведение птиц называется орнитология, а специалист, который работает в этой области, называется орнитолог. Два орнитолога находятся на одной линии и наблюдают за гнездом одной и той же птицы. Углы подъёмы от каждого из них до гнезда соответственно равны 30° и 60° , а расстояние между орнитологами 58 м. Сколько метров составляет расстояние от каждого орнитолога до гнезда?
- 21»** Автомобиль длиной 2,8 м был припаркован в неподобающем месте. Кран эвакуатора может приподнять переднюю часть автомобиля на 0,75 м, после чего проводится эвакуация. Сколько градусов в этот момент составляет угол между землёй и автомобилем?
- 22»** Два острова А и В находятся на расстоянии 5 км друг от друга. Остров С находится на севере от острова В, и на востоке от острова А. Остров В расположен под углом 35° от островов А и С. На каком расстоянии остров С находится от островов А и В?
- 23»** Радар передаёт информацию, о препятствии и угле подъёма для преодоления данного препятствия, скоростному самолёту, который движется под минимальным углом.
- 
- Находясь на некоторой высоте, с углом подъёма равным 1° , самолёт получает информацию о том, что на расстоянии 7 км от него находится вышка. Над любым объектом самолёт должен пролетать на высоте 300 м. Как при этом должен измениться угол подъёма самолёта?

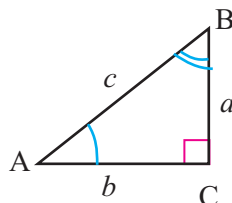
Тригонометрические тождества

В прямоугольном треугольнике ABC для каждого острого угла известны следующие зависимости между тригонометрическими отношениями.

1. $\sin \angle A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos \angle B$
 $\sin \angle B = \cos(90^\circ - \angle B) = \cos \angle A$

$\cos \angle A = \sin(90^\circ - \angle A) = \sin \angle B$
 $\cos \angle B = \sin(90^\circ - \angle B) = \sin \angle A$

$$\begin{array}{l} \sin \angle A = \frac{a}{c} \\ \sin \angle B = \frac{b}{c} \end{array} \quad \begin{array}{l} \cos \angle A = \frac{b}{c} \\ \cos \angle B = \frac{a}{c} \end{array}$$



При $\sin \angle A = \cos \angle B$ и $\angle B = (90^\circ - \angle A)$

$$\sin \angle A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos \angle B$$

Пример. $\sin 55^\circ = \cos(90^\circ - 55^\circ) = \cos 35^\circ$

Синус угла 55° равен косинусу 35° .

2. $\operatorname{tg} \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$

Доказательство: по определению $\sin \angle A = \frac{a}{c}$ $\cos \angle A = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}$

С другой стороны $\frac{\sin \angle A}{\cos \angle A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}$ Таким образом $\operatorname{tg} \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$

3. $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$

Доказательство: $\sin \angle A = \frac{a}{c}$ $\sin^2 \angle A = \frac{a^2}{c^2}$
 $\cos \angle A = \frac{b}{c}$ $\cos^2 \angle A = \frac{b^2}{c^2}$ сложив почленно

$$\text{При } \sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}, \quad a^2 + b^2 = c^2,$$

откуда $\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A = 1$

1) а) Следующие выражения выразите в виде косинуса.

1) $\sin 37^\circ$ 2) $\sin 81^\circ$ 3) $\sin 29^\circ$ 4) $\sin 64^\circ$

б) Следующие выражения выразите в виде синуса.

1) $\cos 59^\circ$ 2) $\cos 42^\circ$ 3) $\cos 73^\circ$ 4) $\cos 18^\circ$

2) 1) Покажите, что $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$ выполнив соответственные вычисления.

2) Вычислите синус и косинус угла A, если в прямоугольном треугольнике ABC $\operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{3}$. Решите задачу разными способами.

3) $\triangle ABC$ равносторонний. $\triangle EFD$ – прямоугольный треугольник. Докажите, что если $\angle E = 90^\circ$, $FD = 2$, $FE = 1$, то $\sin \angle C = \cos \angle D$.

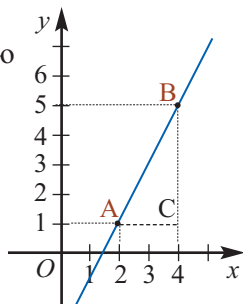
Уравнение прямой, проходящей через две точки

Исследование. 1) Начертите на координатной плоскости прямую, проходящую через точки $A(2;1)$ и $B(4;5)$.

2) Проведите через точку A прямую параллельную оси абсцисс и отметьте точку C , как показано на рисунке.

3) В $\triangle ABC$ найдите отношение $\frac{BC}{AC}$ и обозначьте его через k .

4) По рисунку найдите длины отрезков AC и BC и вычислите значение k .



Уравнение прямой

Пусть точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ не расположены на прямых параллельных оси абсцисс и оси ординат. Отметим точку $N(x; y)$ на прямой, которая проходит через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

В $\triangle ABC$ $k = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ k называется угловым коэффициентом

Так как $\triangle ABC \sim \triangle AND$, то $k = \frac{BC}{AC} = \frac{ND}{AD}$.

Отсюда, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Это уравнение прямой, проходящей через две точки.

Сводя это уравнение к виду $y - y_1 = k(x - x_1)$ и

обозначив $y_1 - kx_1 = b$ можно записать следующее $y = kx + b$.

k называется угловым коэффициентом и находится по формуле:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Пример 1. Найдём угловой коэффициент прямой, проходящей через точки $A(-1; 3)$ и $B(1; 7)$

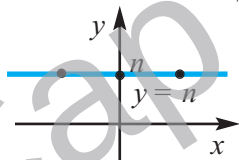
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 3}{1 - (-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

Пример 2. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1; 4)$ и $B(2; -5)$.

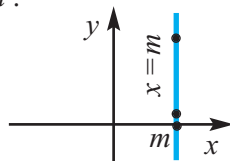
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y - 4}{x - (-1)} = \frac{-5 - 4}{2 - (-1)} \Rightarrow \frac{y - 4}{x + 1} = -3$$

$$y - 4 = -3(x + 1), \quad y - 4 = -3x - 3, \quad y = -3x + 1$$

Примечание 1. Если прямая проходящая через точки A и B параллельна оси абсцисс, то ординаты точек, расположенных на этой прямой остаются постоянными и уравнение записывается в виде $y = n$.



Примечание 2. Если прямая проходящая через точки A и B параллельна оси ординат, то абсциссы точек, расположенных на этой прямой остаются постоянными и уравнение записывается в виде $x = m$.



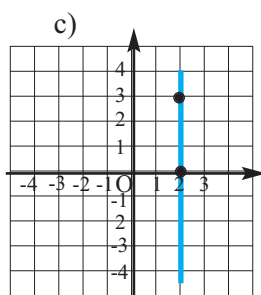
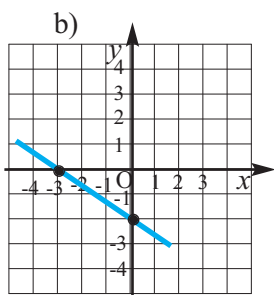
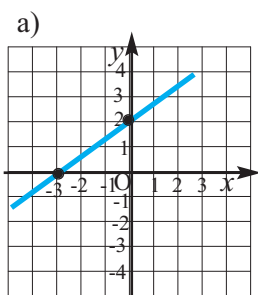
Уравнение прямой, проходящей через две точки

Обучающие задания

- 1» Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:
а) $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$ б) $A(-1; 3)$, $B(1; 9)$
с) $A(1; 1)$, $B(2; 4)$ д) $A(2; -3)$, $B(4; 0)$
- 2» а) При каком значении k прямая $y = kx + 3$ проходит через точку $A(2; 7)$?
б) При каком значении b прямая $y = 0,5x + b$ проходит через точку $A(-2; 3)$?

- 3» Найдите b , если прямая $y = 5x + b$ проходит через точку $C(-1; 2)$.

- 4» Запишите уравнение прямой по рисунку.



- 5» При каких значениях k и b прямая $y = kx + b$ проходит через точки $A(1; 8)$ и $B(-1; 2)$.
- 6» Найдите угловой коэффициент прямой, которая проходит через точки $A(1; 2)$ и $B(2; 3)$. Какой угол образует эта прямая с осью абсцисс?
- 7» Запишите уравнение прямой, проходящей через точки:
1) $A(2; 1)$ и $B(4; 5)$ 2) $A(1; 4)$ и $B(2; 1)$
3) $A(-1; 1)$ и $B(1; 5)$ 4) $A(2; -1)$ и $B(0; 3)$
- 8» 1) Проведите прямую через точки $A(m; 1)$ и $B(m; 3)$.
Какой координатной оси параллельна данная прямая?
Чему равны абсциссы точек данной прямой?
2) Проведите прямую через точки $C(1; n)$ и $D(4; n)$. Какой координатной оси параллельна данная прямая?
Изменяются ли ординаты точек, находящихся на данной прямой?
- 9» Постройте прямую, которая проходит через следующие точки и запишите уравнение прямой.
а) $C(1; 3)$, $D(1; -1)$ б) $C(-1; 2)$, $D(-1; 1)$
с) $A(3; 5)$, $B(-1; 5)$ д) $A(2; -2)$, $B(5; -2)$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Зная значения угловых коэффициентов прямых, можно сказать, параллельны или перпендикулярны данные прямые

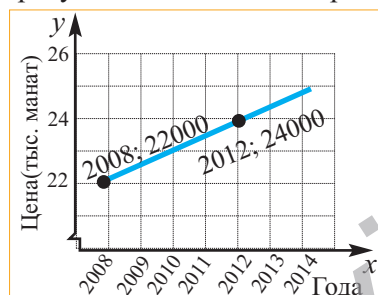
1. Если угловые коэффициенты двух прямых равны, то данные прямые параллельны. Например прямые, заданные уравнениями $y = 2x - 5$ и $y = 2x + 7$, параллельны

2. Если угловые коэффициенты удовлетворяют отношению $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, то прямые перпендикулярны.

Например прямые $y = 3x - 1$ и $y = -\frac{1}{3}x + 6$ перпендикулярны.

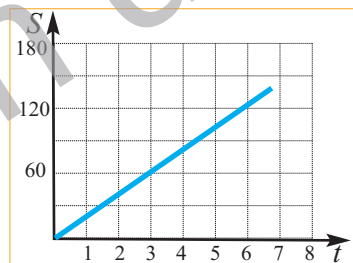
- 10** а) Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямой $y = -3x + 5$ и пересекает ось ординат в точке 4.
б) Запишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой $y = -\frac{1}{3}x - 2$ и пересекает ось абсцисс в точке -9 .
- 11** Прямая l проходит через начало координат и параллельна прямой, которая проходит через точки $(-2; 3)$, $(4; 5)$. Найдите угловой коэффициент прямой l .
- 12** Вершины четырёхугольника находятся в точках $A(-6; 1)$, $B(-2; -1)$, $C(0; 3)$, $D(4; 1)$. Докажите, что данный четырёхугольник является параллелограммом.

- 13** Завод установил цену автомобиля марки D в 2008 году в размере 22000 манат, в 2012 году – 24000 манат. Исследуйте график на рисунке, вычислите угловой коэффициент и дайте прогноз о цене автомобиля в 2025 году.



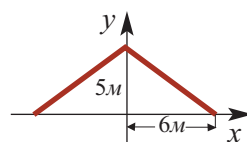
- 14** Вершины треугольника находятся в точках $A(5; 0)$, $B(0; 5)$ и $C(3; 6)$. Определите, является ли данный треугольник прямоугольным.
- 15** Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $C(1; 4)$ и $D(-1; 12)$. Найдите площадь треугольника, который образует данная прямая при пересечении с осями координат.

- 16** На графике представлена зависимость пройденного велосипедистом пути (S) и времени (t). Какие величины можно определить, вычислив угловой коэффициент прямой?



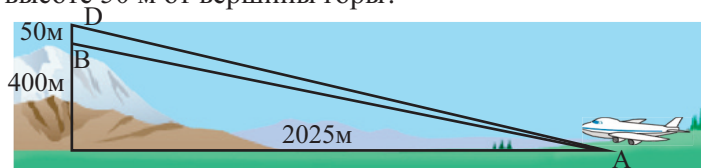
- 17** Зарплата Эльшана начисляется из расчёта 3,5 манат за час и он дополнительно получает 20 манат еженедельно. По какой формуле можно посчитать недельную зарплату Эльшана в зависимости от количества проработанных часов?

- 18** На рисунке показан вид спереди крыши, которая имеет симметричную форму. Составьте уравнение прямых соответствующих цветным линиям.



Обобщающие задания

- 1) Сколько градусов должен составлять угол подъёма самолёта, чтобы пролететь на высоте 50 м от вершины горы?

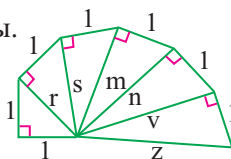


- 2) Диаметр бревна равен 45 см. Его хотят обтесать, как показано на рисунке, в форме прямоугольной призмы, передняя и задняя часть которой имеет форму квадрата. Какой наибольший размер может иметь квадрат?



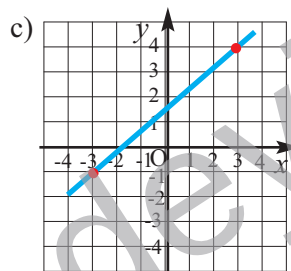
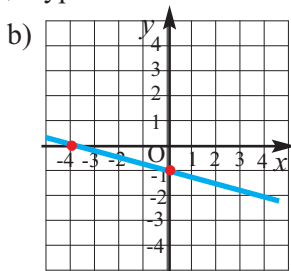
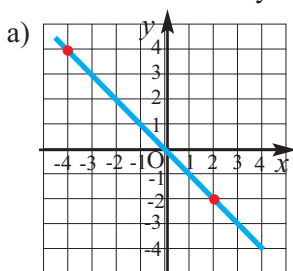
- 3) По данным рисунка найдите требуемые размеры.

- a) r b) s
c) m d) n
e) v f) z



- 4) 1) Начертите треугольник с углами 45° ; 45° ; 90° . Объясните устно и запишите последовательно способ построения.
2) Начертите треугольник с углами 30° ; 60° ; 90° . Объясните устно и запишите последовательно способ построения.

- 5) По графику определите угловой коэффициент прямой (по клеткам) и запишите соответствующее уравнение.



- 6) Найдите угловой коэффициент прямых, проходящих через две точки и определите какие из них параллельны, а какие перпендикулярны.

