Найма Гахраманова
Магомед Керимов
Ильгам Гусейнов

МАТЕМАТИКА 9

Учебник
по предмету «Математика»
для 9-го класса общеобразовательных школ

Утверждено Министерством образования
Азербайджанской Республики
(приказ № 369 от 03.06.2016)

Издательство «Radius»

Отзывы, замечания и предложения, связанные с учебником, просим отправлять на электронные адреса: **radius_n@hotmail.com** и **derslik@edu.gov.az**
Заранее благодарим за сотрудничество!

Azərbaycan Respublikasının Dövlət Himni

Musiqisi *Üzeyir Hacıbəylinin,*
sözləri *Əhməd Cavadındır.*

Azərbaycan! Azərbaycan!
Ey qəhrəman övladın şanlı Vətəni!
Səndən ötrü can verməyə cümlə hazırız!
Səndən ötrü qan tökməyə cümlə qadiriz!
Üçrəngli bayrağınla məsud yaşa!
Minlərlə can qurban oldu,
Sinən hərbə meydan oldu!
Hüququndan keçən əsgər,
Hərə bir qəhrəman oldu!

Sən olasan gülüstan,
Sənə hər an can qurban!
Sənə min bir məhəbbət
Sinəmdə tutmuş məkan!

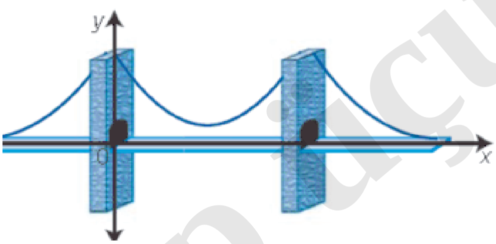
Namusunu hifz etməyə,
Bayrağını yüksəltməyə
Cümlə gənclər müştaqdır!
Şanlı Vətən! Şanlı Vətən!
Azərbaycan! Azərbaycan!

ГЕЙДАР АЛИЕВ
ОБЩЕНАЦИОНАЛЬНЫЙ ЛИДЕР АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО НАРОДА

Содержание

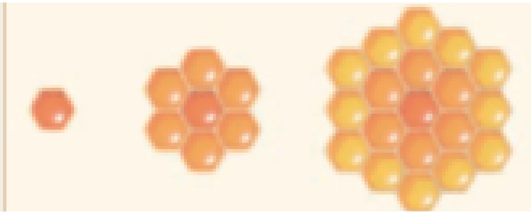
I раздел

II раздел



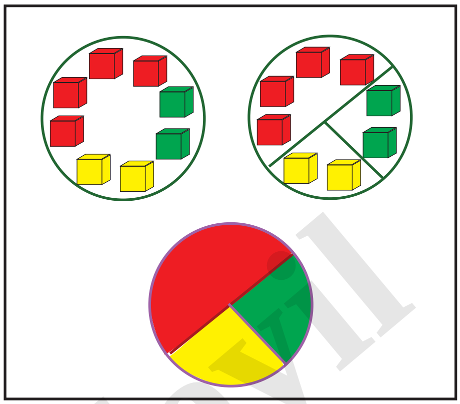
III раздел

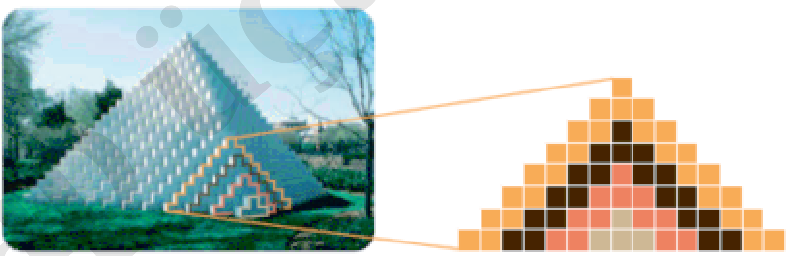
IV раздел



V раздел

VI раздел





Раздел

1

1.Корень *n*-й степени и степень с рациональным показателем
2. Окружность

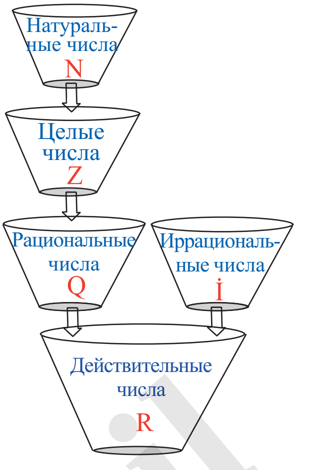
Действительные числа
Кубический корень числа
Корень *n*-й степени