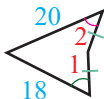
- a) $A(-3, 3)$ и $B(3, -1)$ b) $M(-2, -3)$ и $N(2, 3)$
 $C(-3, 1)$ и $D(3, 4)$ $E(-4, -3)$ и $F(4, 1)$

- 7) Учитель математики хочет убедиться, что вы хорошо поняли, что такое угловой коэффициент. Для этого даёт вам следующее задание: “Представьте, что вы вышли на воскресную прогулку и начали свой путь из точки с координатами $(3; 2)$. Если вы будете двигаться так: 2 единичных отрезков направо, 4 вниз, 3 налево, 6 вверх, 7 направо, то дойдёте до кассы канатной дороги. а) Какие координаты имеет точка, в которой расположена касса? б) Чему равен угловой коэффициент прямой, проходящей через точку в которой находитесь вы и точку где расположена касса?”

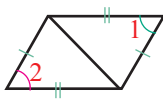
Обобщающие задания

- 8» По данным рисунка, в закрашенные круги, запишите соответствующие знаки $<$, $>$, $=$.

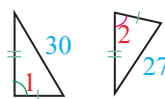
$$\angle 1 \text{ } \angle 2$$



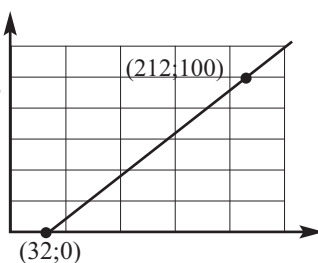
$$\angle 1 \text{ } \angle 2$$



$$\angle 1 \text{ } \angle 2$$

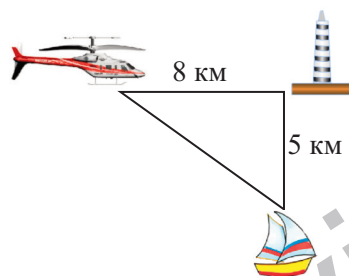


- 9» Вода замерзает при температуре 32°F или 0°C , и закипает при температуре 212°F или 100°C . Запишите уравнение прямой, которое показывает зависимость, между температурами по Фаренгейту и по Цельсию. **Указание. Используйте формулы:** $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ и $y - y_1 = k(x - x_1)$.

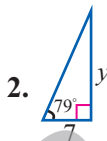
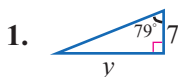


- 10» Если точки $(-4; 4)$, $(-1; -2)$, $(0; 8)$, $(3; 0)$ являются вершинами параллелограмма, то проверьте является ли данный параллелограмм прямоугольником.

- 11» Корабль, находящийся на расстоянии 5 км южнее башни маяка, подал сигнал SOS о помощи. Этот сигнал был передан вертолёту, который находится на расстоянии 8 км западнее башни. Под каким углом должен изменить направление движения вертолёт, чтобы достичь корабль?



- 12» При помощи каких видов движения треугольник 1 был преобразован в треугольник 2?



- 13» На какие отрезки делит биссектриса меньшего угла треугольника, со сторонами 18, 22 и 28, противоположную сторону?

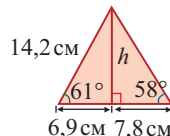
- 14» При помощи каких равенств можно найти высоту треугольника на рисунке?

$$\text{a) } \cos 58^\circ = \frac{h}{7,8}$$

$$\text{c) } \operatorname{tg} 61^\circ = \frac{h}{14,2}$$

$$\text{b) } \operatorname{tg} 58^\circ = \frac{h}{7,8}$$

$$\text{d) } \operatorname{tg} 61^\circ = \frac{h}{6,9}$$

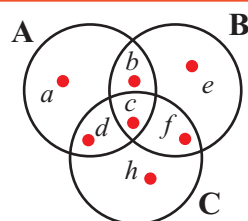


- 15» Начертите рисунок, соответствующий следующим данным. Лестница находится на расстоянии 2,5 м от стены под углом 55° . Конец лестницы находится на высоте окна. На какой высоте от земли находится окно?. Сколько метров составляет длина лестницы?

Действия над множествами

Практическая работа. Подготовьте из бумаги элементы для диаграммы Венна как показано на рисунке. Выполните задания нахождения пересечения и объединения множеств.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } (A \cup B) \cap C & \text{б) } (A \cap B) \cup C \\ (A \cup C) \cap B & (A \cap C) \cup B \\ (B \cup C) \cap A & (B \cap C) \cup A \end{array}$$

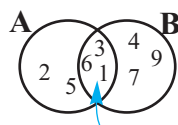


Количество элементов пересечения и объединения множеств

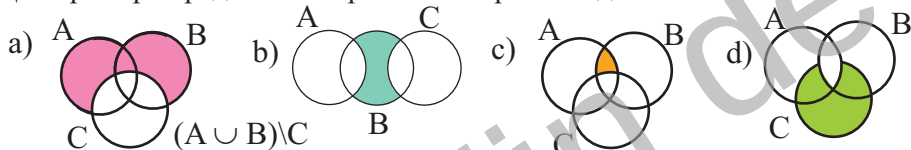
При $A \cap B \neq \emptyset$, количество элементов множества объединения равно сумме элементов в каждом отдельном множестве, уменьшенное на количество общих элементов. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Это правило называется правилом суммы.

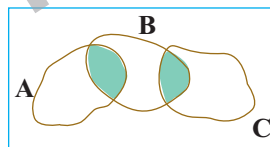
Пример. Пусть даны множества $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Обозначим количество элементов множества A через $n(A)$, а количество элементов множества B через $n(B)$. Тогда при $n(A) = 5$, $n(B) = 6$ и $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cup B) = 5 + 6 - 3 = 8$



- 1) Найдите количество элементов заданных множеств.
 $n(A) = 8, n(B) = 13$ $n(A) = 8, n(A \cup B) = 17$ $n(A) = 10, n(A \cup B) = 15$
 $n(A \cup B) = 18, n(A \cap B) = ?$ $n(A \cap B) = 4, n(B) = ?$ $A \cap B = \emptyset, n(B) = ?$
- 2) Если $n(A) = 12, n(B) = 7$, то чему равно: а) наименьшее значение $n(A \cup B)$?
 б) наибольшее значение $n(A \cup B)$?
- 3) Определите количество элементов множества $(B \setminus C) \cup (A \setminus C)$, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 4, 5\}$.
- 4) Результат действий над множествами представлен на рисунках в виде закрашенных частей. Какие действия были выполнены над множествами? Для примера представлено решение первого задания.



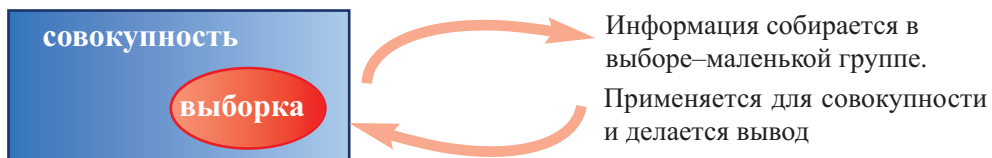
- 5) На рисунке представлен план трёх населённых пунктов А, В и С, площадью 12 км², 17 км² и 24 км² соответственно. Соседние пункты соединены друг с другом озёрами, общая площадь которых 9 км². Найдите общую площадь трёх участков.



- 6) Участники научной конференции могут говорить на английском, немецком и французских языках. На английском могут разговаривать 21 человек, на немецком - 12, а на французском 8. Английский и немецкий язык знают 6 человек, немецкий и французский 4 человека, английский и французский 3 человека. 2 человека умеют говорить на всех трёх языках. Сколько всего участников на конференции?

Совокупность, выбор

Если объекту присуще большой диапазон информации, то для его исследования эту информацию разбивают на маленькие части. Будем называть информацию, изменяющуюся в большом диапазоне, **совокупностью (или популяцией)**, а выбранную из совокупности маленькую группу – **выбором**. Исследование производится над выбором, а затем результаты применяются ко всей генеральной (популяции), делается вывод и даётся прогноз.



Качество проводимого исследования зависит от того, насколько правильно выбраны представители популяции. Например, исследуем для следующих случаев действительно ли данные примеры являются представителями популяции.

1) На фабрике изготавливаются чипы памяти. Для проверки качества из каждых 100 штук выбирают один чип.

Совокупность: все чипы, которые изготавливаются на фабрике.

Выбор: один чип из 100. Выбор представляет совокупность.

2) Учитель, для того, чтобы проверить как класс справился с домашним заданием, проверил работы трёх учеников, сидящих на первых партах.

Совокупность: количество всех учащихся в классе. **Выбор:** трое учеников, которые сидят на первых партах. В этом случае выбор не представляет совокупность.

Выбор может быть **простым случайным** или **системным случайным**.

1) Для обработки информации о новом парфюме, работники магазина раздают покупателям данный парфюм в маленьких флаконах, и спрашивают их мнение (простой случайный выбор).

2) Для проверки качества услуг, одного из каждых 5 человек, пришедших на обед в столовую, просят заполнить опросный лист (системный случайный выбор).

1» 1. Какой вариант выбора позволит вам дать наиболее точный прогноз об изучаемом объекте? Определите вид выбора.

1) Большая часть посетителей столовой являются студенты. Одному из каждых 15 студентов было предложено прикрепить к стене рисунки 4 любимых им овощей.

2) Для того, чтобы определить время, которое посетители столовой находятся на обеде, на квитанции одного из каждых 10 человек была сделана специальная метка.

3) Для определения места постройки нового футбольного стадиона опросили игроков одной команды.

4) Работники муниципалитета провели опрос, отражающий мнение населения по поводу того, как они относятся к выгулу собак в парке. Для этого они узнали мнения 50 человек, у которых есть собаки.

Сбор информации

- 2» Решите задачу на основе результатов проведённого исследования. Как вы считаете, сколько из всех студентов, которые учатся в вашем институте, ответили бы «да» при опросе? Решите задачу при помощи пропорции.

Совокупность: 2000 студентов

Выбор: 40 студентов

Вопрос: Если необходимость в уроках физкультуры в институте?

Результаты: «да» - 12 человек, «нет» - 28 человек

Итог: Большинство студентов считают, что в уроках физкультуры нет необходимости.

- 3» В городе 10 000 человек имеют право на голосование. До выборов среди 500 выбранных случайным образом человек был проведён опрос, по результатам которого, 180 человек ответили «нет». Можно ли по результатам опроса узнать сколько процентов всех избирателей хотели бы выбрать на новый срок действующего мера города?

- 4» В следующих заданиях определите совокупность (популяцию) и выбор. Определите, на сколько правильно выбраны представители популяции и ответьте на вопросы.

1) 800 учащихся лица одного из районов был задан вопрос «Есть ли у вас своя личная комната?». 75% из них ответило «да». Верно ли, что 75% всех учащихся в этом районе имеют свою личную комнату?

2) Среди населения одного из районов был проведён опрос, позвонив по телефону 1-му из каждых 10-ти домов. В результате опроса было установлено, что в каждых 2-х из 10 домов этого района имеется по два телевизора. Предположительно в скольких из 100 домов этого района имеется по два телевизора?

3) Среди 100 человек, выбранных по телефонному справочнику, был проведён опрос по поводу качества интернет услуг определённого провайдера. Недовольными оказались каждые 3 из 4-х. Сколько процентов пользователей недовольны услугами? Если к этому поставщику подключено 155 000 пользователей, то можно ли узнать, сколько из них недовольны услугами?

- 5» Придумайте тему для исследования. Определите совокупность и выбор. Придумайте примеры, как на случайный выбор, так и на системный. Обсудите, что ваш выбор действительно представляет совокупность.

Определите
совокупность

Сделайте
выбор

Сделайте вы-
воды на основе
выбора

По полученным ре-
зультатам сделайте
вывод о совокупности

Совокупность

Выбор

Результат

Прогноз

Сбор и представление информации

- 1 В различных частях леса случайным образом были выбраны и измерены длины обхвата стволов деревьев. Результаты были представлены в виде таблицы. Выполните следующие задания по данным таблицы и составьте гистограмму.

Деревья, выбранные из леса «Джейранкечмяз»		
Длина обхвата ствола (см)	Палочки	Количество
21 - 30	### III	8
31 - 40	### ### ### ### ### III	28
41 - 50	### ### ### ### ### ### ### ###	35
51 - 60	### ### ### I	16
61 - 70	### III	8
71 - 80	###	5

- 1) Сколько процентов всех выбранных случайным образом деревьев имеют обхват ствола 41-50 см?
- 2) Если общая площадь леса 550 га и на каждые 10 м² приходится 3 дерева, то сколько деревьев в лесу с обхватом ствола 71-80 см?
- 3) Как бы вы собирали и фиксировали информацию, если бы вам пришлось проводить данное исследование? Как вы думаете, почему в данном задании для сбора информации использовались палочки?

- 2 В таблице представлена информация о расходах одной семьи за месяц. Составьте круговую диаграмму по следующим правилам.

1. Определите часть диаграммы для каждой информации.

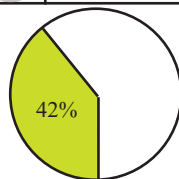
Например, 42% от 360°, составляет 0,42:

$$0,42 \cdot 360^\circ = 151,2^\circ \approx 151^\circ$$

Расход	% бюджета
Еда	42%
Одежда	13%
Транспорт	6%
Услуги	17%
Прочие	22%

2. Начертите круг и проведите его радиус. Постройте углы при помощи транспортира.

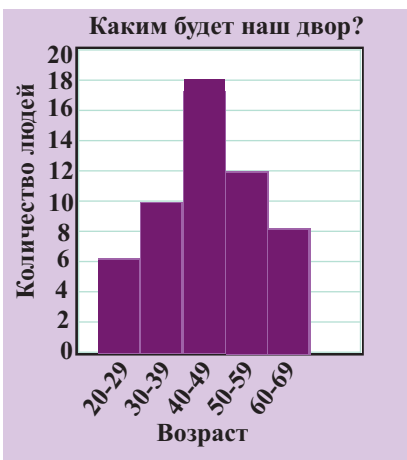
3. Каждой части запишите соответствующее данной части название и число.



- 1) Бюджет семьи за месяц составляет 850 манат. Расходы, каких двух частей вместе составляют $\frac{2}{3}$ части? Сколько манат составляют эти расходы?

- 2) В этом месяце семья израсходовала на еду на 15% больше предусмотренного. 10 % данной суммы было сэкономлено из денег, предназначенных на прочие расходы, а 5% - для покупки одежды. Данную таблицу дополните в тетради столбцом, в котором будет отражена данная сумма.

- 3 Жители многоквартирного дома собрались для того, чтобы вынести решение о том нужно или нет сносить автомобильную стоянку. Возраст и количество жильцов представлен в виде гистограммы на рисунке. Постройте круговую диаграмму, соответствующую данной гистограмме.



- Найдите общее количество жильцов, принимавших участие в прениях
 $6 + 10 + 18 + 12 + 8 = 54$
- Найдите отношение каждой возрастной группы к общему количеству участников **возрасте 20-29 лет:** $6 : 54 \approx 0,11$

3. Найдите часть круга, соответствующую данному отношению.
 $0,11 \cdot 360^\circ = 39,6^\circ \approx 40^\circ$

4. Представьте информацию в виде круговой диаграммы.

5. Результаты обсуждения представлены в виде таблицы.

В виде какого типа графика целесообразнее представить данные представленные в таблице?

Представьте в виде графика, который вы считаете наиболее подходящим в данной ситуации.

Возраст	Оставить	Снести
20-29	35%	65%
30-39	55%	45%
40-49	60%	40%
50-59	52%	48%
60-69	50%	50%

- 4 В личной библиотеке у Назима 250 художественных книг, 125 – научно-технических, 25 энциклопедий и словарь.

- Составьте круговую диаграмму соответствующую данным.
- Придумайте реальную жизненную ситуацию и представьте её в виде круговой диаграммы.

- 5 Выберите ответ, который вы считаете правильным. Обоснуйте ваше мнение.

1) Заведующий школьной столовой планирует провести исследование, для того чтобы узнать какие блюда нравятся больше всего. В какой группе нужно производить выбор, чтобы получить наиболее правильную информацию?

- a) учителей b) школьников, обедающих в столовой
 c) школьников, которые приносят еду из дома d) администрации школы

2) Профсоюз для защиты прав детей планирует запустить проект, в котором они хотят узнать мнения работающих родителей. В какой из возрастных групп более целесообразно провести исследование?

- a) 20-40 лет b) 40-60 лет c) пенсионный возраст

Обработка информации, зависящей от двух параметров

Во многих случаях при исследовании одного объекта приходится анализировать два вида информации. Эту информацию удобнее представить в виде таблицы.

Приведём пример в котором будет показано правило составления таблицы для информации, зависящей от двух переменных.

Пример 1. Между 100 работниками фирмы проводился опрос по поводу того, в какой из летних месяцев и куда они собираются поехать. Результаты исследования представлены в виде таблицы, состоящей из двух параметров.

1. Параметры: страна и месяц.
2. Один из параметров – месяца, отображены в строках, другой – страны, отражены в столбцах.
3. В ячейке, где пересекается столбец и строка размещено число, зависящее от двух параметров. Например, число 18 в таблице, показывает количество людей, которые хотят провести отпуск в Турции.
4. Числовая информация об общем количестве за каждый месяц и в каждую страну записывается в ячейке «всего».

		Страна			Количество отдыхающих по месяцам:
		Турция	Страны Европы	Россия	
Месяцы	Июнь	18	6	5	29 ← Июнь
	Июль	10	2	19	31 ← Июль
	Август	15	15	10	40 ← Август
	Всего	43	23	34	100
Количество отдыхающих за 3 месяца в каждой стране:		↑	↑	↑	
		Турция	страны Европы	Россия	

1. Какой процент опрошенных хочет взять свой отпуск в июне?
2. Какой процент опрошенных хочет провести свой отпуск в Турции?
3. Можно ли, по данным опроса определить, приблизительно сколько из 1250 человек хотят провести отпуск в Европе?

- 6** 1. Среди мужчин и женщин, которые сдают экзамен для получения водительского удостоверения был проведён опрос о том, смогли ли они набрать на первом экзамене достаточное количество баллов. Опрос проводился среди 50-ти человек. Всего в опросе принимали участие 22 женщины, из которых 16 не смогли получить удостоверение в первый раз. Из всех привлечённых к опросу мужчин, 18 сдали экзамен с первого раза. Составьте таблицу, зависящую от двух параметров.

Параметры:

1. Гендер – мужчины, женщины
2. Первый экзамен - получили удостоверение, не получили.

Сбор и представление информации

Информацию, зависящую от двух параметров, можно представить в виде разделённого на части барграфа.

Пример 2. Среди 54 учащихся был проведён опрос о том, хотят ли они заниматься спортом или музыкой.

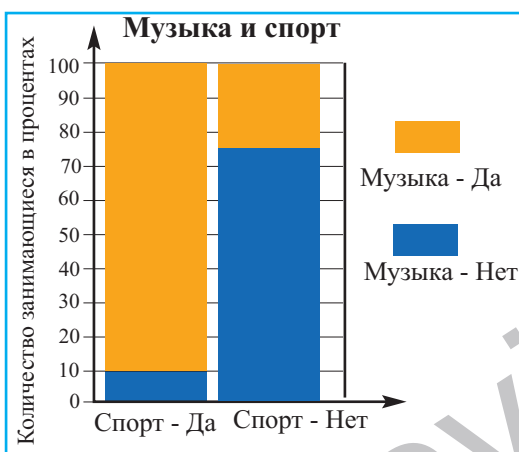
Ученики занимающиеся музыкой и спортом

		Музыка		
		да	нет	Всего
Спорт	да	27	3	30
	нет	6	18	24
	Всего	33	21	54

1) Сколько процентов, по результатам опроса, занимаются музыкой, а сколько - не занимается спортом?

2) Сколько процентов учащихся занимаются спортом, сколько музыкой?

3) Соответствующую информацию можно представить в виде барграфа в процентах, как показано на рисунке. Представьте цветные части на барграфе зная, что они соответствуют данным в таблице.



7 В школе было проведено исследование, где изучали вопрос о том, кто помогает учащимся начальных классов при выполнении домашнего задания родители или специальные педагоги.

	Родители - да	Родители - нет	Всего
Специальные педагоги – да	24	16	
Специальные педагоги - нет	48	12	
Всего			100

1) Сколько процентов родителей, среди учащихся которые выполняют домашнее задание со специальным педагогом, не занимаются с детьми?

2) Сколько процентов родителей учащихся сами занимаются со своими детьми?

3) Заполните таблицу и постройте барграф как в задании 1.

Диаграмма рассеяния

Диаграмма рассеяния или точечная диаграмма используется для демонстрации наличия или отсутствия взаимосвязи между двумя величинами. Взаимосвязь двух случайных величин называется **корреляцией**. Суть её заключается в том, что при изменении значения одной переменной происходит закономерное изменение другой переменной.

При **положительной корреляции** возрастание одной переменной вызывает увеличение другой.

Отрицательная корреляция имеет место, когда увеличение одной переменной связано с уменьшением другой.

Возможна также ситуация **отсутствия корреляции**.

Пример 1

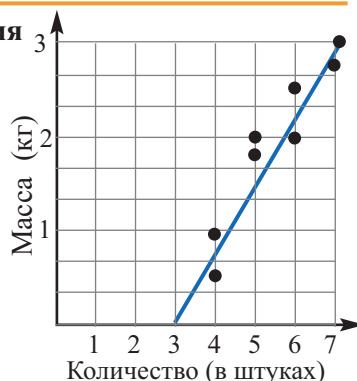
Положительная корреляция

На рисунке показана диаграмма, которая показывает зависимость между количеством гранатов в связке и их массой.

Диаграмма рассеяния построена с помощью данных из таблицы. На оси абсцисс показано количество (в штуках), на оси ординат масса (кг) каждой связки. Из диаграммы видно, что одинаковое количество граната, может иметь разную массу. Иначе говоря, между этими переменными нет однозначной зависимости. Но при этом по диаграмме видно,

что с увеличением количества граната, увеличивается и масса связки.

Количество (в штуках)	Масса (кг)
4	0,5
4	1
5	1,8
5	2
6	2
6	2,5
7	2,8
7	3

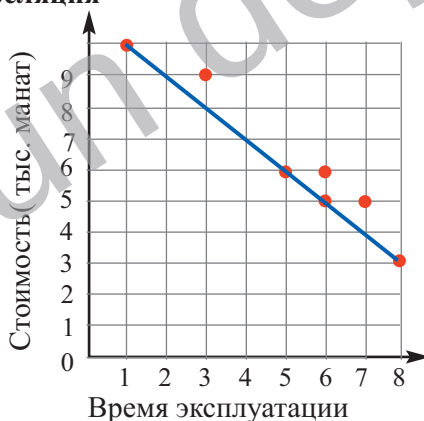


Пример 2

Отрицательная корреляция

В таблице и на диаграмме представлена зависимость между временем эксплуатации автомобиля и его стоимостью.

Время эксплуатации	Стоимость (тыс. манат)
1	10
3	9
5	6
6	6
6	5
7	5
7	4
8	3

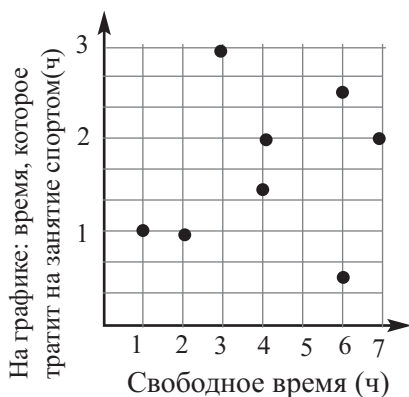


Чем больше срок эксплуатации автомобиля, тем меньше его стоимость. Это за-
висимость между двумя переменными является отрицательной корреляцией.

Пример 3

В таблице и на диаграмме представлено время, которое тратит Насиб на занятие спортом и свободное время.

Зависимости нет (корреляция отсутствует)

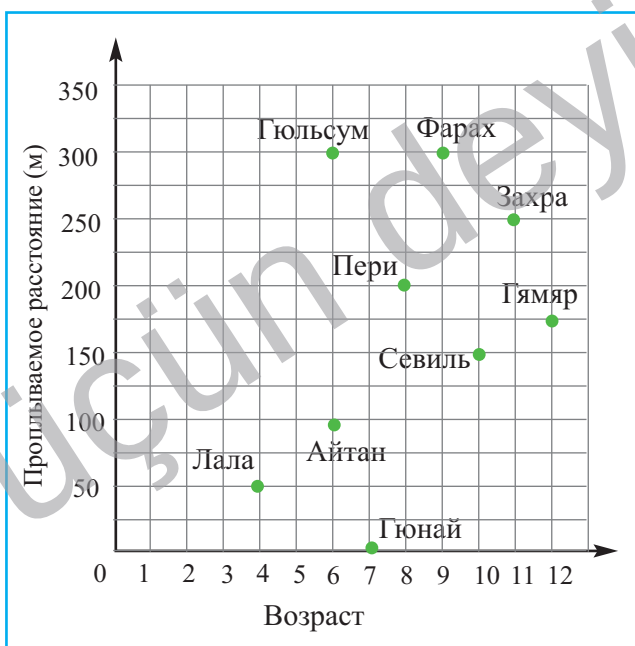


Свободное время	Время, которое занимается спортом
1	1
2	1
3	3
4	2
4	1,5
6	0,5
6	2,5
7	2

Измените данные в таблицах из примеров 1, 2 и 3 и постройте точечные диаграммы.

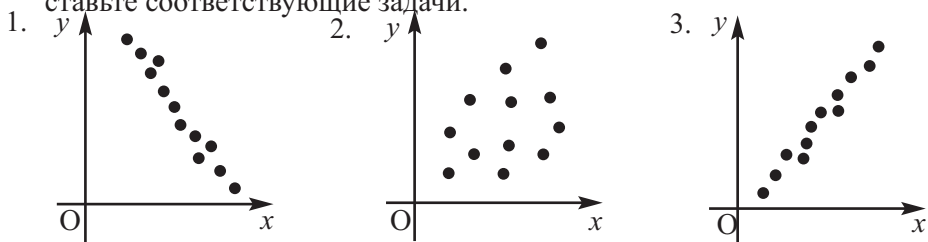
1 На точечной диаграмме представлена зависимость между возрастом девочек и расстоянием, которое они проплывают на тренировке. Ответьте на вопросы по диаграмме.

- 1) Кто из проплывших расстояние 300 м младше всех по возрасту?
- 2) Кто не умеет плавать?
- 3) Кто из девочек младше всех по возрасту?
- 4) Кто из шестилетних пловчих показывает лучшие результаты?
- 5) Кто может проплыть дальше: Захра, Лала или Пери?
- 6) Есть ли связь между возрастом девочек и расстоянием, которое они могут проплыть?

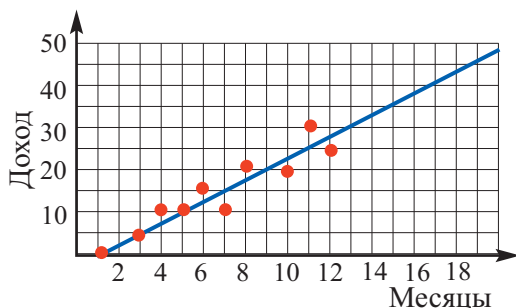


Обобщающие задания

- 1» Определите вид корреляции для каждой диаграммы рассеивания и составьте соответствующие задачи.



- 2» На диаграмме рассеивания представлен доход фирмы за первый год деятельности. Верно ли, что по данной диаграмме можно найти наименьшую сумму, которую может получить фирма на 16-ом месяце существования? Если да, то найдите эту сумму.



- 3» В магазине, в связи с сезонной распродажей, была обработана и представлена информация об оставшемся товаре в виде таблицы. Дополните таблицу и выполните задания. 1) Сколько спортивных маек зелёного цвета осталось в магазине?

2) Рубашки какого размера правильнее было бы заказать для следующего сезона?

3) Рубашки сложены друг на друга случайным образом. Найдите вероятность, что произвольным образом взятая рубашка будет размера L и синего цвета.

		Размер					
Цвет		S	M	L	XL	XXL	всего
	Белый	3	1	2	1	3	
	синий	2	0	2	1	2	
	зеленый	3	1	3	0	2	
	чёрный	1	0	1	0	1	
	всего						

- 4» Учащиеся 8-го класса должны выполнить два тестовых задания по теме процент и отношения. В таблице представлена информация о баллах, которые получили 10 учащихся.

1) Сколько учащихся показали результат второго теста минимум на 5% больше результата первого?

2) Сколько процентов от максимального балла набрал ученик, с самым высоким баллом за тест?

3) Представьте эти результаты, обобщённые в целом как плохие или хорошие, в виде среднего арифметического, моды и медианы.

Имя	Наивысший возможный балл - 50	
	1-ый тест	2-ой тест
Али	38	35
Лала	34	38
Айтан	42	46
Аян	26	30
Иса	30	28
Самир	18	19
Наиля	21	24
Керим	45	40
Тахир	48	44
Гюнель	38	36

Меры центральных тенденций и наибольшая разность

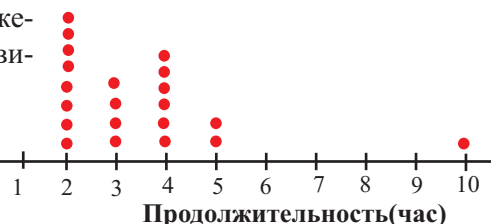
Исследование. На диаграмме отражена информация о том, сколько времени ежедневно учащиеся проводят перед телевизором.

1 • = 1 учащийся

1) Найдите среднее арифметическое, моду, медиану и наибольшую разность.

2) Найдите среднее арифметическое, не используя данные соответствующие 10 - ти часам.

3) По диаграмме определите наиболее плотный интервал с информацией, пустые интервалы и интервалы отклонения.



Меры центральных тенденций и наибольшая разность

Среднее арифметическое, мода и медиана являются мерой центральных тенденций и вместе с наибольшей разностью широко применяются в статистике. Для представления статистических данных правильное использование этих данных играет очень важную роль. Какие статистические показатели наиболее подходят для применения в различных случаях?

Среднее арифметическое: нет резкого отклонения

Медиана: есть резкое отклонение

Мода: есть много повторяющейся информации

Наибольшая разность: при определении интервала изменения информации

1» Обоснуйте, верны ли выбранные статистические меры.

1) Возраст 6 человек в одной группе : 11,14,12,12,11,32. **Медиана.**

2) Доход за 6 месяцев(в манатах) : 325, 320, 300, 325,325,4000. **Мода**

3) Пробег, который совершил Самир за 5 дней: 3,5,4,5,6. **Среднее арифметическое.**

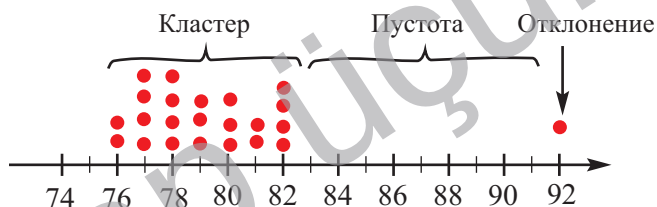
Кластер, пустота, отклонение

Иногда информация собирается в маленький интервал, который называется **кластером**.

Интервал, в котором нет информации, называется **пустым интервалом**.

Если информация очень сильно отличается от среднего значения, то такое интервал называется **интервалом отклонения**.

Баллы набранные учениками



Например, по диаграмме, много учеников набрали баллы в промежутке от 76 до 82. Этот интервал называется кластером. Интервал от 83 до 91 называется пустым интервалом, а 92 называется интервалом отклонения.

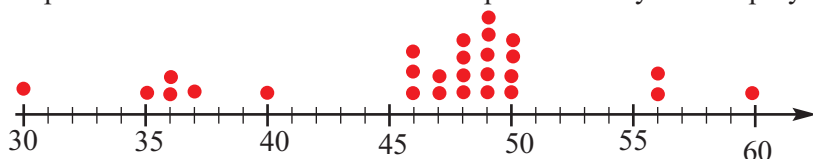
Меры центральных тенденций и наибольшая разность

- 2» Ниже представлено количество дней, которые пропустили учащиеся класса во время учёбы за год.

4, 3, 2, 5, 4, 6, 3, 5, 7, 5, 18, 4, 3, 6, 3, 6, 2, 5

Составьте диаграмму, расположив числовые данные, как было показано выше. Найдите соответствующие значения : а) среднего арифметического, моды и медианы; б) кластера, пустого интервала и интервала отклонения.

- 3» На диаграмме представлен возраст сотрудников фирмы. По диаграмме найдите средний возраст сотрудников. Определите средний возраст в интервале с наибольшей плотностью. Сравните полученные результаты.



- 4» Ниже представлена информация о том, сколько часов работал каждый работник в течении недели.

25, 36, 18, 43, 40, 38, 39, 40, 16, 30, 24, 29, 30, 45, 42, 15, 20, 28

- а) Составьте таблицу, распределив данные по интервалам 16-20, 21-25, 26-30, 31-35, 36-40, 41-45; б) В какой интервал попадает медиана? с) В какой интервал попадает среднее арифметическое?

- 5» 1) Для каждого отдельного случая в письменной форме определите, изменяется или нет медиана, если она равна 16 и добавляется к следующим числам. а) 15 и 17 б) 14 и 18 с) 18 и 21 д) 13 и 12

- 2) Для каждого отдельного случая в письменной форме определите, изменяется или нет среднее арифметическое, если для следующих чисел оно равно 16. а) 15 и 17 б) 14 и 18 с) 18 и 21 д) 13 и 12

- 6» В таблице представлена информация о времени, за которое некоторые птицы выводят птенцов (время инкубации)

- а) Найдите для периода инкубации-среднее арифметическое, моду, медиану и наибольшую разность.

- б) Заполните таблицу, найдя разность между средним арифметическим и временем инкубации.

- с) Для сравнения времени, за которое выводят птенцов страус и голубь, используйте наибольшую разность.

Название птицы	Период инкубации (дней)	Разность между средним арифметическим и периодом инкубации
Курица	21	
Утка	28	
Гусь	28	
Страус	40	
Попугай	24	
Фазан	24	
Голубь	15	
Перепел	19	
Аист	34	
Индюк	28	

Вычисление вероятности

Экспериментальное определение вероятности

Экспериментальная вероятность находится на основе повторяющегося эксперимента.

$$P(\text{события}) = \frac{\text{Число испытаний, в которых это событие наступило}}{\text{Число всех испытаний}}$$

Пример 1. На барграфе представлены результаты при бросании одной зары 50 раз. Чему равна вероятность, что при бросании зары выпадет нечётное число.

По барграфу видно, что 10 раз выпала «1», 5 раз – «3», 9 раз – «5». Количество событий, при котором выпало нечётное число $10+5+9=24$ количество всех событий: 50

$$P(\text{нечётное число}) = \frac{24}{50} = \frac{12}{25}$$

Вероятность того, что выпадет нечётного числа, которая получена в результате эксперимента равна: $\frac{12}{25}$, 0,48 или 48%.



Пример 2. Экспериментальную вероятность можно использовать для прогнозирования.

В марте месяце из 10 последних дней 2 были дождливыми. При сохранении тенденции, можно ли определить вероятность дождливых дней в апреле? Сначала найдём экспериментальную вероятность, полученную в результате наблюдения.

$$P(\text{дождь}) = \frac{\text{Число произошедших событий}}{\text{Число всех испытаний}} = \frac{\text{Дождливые дни}}{\text{Все наблюдаемые дни}}$$

$$P(\text{дождь}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{В апреле} \quad 30 \cdot \frac{1}{5} = 6 \text{ количество ожидаемых дождливых дней}$$

Теоретическая вероятность

$$P(\text{события}) = \frac{\text{Число благоприятных исходов события}}{\text{Число всех равновозможных событий}}$$

Численное значение вероятности случайных событий расположено в интервале от 0 до 1. Вероятность может быть выражена в виде обыкновенной дроби, десятичной дроби или процента. Сумма вероятностей, что событие произошло и не произошло равна 1.

$$P(\text{событие A произошло}) + P(\text{событие A не произошло}) = 1$$



Вычисление вероятности

Использование теоретической вероятности

Пример 3. На колесе фортуны три сектора с призом в 1000 манат. Шанс, что при вращении колеса, выпадет выигрышный сектор равен $\frac{1}{10}$. Сколько всего секторов на колесе?

Решение: обозначим общее количество секторов через n .

$$P(\text{приз}) = \frac{\text{количество секторов с призом}}{\text{общее количество секторов}} = \frac{1}{10}; \quad \frac{1}{10} = \frac{3}{n}; \quad n = 30$$

Сравнение теоретической и экспериментальной вероятностей.

Пример 4. На барграфе представлена информация о событиях, которые происходят при бросании одной зары. Найдите вероятность выпадения нечётного числа.

$$P(\text{нечётное число}) = \frac{\text{количество случаев выпадения нечётного числа}}{\text{количество испытаний}} = \frac{148}{300} = \frac{37}{75} \approx 0,49$$



количество испытаний

Сравните теоретическую и экспериментальную вероятности.

Теоретическая вероятность:

$$P(\text{нечётное число}) = 50\%$$

Экспериментальная вероятность:

$$P(\text{нечётное число}) = 49\%$$

Экспериментальную вероятность сравним с результатом в Примере 1.

При увеличении количества экспериментов вероятность стремится к теоретической вероятности. Количество экспериментов увеличилось с 50 до 300, вероятность возросла с 48% до 49% и ещё больше приближается к теоретической вероятности.

- 1>> Используя барграф примера 4, найдите экспериментальную вероятность выпадения числа меньше 4. Сравните полученную вероятность с теоретической вероятностью.
- 2>> Для праздника Новруз Лала случайным образом выбрала 4 из 50 открыток, причём 2 открытки были с цветами. Верно ли, что по этим данным можно узнать сколько всего открыток с цветами есть среди всех 50?
- 3>> В рекламном шоу, которое было проведено фирмой, выпускающей соки, на этикетке каждой коробки были размещены денежные призы и подарки. Вероятность денежного выигрыша $\frac{3}{10}$. Сколько всего коробок с соком было разыграно, если известно, что в 9 из них были призы?
- 4>> Проведите эксперимент по подбрасыванию двух монет и подсчитайте, сколько раз монеты упали лицом на цифру, а сколько раз на карту. Заполните в тетради таблицу.

Теоретическая вероятность	Количество испытаний	Ожидаемый результат	Действительный результат	Экспериментальная вероятность
	20			

Число возможных событий

Число возможных событий

Если событие произошло в результате двух или нескольких элементарных событий, то это событие является сложным (составным) событием. Например, одновременное подбрасывание 2 монет, является сложным событием. Количество возможных результатов сложных событий можно найти при помощи: 1) разветвляющейся диаграммы; 2) составлением списка; 3) таблиц; 4) правила умножения.

Правило умножения: если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b можно выбрать m способами, то упорядоченную пару (a, b) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Пример 1. При помощи таблицы.

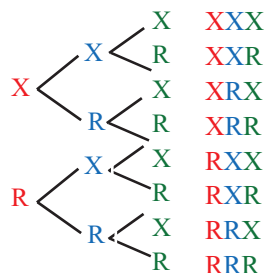
Если подбросить одновременно монету и зару, то количество возможных событий - 12. **По правилу умножения имеем:** при подбрасывании монеты возможно 2 события ($m = 2$), при подбрасывании зары - 6 ($n = 6$).

Количество возможных событий в этом случае равно: $2 \cdot 6 = 12$.

	1	2	3	4	5	6
Монета	1R	2R	3R	4R	5R	6R
Заря	1X	2X	3X	4X	5X	6X

Пример 2. При помощи построения разветвляющейся диаграммы. Если подбросить одновременно 3 монеты, то количество возможных событий - 8.

По правилу умножения имеем: для каждой монетки количество возможных событий равно 2. тогда для трёх монеток - $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$



- 1) Найдите количество возможных событий при вращении колес, изображённых на рисунке.
- 2) Найдите вероятность того, что стрелка одного колеса остановится на звёздочке, а другого - на цифре 5.



- 2) Вычислите по правилу умножения количество возможных вариантов выбора для музыкального центра.

Музыкальный центр MP3	
Память	8 GB, 12 GB, 16 GB, 24 GB
Цвет	серебряный, золотой, чёрный, коричневый

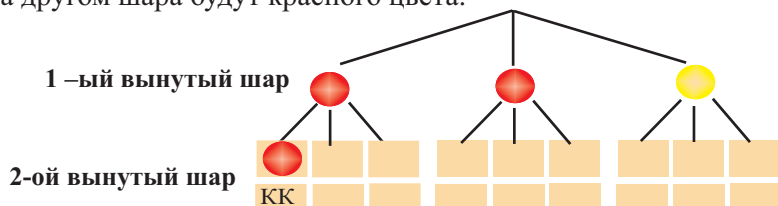
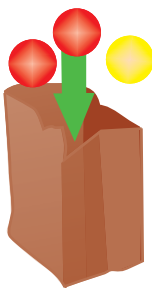
- 3) Даны цифры 0,1,2,3,4. Сколько можно составить: А) четырёхзначных чисел; б) четырёхзначных чисел, все цифры которых различны; с) четырёхзначных чисел, хотя бы две цифры одинаковы?
- 4) В классе 15 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?
- 5) Найдите вероятность, что одновременно произойдут следующие события: зара выпадет цифрой 5 вверх, а стрелка на колесе остановится в красной области. Найдите вероятность того, что это событие не произойдёт.



Зависимые и независимые события

Эксперимент 1

В мешке 2 красных и один жёлтый шар. Представьте, что вы вытаскиваете два шара друг за другом. Каждый раз фиксируете цвет шара и снова кладёте его в мешок. Заполните разветвляющуюся диаграмму при помощи главных букв в названии цвета. Найдите вероятность, что оба вынутых друг за другом шара будут красного цвета.



Зависит ли цвет второго вынутого шара от цвета первого вынутого шара?

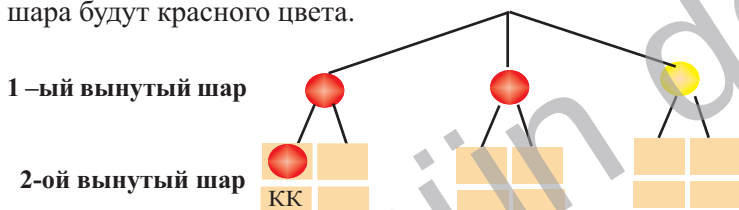
Независимые события

Если результат появления одного события не влияет на результат появления другого события, то такие **события называются независимыми**. Например, подбрасывая зару и монету одновременно, событие на какую из сторон упадёт зару, не зависит от события, на какую из сторон упадёт копейка.

Вероятность двух и более независимых событий равна произведению вероятностей каждого события и записывается как $P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B)$ или $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Аналогичным образом записывается и вероятность 3-х независимых событий. $P(A, B \text{ и } C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Эксперимент 2

Представьте себе, что опять в мешке есть 2 красных и 1 жёлтый шар. Каждый раз вы вытаскиваете из мешка шар и фиксируете его цвет, но при этом не возвращаете шар в мешок. Заполните разветвляющуюся диаграмму элементарных событий, при помощи первых букв соответствующих цветов. Найдите вероятность, что оба вынутых друг за другом шара будут красного цвета.



Зависит ли цвет шара, который был вытащен во второй раз, от цвета шара, который вытащили в первый раз?

Зависимые события

Если результат появления одного события влияет на результат появления другого события, то такие события называются **зависимыми**. Например, если из 100 карт в мешке 10 подарочные, то результат того, что в первой попытке выпадет карта с подарком, влияет на результат других попыток. Вероятность двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности события A и вероятности события B после того, как произойдёт событие A .

$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(\text{события } B \text{ после того, как произошло событие } A)$

Зависимые и независимые события

Пример 1. Независимые события. Одновременно подбрасывается монета достоинством в 20 гяпик и зара. Найдём вероятность события, что при подбрасывании, монета упадёт вверх картой, а на заре при этом появится простое число. Вероятность появления карты при бросании монеты равна:



$P(\text{к.}) = \frac{1}{2}$, а выпадения простого числа (2, 3, 5). при подбрасывании зары равна: $P(\text{пр.}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. $P(\text{к. и пр.}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Т. е. вероятность появления карты и простого числа равна $\frac{1}{4}$, 0,25 или 25 %.

Пример 2. Зависимые события. Участники игры отбираются случайным образом из 100 участников телешоу. 5 родственников и 9 школьных товарищей Теймура наблюдают за программой в студии. Какова вероятность, что при отборе в первый раз выберут одного из родственников Теймура, а во второй раз – его школьного товарища?

Вероятность выбора родственника при первом отборе:

$$P(\text{родственник}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Вероятность выбора друга при втором отборе: $P(\text{друг}) = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$

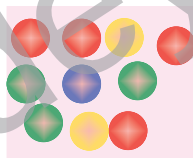
Применим формулу нахождения вероятности зависимых событий.

$P(\text{родственник и друг}) = P(\text{родственник}) \cdot P(\text{друг после выбора родственника})$

$$P(\text{родственник и друг}) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{220}$$

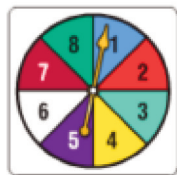
- 1** Какие из следующих событий являются зависимыми, а какие независимыми? а) При подбрасывании два раза подряд металлической монеты, она оба раза упала картой вверх; б) При вытаскивании из колоды двух карт одну за другой (не возвращая их на место) обе карты окажутся одинакового цвета.

- 2** В мешке имеется 10 шаров. Из них 4 красных, 3 зелёных, 2 жёлтых и 1 синий. Вы вытаскиваете друг за другом два шара. Найдите вероятность при следующих условиях. В каком случае события зависимые, а в каком независимые?



- 1) Не возвращая $P(\text{красный и зелёный})$
- 2) Возвращая $P(\text{жёлтый, жёлтый})$
- 3) Не возвращая $P(\text{красный и синий})$
- 4) Возвращая $P(\text{зелёный и красный})$
- 5) Не возвращая $P(\text{синий и зелёный})$
- 6) Возвращая (красный, красный)

- 3** Одновременно начинают крутить два колеса фортуны. Найдите вероятность, что стрелка обеих колёс остановится на нечётных числах.

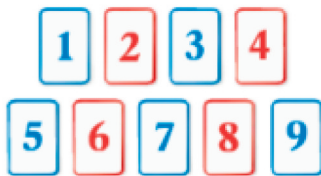


Зависимые и независимые события

- 4» При розыгрыше призов сначала попытка была предоставлена Фидан. Найдите вероятность того, что она выиграет билет в кино. После чего попытка была предоставлена Улькер. Какова вероятность, что и Фидан и Улькер выиграют билеты в кино?

Призы	Количество
Билет в кино	4
Спортивная рубашка	8
Музыкальные CD диски	5

- 5» На столе лицом вниз разложены карты, на которых написаны следующие числа. Сначала берётся одна карта, затем другая. Найдите вероятность того, что : а) на обеих картах чётные числа; б) на одной из карт число больше 6, а на другой – меньше 6.



- 6» В таблице представлены результаты, которые получены при вращении 50 раз рулетки, на которой написаны буквы A,B,C,D,E.

Буквы	Частота
A	8
B	12
C	10
D	9
E	11

- а) Найдите экспериментальную вероятность каждого события. 1) $P(E)$; 2) $P(A \text{ или } B)$; 3) $P(\text{не остановится на } D)$ 4) $P(\text{гласная})$; 5) $P(\text{не остановится на } A \text{ или на } C)$; б) Чему равна теоретическая вероятность того, что стрелка остановится на букве E? Сравните теоретическую вероятность с экспериментальной.

- 7» Лейла, Гюнель, Улькер и Гюнай хотят определить, кто из них займётся уборкой книг на полке, при помощи бросания зары. У кого выпадет большее количество очков, тот и будет заниматься уборкой. Если при этом на заре выпадет равное количество очков, то уборкой займутся вместе. Гюнель, Улькер и Гюнай набрали соответственно 5, 3 и 4 очка. 1) Какова вероятность, что полку: а) будет убирать Лейла; б) не будет убирать Лейла? 2) Какова вероятность, что полку будут убирать Лейла и Гюнель вместе?

- 8» Учитель должен случайным образом разделить детей на группы и выбрать лидера каждой группы. Шанс Лейлы, что она станет лидером в своей группе равен $\frac{1}{15}$. Вероятность, что лидером группы окажется и Лейла и её близкая подруга равна $\frac{1}{165}$.

- 1) Найдите вероятность, что лидером окажется подруга Лейлы? 2) Сколько учеников в классе, где учится Лейла?

- 9» На одной стоянке из 200 автомобилей каждые 120 имеют неисправность световой системы, а на другой из 150 автомобилей каждые 80 имеют неисправность мотора. Из каждой стоянки выбираются по одному автомобилю. Найдите вероятность, что из двух выбранных случайным образом автомобилей один будет иметь неисправность световой системы, а другой - мотора.

- 10» **Задание открытого типа.** В мешке 9 шаров разного цвета. Из мешка случайно берут подряд два шара (без возврата). Придумайте такое событие в задаче, чтобы его вероятность была равна $\frac{1}{6}$.

Обобщающие задания

- 1» Найдите количество всех наборов, которое можно выбрать по таблице, если набор будет состоять из одного жидкого блюда, одного основного блюда и одного десерта.

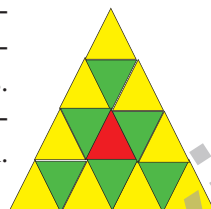
Жидкое блюдо	Основное блюдо	Десерт
Суп из курицы Суп из мяса	Котлеты Жареная рыба Долма	Кята Пахлава

- 2» В таблице представлена информация о книгах в школьной библиотеке. Найдите вероятность следующих событий:

- 1) Случайным образом взятая книга будет в твёрдом переплёте, цветная и с рассказами;
- 2) Случайным образом взятая книга чёрно - белая и с поэзией;
- 3) Случайным образом взятая книга будет в мягком переплёте.

		Цветная	Чёрно-белая
Твёрдый переплёт	Рассказы	120	350
	Поэзия	90	230
Мягкий переплёт	Рассказы	450	500
	Поэзия	220	280

- 3» Треугольную мишень поделили на конгруэнтные треугольники и раскрасили как показано на рисунке. Стрелок выстрелил два раза и каждый раз попал в цель. Перечислите все возможные варианты по цвету треугольников, в которую попала пуля в 1-ом и 2-ом выстрелах. Найдите вероятности: а) Р (жёлтый, жёлтый); б) Р (жёлтый, красный); в) Р (жёлтый, зелёный)



- 4» Анар не знает ответа на три вопроса в тесте и выбирает их случайным образом. В каждом вопросе есть 4 варианта ответов. Какова вероятность, что Анар ответил: а) верно на все три вопроса; б) неверно на все три вопроса; в) верно на один вопрос и неверно - на два других; д) верно на два вопроса и неверно на - один?

Дайте и вы ответы на эти вопросы.

- 1) В каком году впервые была провозглашена независимость Азербайджанской Республики?

а) 1928 б) 1905 в) 1918 д) 1920

- 2) Какие посты не занимал Фатали Хан Хойский?

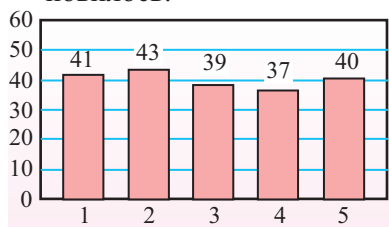
а) министр финансов АДР
б) министр иностранных дел АДР
в) министр внутренних дел АДР
г) депутат государственной думы России

- 3) Кто является композитором романса «Страна моя»?

а) Джахангир Джахангиров б) Асаф Зейналлы
в) Ниязи г) Фикрет Амиров

Обобщающие задания

- 5) 1) Колесо фортуны было прокручено 200 раз и результаты полученные при этом представлены на барграфе. Сравните по данным результатам теоретическую и экспериментальную вероятность того, что колесо остановилось:



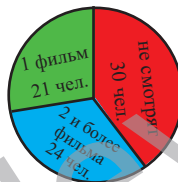
- 1) на цифре 5;
- 2) на цифре 2;
- 3) на цифре больше 3.



Можете ли вы при помощи теоретической или экспериментальной вероятности дать прогноз количество результатов, при которых стрелка остановится на цифре 3, если будет произведено 20000 испытаний?

- 6) Найдите количество элементов множеств по следующим данным.
- а) Найдите $n(A \cap B)$, если $n(A \setminus B) = 6$, $n(B \setminus A) = 7$, $n(A \cup B) = 17$.
 - б) Найдите $n(B \setminus A)$, если $n(A) = 10$, $n(A \cap B) = 3$, $n(A \cup B) = 18$.
- 7) Какие пары чисел показывают вероятность того, что событие произошло и не произошло?
- 1) $\frac{5}{8}$ и $\frac{3}{8}$
 - 2) $\frac{4}{6}$ и $\frac{1}{3}$
 - 3) 0,875 и $\frac{1}{8}$
 - 4) 0,65 и 0,55

- 8) На рисунке представлена диаграмма результатов опроса среди случайно выбранных учащихся школы на вопрос «Сколько фильмов вы смотрите за неделю?»
- а) Сколько учащихся школы смотрят в неделю 1 фильм, если всего их 1500 человек?
 - б) Найдите вероятность, что среди выбранных случайным образом 75 учащихся двое смотрят только один фильм в неделю, а остальные 2 и более фильма?



- 9) Сначала, не заглядывая в коробку, один карандаш вытащил Аслан, а после него Эмин. Найдите вероятность, что оба карандаша окажутся синего цвета.



- 10) Среднее арифметическое чисел равно 14. Добавьте ещё два числа, так, чтобы при этом среднее арифметическое не изменилось.
- 11) Зарплата работников одного магазина равна 250 ман., 200 ман., 240 ман. и 2500 ман. Сколько в среднем составляет заработная плата работников магазина? Является ли найденный вами результат верным при оценке зарплаты всех работников?

Обобщающие задания по разделам

- 1» На круговой диаграмме представлена разница, между ценой по которой покупали, и ценой по которой продают сумки в магазине. Какую прибыль получают от продажи одной сумки, если её купили по цене 80 манат.



- 2» Решите методом выделения полного квадрата.

$$1) x^2 + 17x - 200 = 13x - 60$$

$$5) 2x^2 - 12x + 14 = 0$$

$$2) x^2 + 1,8x - 0,4 = 0$$

$$6) -4x^2 + 21x = x + 11$$

$$3) x^2 + 1\frac{1}{3}x = 2x + 1\frac{7}{9}$$

$$7) 0,4x^2 + 0,7x = 0,3x - 0,2$$

$$4) x^2 + 1,2x - 0,13 = 0$$

$$8) \frac{x^2}{24} - \frac{x}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

- 3» Сначала просмотрите уравнения. Затем разделите уравнения на группы по следующим методам решения: 1) разложения на множители; 2) выделения полного квадрата. После чего решите уравнения.

$$x^2 + 12x + 35 = 0$$

$$0,01x^2 - 0,22x + 0,9 = 0$$

$$x^2 - 6x - 15 = 0$$

$$4x^2 - 36 = 0$$

$$4(x + 8)^2 = 144$$

$$3x^2 - 2x = 6 - x$$

$$2x^2 + 9x + 7 = 0$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{4x^2}{20} = 5$$

$$3x^2 + 10x + 3 = 0$$

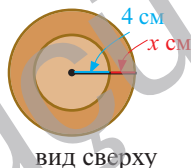
$$9(x - 3)^2 = 225$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{4x^2}{20} = 5$$

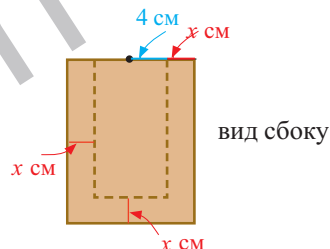
$$7x^2 - 10x - 55 = 100 + 2x^2$$

- 4» Туристы вышли из лагеря и пройдя в направлении 8 км на север, 9 км на восток, 4 км снова на север, разбили новый лагерь. Сколько километров составляет кратчайшее расстояние между старым и новым лагерем?

- 5» На уроке технологии каждому ученику был дан глиняный шар объёмом 300 см^3 для изготовления подставки для карандашей. Подставка должна иметь форму цилиндра, длиной 10 см и внутренним радиусом 4 см. Найдите ширину стенок цилиндра, если известно, что при работе была использована вся глина. Указание: сначала нарисуйте в тетради рисунок. Объём глиняного шара равен разности объёмов двух цилиндров.



вид сверху

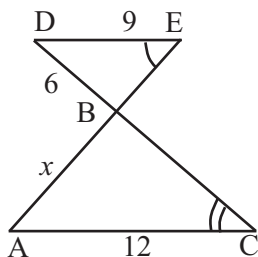


вид сбоку

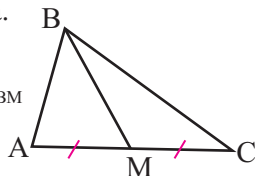
- 6» На ферме 120 коров породы А и 180 коров породы В. Для проверки жирности молока, фермер выбрал 50 коров. Сколько представителей каждой породы должен выбрать фермер, чтобы получить наиболее правильный результат?

Обобщающие задания

- 7** Дано: $\angle C \cong \angle E$
 $AC = 12$
 $DE = 9, DB = 6$
 Найдите: AB



- 8** Дано: $\triangle ABC$
 BM медиана.
 $S_{\triangle ABC} = 48 \text{ см}^2$
 Найдите: $S_{\triangle ABM}$



- 9** Найдите значение выражения.

a) $\frac{4^2 \cdot 4^{-1} \cdot 5^{-2}}{4^3 \cdot 5^{-3} \cdot 5^0}$ b) $\frac{8^{-3} \cdot 9^{-2} \cdot 4^0}{3^{-4} \cdot 8^{-5} \cdot 4^{-1}}$ c) $\frac{0,1^{-3} \cdot 0,01^{-2}}{0,1^{-6} \cdot 0,01^3}$ d) $\frac{0,2^{-3} \cdot 0,3^{-2}}{0,04^{-1} \cdot 0,09^3}$

- 10** 1) Найдите значение выражения $\left(\frac{b\sqrt{b}}{a^4}\right)^{-a}$, если $a = \sqrt{b} = 2$.

- 2) Найдите значение выражения $(a\sqrt{b})^{-ab}$, если $a = \frac{2}{3}$ и $b = 9$.

- 11** Трапеция это четырехугольник, у которого параллельны только две противоположные стороны. Проверьте, является ли четырёхугольник с вершинами в точках $A(1;-3)$ $B(2;7)$, $C(3;9)$, $D(5;5)$ трапецией?

- 12** Определите, какие прямые проходящие через две точки параллельны, а какие перпендикулярны?

- a) Прямая 1. $A(-1, 9)$ и $B(-6, -6)$ b) Прямая 1. $A(4, -3)$ и $B(-8, 1)$
 Прямая 2. $C(-7, -23)$ и $D(0, -2)$ Прямая 2. $C(5, 11)$ и $D(8, 20)$
- c) Прямая 1. $A(3, -10)$ и $B(2, -10)$ d) Прямая 1. $A(0, 3)$ и $B(0, -7)$
 Прямая 2. $C(-6, 8)$ и $D(2, 12)$ Прямая 2. $C(-6, -4)$ и $D(12, -4)$

- 13** В магазине, при покупке одинаковых продуктов, предлагается следующее:

1) Купи два, заплати за один

2) Купи один, получи скидку 25% на второй

3) Купи два, получи в подарок третий

4) При покупке двух, за третий заплати 50%

Какое из данных предложений делает покупку наиболее дорогой?

Обобщающие задания

14» Дано: $\triangle ABC$

$EF \parallel AC$

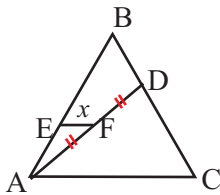
$AF \cong FD$

$BD = \frac{2}{3} DC$

$AC = 10$ см

Найдите: $EF = ?$

План для решения: начертив среднюю линию треугольника, используйте подобие треугольников.



15» Дано: $\triangle ABC$

$DEFH$ прямоугольник

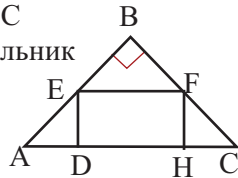
$DH = 2 \cdot HF$

$AB = 3$ см

$BC = 4$ см

Найдите: $EF = ?$

План для решения: проведите высоту из вершины прямого угла и используйте подобие треугольников.



16» Точки A и B находятся на числовой оси. Число A наибольшее целое число меньше числа $\sqrt{205}$, число B – наименьшее целое число больше $\sqrt{45}$. Найдите расстояние между точками A и B.

17» Чтобы узнать, у кого из одноклассников есть кошка и собака, Лала провела опрос среди 10 учеников. В результате она выяснила, что 40% имеют кошек, 30% собак, а 10% имеют и кошку, и собаку. На основе этих данных заполните следующую таблицу.

	Есть собака	Нет собак	Всего
Есть кошка	☐	☐	☐
Нет кошки	☐	☐	☐
Всего	☐	☐	☐

18» Докажите равенство.

$$\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

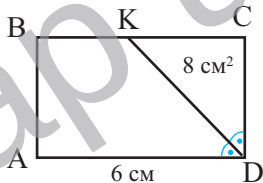
19» На рисунке размер детали равен 18 см. Найдите действительные размеры детали, если на рисунке указан масштаб 1:25.

20» Дано: ABCD прямоугольник
DK биссектриса ($\angle D$)

$AD = 6$ см

$S_{\triangle DCK} = 8$ см²

Найдите: S_{ABCD}

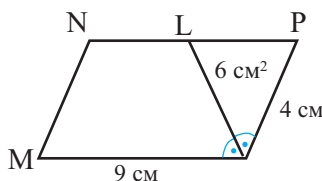


21» Дано: MNPR Параллелограмм
биссектриса RL ($\angle R$)

$MR = 9$ см, $RP = 4$ см

$S_{\triangle LPR} = 6$ см²

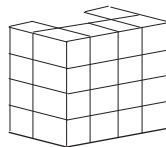
Найдите: S_{MNPR}



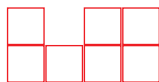
Обобщающие задания

22» В мешке 18 жёлтых и 8 красных шаров. Из мешка случайным образом вытаскивается один шар и не возвращается обратно. После этого вытаскивается ещё один шар. Найдите вероятность, что оба шара окажутся: а) желтого цвета; б) красного цвета.

23» Начертите 4 возможных варианта вида сверху фигуры на рисунке. Для примера один из рисунков представлен ниже. Фигура состоит из маленьких кубов, объём каждого из которых 1 куб.ед. а) Запишите наименьший и наибольший объём фигуры в виде кубических единиц. б) Запишите наибольшее и наименьшее значение площади полной поверхности.



Вид сверху - 1



24» Гюлара для 80 участников новогоднего представления должна купить фигурки зверя, который являлся талисманом года. Все фигурки упакованы в коробки по 18 штук в каждой. Обозначьте количество коробок, которые должна купить Гюлара через n и составьте соответствующее неравенство.

25» Решите уравнение.

а) $\frac{3}{x+5} = \frac{2x}{x^2-x}$

б) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = 2\frac{1}{2}$

в) $x^2 + x + 1 = \frac{5}{x^2 + x + 1}$

26» Какое из данных выражений является многочленом?

$\frac{5}{x-1} - \frac{1}{x^2} - 3$

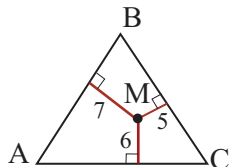
$\frac{\sqrt{x-1}}{5} - \frac{1}{x^2} - 3$

$\frac{x-1}{5} - x^2 - 3$

$\frac{x-1}{5} - \sqrt{x} - 3$

27» По данным предоставленным интернет провайдером за год при помощи e-mail –а было послано $1,2 \cdot 10^8$ писем. Это в 100 раз больше количества писем переданных по e-mail 5 лет назад. Сколько писем было передано по электронной почте 5 лет назад? Сколько писем будет передано через 2 года, если увеличение будет продолжаться с той же интенсивностью?

28» Внутри равностороннего треугольника взята точка, так, что расстояние от неё до каждой из сторон равно 5 м, 6 м и 7 м. Найдите площадь треугольника.



29» Среди следующих чисел найдите наименьшее число.

а) $0,02 \cdot 10^4$

б) $0,2 \cdot 10^3$

в) $2,0 \cdot 10^{-2}$

г) $20,0 \cdot 10^2$

е) $0,002 \cdot 10^5$

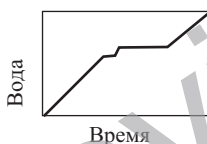
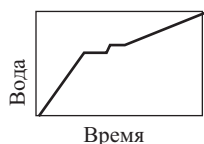
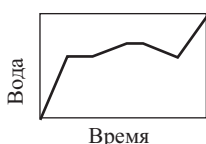
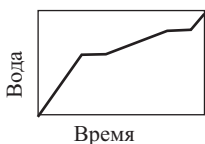
Обобщающие задания

30» Длина беговой дорожки, имеющий форму круга, равна 2000 м. Если два спортсмена начнут двигаться одновременно из одной точки в одном направлении, то они будут встречаться через каждые 20 минут, а если в противоположном направлении, то через каждые 6 минут. Какова скорость каждого спортсмена за одну минуту?

31» Вдоль беговой дорожки через каждые 20 метров поставлены метки. За сколько минут добежит спортсмен от начала дистанции до 6-ой метки, если от 1-ой метки до 4-ой спортсмен добежит за 9 секунд?

32» Джамил заполнил бассейн во дворе водой. По следующим данным определите какой из графиков выражает зависимость между объёмом заполняемой воды и временем заполнения.

- сначала за каждый промежуток времени заполнялся одинаковый объём;
- на некоторое время кран был закрыт;
- кран открыли, но количество поступающей жидкости уменьшилось;
- кран снова закрыли;
- кран открыли, и вода поступает с той же интенсивностью, что и в первый промежуток.



33» а) Масса жирафа приблизительно 10^3 кг, масса голубой акулы $2 \cdot 10^5$ кг. Во сколько раз акула тяжелее жирафа?

б) Масса осы приблизительно $3 \cdot 10^{-4}$ кг, масса слона $6,5 \cdot 10^3$ кг. Во сколько раз оса легче слона?

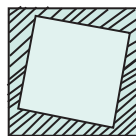
в) Масса муравья приблизительно $3 \cdot 10^{-6}$ кг. Муравей может поднимать груз в 20 раз больше своего веса. Запишите массу груза в стандартной форме.



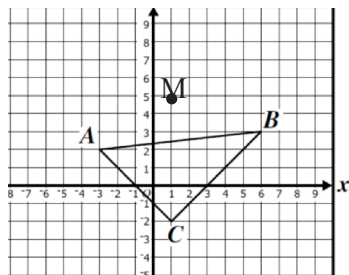
34» Во сколько раз объём куба с ребром $\sqrt{12}$ меньше объёма куба с ребром $\sqrt{3}$?

35» Вычислите значение выражения $(x^{-y}) \cdot (2x^y) \cdot (3y^x)$, если $x = 2$ и $y = -2$.

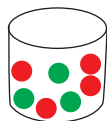
- 36»** Периметр маленького квадрата 72 см, площадь заштрихованной части 252 см². Найдите периметр большого квадрата.



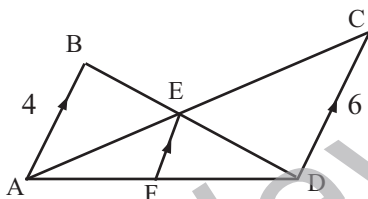
- 37»** Постройте треугольник симметричный треугольнику ABC относительно точки M и запишите координаты вершин полученного треугольника.



- 38»** 1) Из ящика случайным образом вытаскивается шар. Найдите вероятность, что этот шар: а) зелёного цвета; б) красного цвета; в) зелёного или красного цвета.
2) Из ящика случайным образом вытаскивают два шара. Найдите вероятность, что эти шары: д) оба красного цвета; е) разного цвета



- 39»** Найдите длину отрезка EF на рисунке.

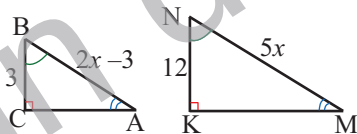


- 40»** Решите неравенства.

а) $(1 - \sqrt{2})(x - 2) < 2 - \sqrt{8}$

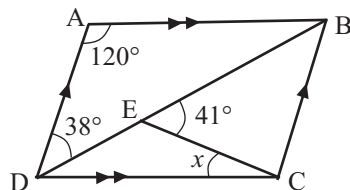
б) $|2 + |x - 3|| < 5$

- 41»** По данным на рисунке найдите периметры и площади треугольников.



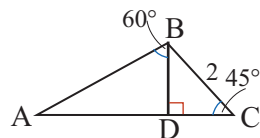
- 42»** 20 рабочих собирает 480 кг клубники за 8 часов. Сколько рабочих с той же производительности труда понадобится, чтобы собрать 360 кг клубники за 5 часов?

- 43»** Найдите угол x по данному на рисунке.



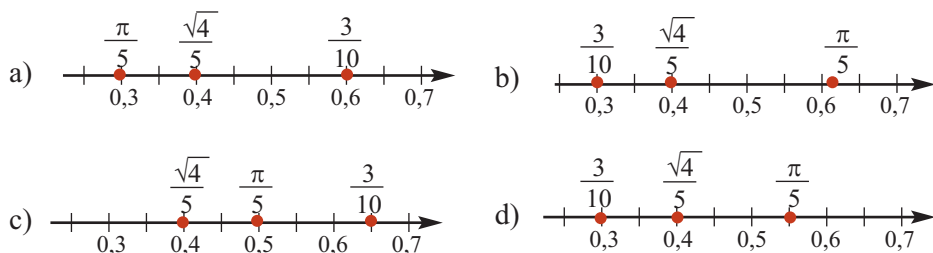
Проверьте себя

- 1» Какое высказывание верно если, $13 < a < 18$, $c = \frac{a+18}{a}$ и $d = \frac{a+13}{13}$
- значение d больше значения c .
 - значение c больше значения d .
 - значения c и d равны.
 - по данной информации невозможно сравнить.
- 2» Чему равно значение выражения x^x если, $x = 3^2$?
- 3^2
 - 3^{18}
 - 3^8
 - 3^9
- 3» Какое высказывание верно для 1. $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ и 2. $\sqrt{x + 2\sqrt{xy} + y}$ при $x > 0$ и $y > 0$?
- значение выражения 1 меньше;
 - значение выражения 2 меньше
 - значения выражений равны;
 - невозможно сравнить
- 4» Какое выражение показывает площадь круга, длина окружности которого равна l ?
- $\frac{l}{4\pi}$
 - $\frac{l^2}{4\pi}$
 - $\frac{l^2}{2\pi}$
 - $\frac{l}{2\pi}$
- 5» Какое выражение соответствует отношению $\frac{x}{\sqrt{b}}$, при $\frac{ab}{x} = \sqrt{a}$
- $\sqrt{2ab}$
 - $\sqrt{\frac{a}{b}}$
 - $\sqrt{b}$
 - $\sqrt{ab}$
- 6» Фарах и Ильгар принимают участие в соревновании по бегу. Фарах пробежала $\frac{3}{4}$ дистанции за 30 минут. Ильгар на $\frac{2}{3}$ части дистанции потратил время равное $\frac{4}{5}$ части времени, за которое Фарах пробежала $\frac{5}{8}$ дистанции. Какое высказывание верно?
- Фарах бежит быстрее
 - Ильгар бежит быстрее
 - их скорости равны
 - Ильгар пробегает дистанцию за 30 минут
- 7» Автомобиль прошёл путь 15 км за 11 минут. Какое неравенство выражает среднюю скорость автомобиля за час (x км/ч)?
- $50 \leq x < 60$
 - $60 \leq x < 70$
 - $80 \leq x < 90$
 - $90 \leq x < 100$
- 8» Случайным образом выбираются два простых однозначных числа. Найдите вероятность, что сумма этих чисел также является простым числом?
- 0
 - $\frac{1}{3}$
 - $\frac{5}{6}$
 - 1
- 9» Какое утверждение верно, если по рисунку сравнить длину соответствующую AC числа $\sqrt{10}$?
- значение длины AC больше $\sqrt{10}$
 - значение длины AC меньше $\sqrt{10}$.
 - значение длины AC равно $\sqrt{10}$
 - невозможно сравнить



Проверьте себя

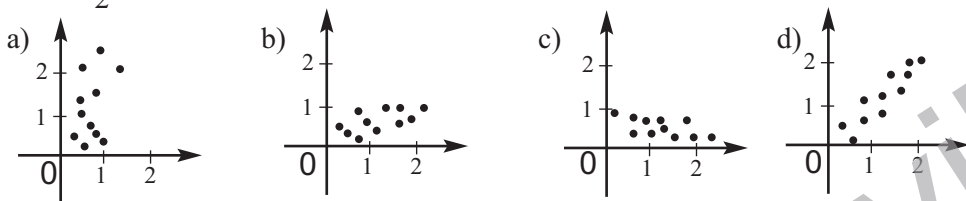
10» На какой числовой оси расположение чисел показано верно?



11» Какое высказывание верно для суммы всех целых чисел расположенных между числами $\sqrt{17}$ и $\sqrt{97}$?

- a) можно представить в виде произведения двух простых чисел.
- b) является числом на единицу меньше полного квадрата числа.
- c) можно представить в виде произведения двух чисел, один из множителей которых равен $\sqrt{169}$.
- d) больше 8π .

12» Какой из рисунков с диаграммой рассеивания более точно соответствует информации которую можно представить в виде графика функции $y = \frac{1}{2}x$?



13» Медиана ряда чисел 6, x , 10, 2, 7, 13 и 15 равна 10. Какие значения может принимать x ?

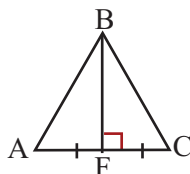
- a) 9
- b) 11
- c) 13
- d) 16

14» Стороны прямоугольного треугольника равны $\sqrt{8}$ и $\sqrt{10}$. Чему равно наибольшее значение третьей стороны треугольника?

- a) $3\sqrt{2}$
- b) $2\sqrt{3}$
- c) $\sqrt{2}$
- d) $\sqrt{3}$

15» Найдите $\cos \angle A$, если $\operatorname{tg} \angle C = \frac{3}{4}$.

- a) 0,8
- b) 0,6
- c) 0,5
- d) 0,2



16» В мешке находится 1096 шаров. Если вероятность того, что случайным образом вынутый из мешка шар красного цвета равен $\frac{5}{8}$, то сколько шаров в мешке не красного цвета?

- a) 352
- b) 411
- c) 685
- d) 524

Раздел I

стр 8. №4 а) 0; б) 3; в) 1; д) $-0,5$. №5 а) 2; б) 0; в) 1; д) -2 . №7 а) 0; в) $1,5$.

№10 $t = \frac{3v+6}{v-2}$ а) 4 часа; б) 4,5 часа. №11 $\frac{12a+8b}{a+b}$. №12 $\frac{5}{n+5}$; $\frac{5}{n+9}$

стр 9-13. №1 с) $14x$; д) $4x-12$. №6 с) $\frac{3a}{2b}$. №7 а) $\frac{y-4}{3}$; в) $\frac{x+5}{x-5}$; д) $\frac{3x}{x+3y}$.

№8 д) $\frac{5x}{6}$; в) $-\frac{2}{3}$. №9 а) 10; б) 1. №13 а) $\frac{c+2}{4}$; б) $\frac{x+a}{a-c}$. №14 б) $x-2$.

№15 б) $\frac{5-x}{3}$; в) $\frac{2}{1-x}$. №16. а) $4x-12$; б) $9a+18$; в) $\frac{x+1}{x-1}$. №17. в) $-y^2$. №18. а) $\frac{x-4}{4x}$;

б) $\frac{x+2}{2}$; в) $\frac{x+1}{x+4}$; д) $\frac{x+3}{2}$; ф) $\frac{4x-3}{x-4}$. №19 а) $\frac{x-3}{x+1}$; в) $\frac{x-y-3}{x}$. №20 а) $\frac{x+2}{x-2}$ $x \neq \pm 2$; б) $\frac{x-2}{x-4}$

$x \neq \pm 4$. №22 в) $\frac{8a^3}{12a^2b}$. №23 в) $\frac{a^2+a}{a^2-1}$. №24 а) $\frac{2}{x+10}$; б) $\frac{y-4}{y+5}$; в) $\frac{x-2}{2x}$; д) $\frac{3}{2x+5}$. №27 $4x+10$.

№28 а) $\frac{4}{\pi}$; б) 78,5%. №29 а) $\frac{m}{3n+3m}$; в) $\frac{2}{3}$. №31 3) $l = \frac{\pi(R^2-r^2)}{d}$.

стр 14-16. №1 с) $\frac{2x}{3b}$. №2 б) $-\frac{5x}{14y}$. №3 б) $\frac{8}{7pn^2}$. №5 в) $\frac{y^2}{4x^2}$. №6 в) $-\frac{2}{9x^2}$. №7 в) $\frac{12}{x+5y}$;

ф) $\frac{x^2+5x+6}{6}$. №9 д) $\frac{a+2}{a+3}$; ф) $\frac{3x+3}{2x-2}$. №10 а) 10; б) $-1,5$. №11 б) $\frac{x-1}{x+1}$. №12 а) $\frac{1}{3a+6}$; б) $\frac{2}{x-5}$

№14. $\frac{x+2}{x+1}$. №15. $\frac{2n-1}{n+2}$. №16. а) $\frac{2x+4}{3x+3}$ $x \neq -1$; $x \neq 5$. №17 а) более выгоден. №18. $\frac{4}{\pi}$

№19 1) $x \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right)$ 2) $\frac{390x^2}{(2x-1)(3x-2)}$. №20 1) $x+3$ 2) $\frac{a}{a+6}$.

стр 17-22. №1 в) 2. №2 а) $-\frac{a}{2}$; б) $\frac{7}{2}$. №3 б) $5-b$. ф) $a-3$. №4 а) 100 б) -10 . №5 б) $a-4$.

№7 в) $\frac{(a+b)^2}{a}$; ф) $\frac{2ab}{a+b}$. №8 б) $\frac{2a^2}{a^2-1}$

№9 а) 96; б) 24. №11 б) $\frac{1}{6}$. №13 в) $\frac{x}{6x+6}$; ф) $\frac{8x}{15(x-2)}$. №14 а) $\frac{x}{5(x+5)}$; в) $\frac{2-b}{2b+b^2}$ №15 б) 2;

в) $\frac{8y}{y^2-4}$. №16 а) $\frac{1}{xy}$; в) $\frac{a+2}{a^2-2a}$. №17 а) 0,5; б) 0,8. №18 б) $\frac{1}{a-2}$; в) 1; д) $-\frac{1}{x}$. №19 а) $\frac{1}{a-3}$.

№20 в) $\frac{a+2}{2-a}$; ф) $\frac{2}{(x+1)^2}$ №24. 2) $\frac{40}{m(m+2)}$ №27 а) $x+2$; б) $4x$.

№28 а) 15 б) 1,5. №29. а) 8; б) 5. №33 1) $\approx 5,1 \text{ м}^3$; 2) 8 рейсов.

стр 23-24. №1. а) $b+c$; б) $\frac{3}{a+5}$; ф) $\frac{1}{y}$. №2. в) $2p$; д) $y+1$. №3д) $a+b$. №5 б) $\frac{n^2+9}{2n}$; в) $\frac{4}{x-2}$.

№6 б) $\frac{x+1}{x-1}$. №7 в) $\frac{3m}{m+3}$; д) $\frac{x}{x-2}$. №9 а) x ; б) $\frac{12x+5}{5x+2}$. №10 $y = \frac{2\pi r}{x}$. №11 б) Али и Рамиз.

стр 25-26. №4. ф) $-\frac{1}{9}$ г) 32; в) $-\frac{8}{27}$. №8 в) $a(b-1)^3$. №9 в) $\frac{7}{12}$; д) 9. №10 а) $-\frac{1}{ab}$;

б) $\frac{b+a}{a^2b^2(b-a)}$. №11 ф) 4. №13 в) 2; д) 3. №14 в) 8. №15 в) $\frac{12b^4}{a^2}$. №18 а) $2\frac{1}{4}$; д) $-\frac{125}{729}$.

№19 в) $\frac{9y}{x^3}$

стр 27-28. №2. б) $2,87 \cdot 10^5$; в) $6,3 \cdot 10^{-6}$. №6 в) $6,12 \cdot 10^{-8}$. №7 780 кг.

№8. 13-ти значное. №12 электрон №15. $4,94 \cdot 10^{13}$. №16. б) $1,35 \cdot 10^{12}$.

стр 30-31. №3. а) 32; в) $\frac{1}{4}$. №9 1,25м. №10 а) $y = \frac{200}{x}$. №11 1) 2 работника; 2) 12 часов.

№12. 1) а) 1000 ман. б) 500 ман; 2) а) 25 семей. №13. а) 12 дней; б) неверно. №15. $b = \frac{2}{a}$

стр 32-33. №1. б) $d \neq -1$, $d \neq 4$; в) $a \neq b$, $a \neq -b$. №2 $t = \frac{S}{v+5} + \frac{S}{v-5}$. а) 5 часов; б) 7 часов.

№5. $x+2$. №7 5. №8. 5, в задании условие $b=0,5$ лишнее. №9 а) $\frac{x+2}{4(x-3)}$; б) $\frac{2(d-2)}{d+3}$; в) $\frac{x-1}{x-5}$.

№10 б) $-\frac{5}{a+3}$. №11 а) $\frac{4}{k}$; в) $-\frac{2a}{a^2-4}$. №12 а) $\frac{4(x+1)}{4-x^2}$; б) $\frac{3}{x-4}$. №13 $a=1$, $b=-1$. №15 в) $\frac{a}{b}$

№16 б) x^6 ; в) $\frac{x}{x-2}$ №17 а) $\frac{k+2}{k}$. №18. 3 или 4. №19 а) $k=2$, $b=-3$.

стр 34-36. №4. 100° , 95° , 75° , 90° в) 80° , 85° , 105° , 90° . №6. 75° , 125° , 55° , 105° в) 105° , 55° , 125° , 75° . №9. 1) 120° ; 2) 99° . №10. 1) 103° ; 2) 100° ; 3) 76° .

стр 37-39. №9. 1) 7 см и 5 см. 2) 9; 24; 9; 24 (см). №11. 70° и 110° . №12. 70° и 110° . №15. 1) 8 2) 16 3) 15

стр 40. №1. 1) 6° в) 14° . №2. 1) 25.

стр 42-43. №4. 1) 30° ; 4) 12.

стр 44. №2. 2) 60° , 120° , 120° , 60° .

стр 45. №1. 2 см, 3 см, 4 см. №2. 10 см, 15 см, 15 см. №3 б) 40.

стр 46-47. №2. а) 5. №3. 4 см и 6 см. №4 $R=6$ см. №5 $x=7$; $y=10$. №6. 6 10. №7. 4 см. №11. 32 см.

стр 48. №2. а) В(4;3). №4. О(3;2). №5 М(-1;2), D(-4;-2).

стр 49-50. №3. 6 см и 8 см. №6. в) 15 см. №8 2) 40 см, 3) 64 см. №9. 7 см №12. а) 7,5 см.

Раздел II

стр 54. №2. 8 см. №6 а) 13; б) 17; в) 4. №7 б) 6; в) 0,8 д) 0,4. №9 в) $x=25$; д) ни при каких значениях. №10 б) 16; д) 12. №13 в) $x=\pm 4$; д) $x=\pm\sqrt{5}$ №14 2) $x=\pm 7$; 4) $x=\pm\sqrt{8}$.

№15. $a=16$ см; $b=1,5$ км; $r=25$ м. №16. 6 см.

стр 57. №9 $\approx 16,7$ см

стр 58. №6 а) $A \cap B = \{1; 2; 3; 4\}$

стр 59. №1 а) $r = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$; б) $d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}$. №8 а) $1,4 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < 1,8 < \sqrt{5}$.

стр 61. №2 ≈ 2 сек. №5 $\approx 19,6$ м/сек. №7 а) $\approx 178,5$ км.

стр 62-63. №1 б) 1,2; д) 0,3. №2 в) $2\frac{1}{4}$; д) $2\frac{1}{3}$. №3 в) $5\frac{5}{6}$. №4 д) 0,4. №6 в) 18; д) 6

е) 2,6. №7 б) 120. №8 в) 21; д) 42. №9 в) 5; д) 5. №11 в) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{7}}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}$. №13 б) 210;

д) 0,07. №15 б) $\frac{7}{96}$; в) $\frac{15}{29}$. №16 24 см². №17 24 куб.ед.

стр 64. №3 а) 27; в) 135. №4 в) $5x$; в) $4c$; д) $-a$. №6 а) $7x^3$; б) $-6x^3$. №8 а) 4; б) 3. №9 б) 2.

стр 65. №1 в) $\sqrt{6}$; г) $-6\sqrt{3}$. №2 а) $5xy\sqrt{2x}$; б) $-3xy^2\sqrt{2}$. №3 б) $-\sqrt{48}$; г) $-\sqrt{2}$.

№4 б) $-\sqrt{3}c^2$; в) $\sqrt{2x}$; д) $-\sqrt{-2x}$. №7 а) положительный; в) отрицательный

стр 66-67. №1 в) 0; г) $-0,8\sqrt{13}$. №2 б) 3; д) 11. №3 а) $-\sqrt{3}$; д) $12\sqrt{3}a$. №4 а) $4\sqrt{2x} + 3\sqrt{y}$; б) $6\sqrt{3} + 6\sqrt{3x}$. №5 д) 12; №6 д) $20\sqrt{6}$; г) $-5\sqrt{2}$. №8 б) $30\sqrt{2}$, 108. №9 в) $60\sqrt{2}$; д) $42\sqrt{2}$. №10 а) 11; б) 8; в) 6. №11 а) $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$; д) $(2-\sqrt{a})(2+\sqrt{a})$. №12 а) $x-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{a}$.

стр 68. №1. 3) $3\sqrt{2}-1$; 5) $\frac{5\sqrt{2}-1}{7}$. №2. б и в. №3 $a < b$. №4. 4. №7. $\frac{1}{3}$. №8 а) $\frac{2}{a+\sqrt{b}}$.

стр 69-70. №3 а) 3. №8 $\frac{225\pi}{16}$ м². №9. $\approx 8,9$ м/сек. №11 а) -17; б) 4. №12 $\approx 30,6$ м/сек.

№13. $\sqrt{2}$ м. №14 а) 2,5. №15. $5ab$. №17 в) 2; д) $2\sqrt{3}$. №18. в 50 раз. №19 а) c ; б) $5c$.

№20 а) -1; б) 5. №21. $\frac{3+\sqrt{5}}{4}$.

стр 73. №3. $\sqrt{51}$ или $\sqrt{149}$.

стр 74-78. №1. $2\sqrt{3}$. №2. 26 см². №3. 6,5. №4 2) не в форме квадрата. №5 а) 17; в) 17;

д) $2\sqrt{2}$. №6 в) 20 м. №7 может быть. №8 $\sqrt{6}$; 8; 10. №10 1) $18+6$ 3) $h=15$ см; $P=70$ см.

№16 а) $r=16$, $q=16\sqrt{2}$; д) 6; ф) $p=8$ $m=10$. №17 1) $h=2,5\sqrt{3} \approx 4,3$ (см)

№19 2) прямоугольный треугольник; 3) остроугольный треугольник. №21 1) 6; 3) 12; 4) 50. №22 $P=60$.

№25. $\approx 2,2$ м. №27. 131, 25 сек. №28 130 км. №29 на каждом следующем шагу катет становится в $\sqrt{2}$ раза меньше катета прямоугольного треугольника.

стр 79. №2 1) $y=15$ $CE=5\sqrt{3}$. №3 2) $x=6\sqrt{2}$; 3) $y=12$, $x=12\sqrt{3}$. №4 $R=10$ см.

№6 $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. №7 16,9 см. №8. 88 мм. №10. 40 см.

Ответы

Раздел III

стр 81-83. №5. 3) ± 5 , 7) 0; $\frac{1}{6}$. №6 а) $\pm\sqrt{2}$, б) ± 15 , ф) -2 ; 0. №8 2) 50м 3) $R = 4$ см

№9. б) $\pm \frac{1}{2}$ д) ± 1 . №10. 6 см. №13. 2) $a = R\sqrt{\pi}$

стр 84-88. №8. 2) -12 ; 3. №9 2) $(a+6)(b+6)$. №10. 3 см. №11. 1 м. №14 1) -1 ; $\frac{1}{6}$, 5) -1 ; $2\frac{3}{4}$, 8) $\frac{1}{2}$; -3 . №16. $400\text{м} \times 900\text{м}$. №17. 0,5 м №18. 80 см. №20. 1 см

№21. $8\text{ч} \cdot h \approx 2 \text{ м } 40 \text{ см}$, $6\text{ч} \cdot h \approx 1 \text{ м } 80 \text{ см}$. №25. 2) $-\frac{1}{2}$, -2 ; 3) -1 , $-\frac{1}{3}$.

стр 89-90. №2. h) 2; 18, j) -3 ; 4. №4 е) -2 ; 8, ф) 0,5; 1. №5. 5%.

стр 94-96. №2. d) 1; 3,5. №3 а) 3; 5, б) -4 ; -10 . №5. 5 и 6, с) $\frac{1}{2}$ и 2. №8. 1) 7 в) 12,

2) -1 или 5. №9. 9 см. №12. 6 м $\times$ 7 м. №15. а) $1\frac{2}{3}$; 3, с) $\frac{1}{5}$; 3, е) -4 ; $-6\frac{2}{3}$ №17. а) -5 ; -1 ,

ф) 6; -2 . №19. 50 книг. №23. 7. №24. а) $6\text{ см} \times 5\text{ см} \times 4\text{ см}$, б) 148 см^2 . №25. $b=10\text{ м}$, $a=30\text{ м}$, $c=10\text{ м}$

стр 97-99. №3. 1) $x_2=-5$, $p=-2$; 3) $b=-12$, $x_2=2$; 4) $q=35$. №4 а) $-0,6$; б) 19; с) $-3,8$.

№8. 1) 52; 2) 2,5. №11. $m=3$. №12. $n=15$. №13. а) $n=\pm 6$. №14. 1) а) $n=2$; б) $n=\frac{1}{4}$, 2) $n=5,75$.

стр 100. №1. 1) -11 ; 4, 3) -2 ; -1 ; 2; 3. 6) ± 1 ; ± 2 . №2 б) 9. №3 а) ± 1 ; ± 2 , б) ± 1 . №8. 72 м.

стр 101, 102. №1. 32 см. №3. 13 см. №4. 10 человек. №5. 24 км/ч и 32 км/ч. №6. 10 м.

№7. 15 км/ч и 20 км/ч. №8. 9 м $\times$ 12 м. №11. 20 %

стр 103, 104. №5. $\approx 30\text{ см}^2$. №7. 26 рядов. №9. $m = 2\frac{1}{4}$. №11 $\approx 2,4\text{ сек}$. №12. $6\text{ м} \times 8\text{ м}$.

№14. $\approx 14,8$ м/сек.

стр 105, 106. №3. 2) 144. №4. стороны 12 см и 8 см, периметр 40 см. №6. 288 см^2 .

№10. $P = 6x + 10$. №12. 560. №14. а) 6; 4.

стр 107-109. №2. $\approx 8,7\text{ см}$. №5. $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle DEF} = 1:4$. №6. а) $225\sqrt{3}\text{ м}^2$, б) $25\sqrt{3}\text{ м}^2$, с) $100\sqrt{3}\text{ м}^2$

№7. 180 см^2 2) 30 см^2 3) 210 см^2 . №8. а) 336 см^2 б) 60 см^2 . №9. 6 см, 9,6 см.

№10. $S = 48\text{ см}^2$; $h_1 = 6\text{ см}$; $h_2 = h_3 = 4,8\text{ см}$. №11. 2) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. №12. а) 28 м^2 . №16. 26.

стр 110-112. №3 $P = 24 + 8\sqrt{2}$, $S = 48$. №5. 100 см^2 . №9. 2) 30 дней, 3) $\approx 8,57\%$. №10.

1) 32 кв.ед. 2) 8 кв.ед. №11. б) 35 дм^2 . №12. 2) 16; 85. №13. 36 см^2 .

стр 113-114. №2 1) 24 см^2 , 2) 468 см^2 . №3. 1) 336 см^2 . №4 1) 168 №5 60 см^2 . №7. 1) 30 см^2 , 2) 384 см^2

стр 115-116. №6 32 см^2 . №7. 9,5. №8 1) 54 см^2 2) 30 см^2 . №13. 2) 5 и 12 см. №14. $\sqrt{13}\text{ см}$ №15. 27 кв.ед.

Раздел IV

стр 119. №1. б) -8 ; 0, е) 3, ф) 1. №2 б) -1 ; 4, д) $\emptyset$. №4. а) $\frac{1}{2}$; с) $\frac{2}{5}$. №5. б) 5.

стр 120. №1. 28 игр. №2. 4 игры. №3. 1. №4. 6 / экстракт. №5. 5 кг. №6. 1,5 л.

№7. 1) 16 см, 30 см; 2) 15 см; 3) 34 см. №8. 3,5 см. №9. $4\text{ м} \times 6\text{ м}$. №10. 26 см

стр 121. №2. 10 дней 15 дней. №3. 6 часов, 12 часов. №7. 3 часа, 6 часов.

стр 122. №1. 25 часов. №2. 70 км/ч. №3. 10 км/ч, 12 км/ч. №4. 3 км/ч.

№5 1) 16 км/ч, 2) 6 часов 24 мин.

стр 123, 124. №1. а) 3, с) корней нет. №2. $\frac{10+0,5n}{n}$, 100 мин. №4. 6 часов,

№9. $t = \frac{26}{3v}$. №10. 1) корней нет, 2) корней нет. №11. $\frac{nm}{n+m}$ часов.

№12. 1) $\frac{3}{r}$; 2) при $r=12\text{ см}$. №13. $\frac{\pi}{4}$. №14. 2) $\frac{96}{(x+3)}$; 3) 6 см; 8 см; 10 см; 4,8 см.

стр 129-130. №3. 1) $\frac{x+3}{x-7}$, 2) $\frac{x-3}{x+6}$, 3) $\frac{x+1}{x-4}$, 4) $\frac{x-5}{x+6}$. №4. 4) -10 . №9. 40° . №10. 24 мин.

№11. 1) 12 чел., 2) 3; 4, 3) а) у Мурада 8 книг. №12. 370 манат. №14. 275 человек.

стр 131. №6. 1) 139,2 км; 2) 15,64 м.

стр 132-133. №1. 1) $x=6$; 2) $z=15$. №2. 1) $x=4$; $y=2$, 2) $x=1$; $y=1,5$.

№4. 1) 16 см, 14 см, 10 см. 2) 4 см, 3 см, 2,4 см. 3) тупоугольный треугольник.

стр 134-135. №2. а) $x=15$; $y=3$, б) $x=1,5$; $y=4$. №3. 1) 0,8. №6. 1) 60 см, 2) 0,8 м.

стр 136-139. №5. 1) JK=8, 2) ST=5, 3) WZ=30, UZ=18, 4) HJ=15, HK=10, 5) DB=5,

CB=15. №6. 2) 10 см. №7. CE=1,5 см, ED=4,5 см. №12. 9. №13. BE=2.

стр 140-142. №4. 1) 9, 2) 20, 3) 10. №5. 4 см. №6. 108 м. №7. $h=6$, $b=10$. №9. 180 м.

№10. а) $x=1,5$; б) $x=4$.

стр 143-146. №4. 2 км. №5. 1) $y = 20$, $x = 22,5$ см, 2) $x=32$ №7. 1) $x=6$, 2) $x=15$.
№8. $x=6,75$. №9. 24 см, 16 см. №10. FB=3. №11. PM=8, DC=5. №12. $\approx 24,6$ мм. №13.
45 м. №15.1) 25,5; 2) 63; 3) 18; 4) 21. №16. 3,51 м.

стр 148. №1. 1) 24, 2) 18, №2. 36. №3. $z=4,8$; $y=64$. №4. 8 см².

стр 149-150. №2. а) $k=2$ $x=8$; $y=16$. №7. а) $k=\frac{3}{5}$; $t=18$; $r=20$, б) $k=\frac{4}{3}$; $x=7,2$; $y=6,3$.

стр 151-152. №1. 1) $k=\frac{5}{6}$, $x=7,5$; 3) $k=2$; $x=1,2$. №3. 2) 162 см². №4. 75 см².

№5. 180 манат. №6. $P_1=15$ см, $P_2=20$ см. №7. 24 м². №8. 2:1. №9. 16 км.

№10 1) 375 см²; 2) 48 м².

стр 153-154. №3. 3) 44. №4. 10 см, 15 см. №5. 4,2 м. №7. $h=0,9$; $m=4$.

№9. а) $P_1=\frac{1}{2}$, б) $P_2=\frac{1}{4}$, в) $P_3=\frac{1}{8}$. №10. 1) 8 м; 2) 6 м; 3) 5 м 4) 10 м. №12. $B_1C_1=3$,
 $A_1C_1=4$, $k=\frac{1}{3}$.

Раздел V

стр 158. №9. а) $m > n$, б) $m < n$, в) $m = n$. №11 а) верно; д) не верно. №14. а) 11; д) -3;

№15. б) 8, в) -5.

стр 161-163. №3. а) положительно, б) отрицательно, в) положительно. №5 не меньше
50 часов. №8. самое меньшее 30 мин. №13. а) 64, б) 100 см². №13. а) 24 см, б) 8. №14.
2) не меньше 10 компьютеров. №15. а) $0,8 < P < 1,2$

стр 164-165. №3. в) $23 < 2a + 3b < 33$. №4. 1) а) $-5 < x - y < -2$; 2) а) $5 < \frac{x}{y} < 10$.

№5. б) $0,2 < \sqrt{3} - \sqrt{2} < 0,4$. №6. $64 \leq P \leq 70$. №8. $38^\circ \leq \gamma \leq 40^\circ$.

стр 167. №7. а) -11 и 7; б) -3 и 5, в) -4 и 2. №8 а) (-1; 5), б) (5; 7), в) (3; +∞).

№9. б) [-6; 3), в) (2; +∞). №10. а) [-2; 3), б) (0; 1), в) [-2; 2), г) [-2; 0], д) [2; 3).

стр 169-171. №4. а) $x > 3,5$; б) $y > 5$. №5 а) $(-\frac{7}{8}; +\infty)$, в) $(-\infty; 2\frac{2}{3}]$. №6. б) $(-\infty; -1,5]$,

г) $(-\infty; 3]$. №7 б) $(-\infty; 4]$, в) $(-\infty; \frac{1}{8})$. №8. больше 11,5 минут. №9. 13 очков. №10 а) $y < \frac{8}{11}$

№11. а) (1,5; +∞). №12. б) $x < 1,25$. №13 а) 3; б) -1. №15. 35. №16. меньше 6 см.

№17. самое больше $26\frac{2}{3}$ км. №18. больше, чем 10,5 км/ч. №19. меньше 14 кг.

№21. не меньше 8 человек. №22. больше 6 км в час. №23. не больше 6-ти.

№27а) при x больше 5-ти, б) при x меньше 5-ти

стр 173-174. №6. $t < 0$ или $t \geq 100$. №8 через 19 месяцев. №9 а) [-5; 6), в) $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$.

№10 б) 4 и 5. №11 в) (-12; 6). №12 не меньше 96 баллов. №14. 3) (15; 20) или (20000; 50000)

стр 175-176. №2. а) (-4; 4), в) решений нет, е) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$, г) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$,
г) $(-\infty; +\infty)$, д) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. №3 а) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. №4. в) [-3; 4]

№7. $|x-25| \leq 5$. №8. 2) решений нет, в) (-1,5; 4,5). №9 а) $\text{при } a \leq 2$. №11 $|y-55| \leq 3$.

стр 177. №2. более 3250 экзemplаров. №3. б) приблизительно выше 165,5 см, ниже
174,5 см. **178.** №7. 0. №11. $\frac{5}{6}$ мин. = 50 сек. №13. в) [-2; 4].

стр 180. №2 а) $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{12}$. б) $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{5}$. №3. $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tg 45^\circ = 1$. №4. $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$,

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tg 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **стр 182.** №1 ≈ 173 м, №3 $x \approx 6$ м $\theta \approx 36^\circ$ $y \approx 10,2$ м. №5 $DS_1 \approx 39$ км

$DS_2 \approx 64$ км $DS_3 \approx 80$ км. №7 1) достаточно 6 2) $\approx 65,16$ м. №8 ≈ 29 м. №14 AB=480 м,

AC ≈ 927 м. №15 $h \approx 75,3$ м. №16 $\approx 52,8$ м, $\approx 4,3$ м. **стр 188.** №1 а) $k=1$ д) $k=1,5$.

№2 а) $k=2$ №3 б=7. №4 а) $y=\frac{2}{3}x+2$ в) $x=2$ №6. $k=1$; 45° . №9. а) $x=1$, в) $y=-2$.

№10. а) $y=-3x+4$, б) $y=3x-9$. №15. 8.

стр 190. №1. $\approx 12^\circ 32'$. №2. $\approx 31,8$ см, №3. $r=\sqrt{2}$, $s=\sqrt{3}$, $m=2$, $n=\sqrt{5}$, $v=\sqrt{6}$, $z=\sqrt{7}$.

стр 206. №3. а) 500, б) 96, в) 404. №4 210. **стр 208.** №2. 1) $\frac{2}{15}$, 4) $\frac{3}{25}$. **стр 209.** №4. $\frac{3}{68}$

№8.1) $\frac{1}{11}$ 2) 26 чел. **стр 210.** №3. а) $\frac{81}{256}$, б) $\frac{9}{256}$ в) $\frac{27}{128}$. **стр 211.** №7 а) ≈ 420 чел., б) $\frac{84}{925}$

стр 212. №5. ≈ 1 см. №7. 8 см. №14. 2 см. №21. 27 см².

№28. $108\sqrt{3}$ см². №34. в 8 раз. №39. 2,4 см.

RİYAZİYYAT 8

Ümumtəhsil məktəblərinin 8-ci sinfi üçün
«Riyaziyyat» fənni üzrə dərslik
(Rus dilində)

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər:	Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov İlham Heydər oğlu Hüseynov
Məsləhətçi:	Çingiz Qacar
Dil redaktoru:	Asəf Həsənov
Kompüter tərtibatı:	Fuad Qəhrəmanov
Bədii tərtibatı:	Leyla Bəşirova
Korrektoru:	Qafur Zamanov
Tərcüməçi:	Abdullayeva Viktoriya

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin
08.06.2015 tarixli 645 №-li
əmrinə əsasən təsdiq edilmişdir.

© Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi – 2017

Müəlliflik hüquqları qorunur. Xüsusi icazə olmadan bu nəşri və ya onun hər hansı hissəsini yenidən çap etdirmək, surətini çıxarmaq, elektron informasiya vasitələri ilə yaymaq qanuna ziddir.

Kağız formatı: 70×100 ¹/₁₆. Fiziki ç.v. 14,0.
Ofset kağızı. Ofset çapı. Times New Roman şrifti.
Səhifə sayı 224.

Tiraj: 2424. Pulsuz. Bakı 2017

Radius nəşriyyatı
Bakı şəhəri, Binəqədi şossesi, 53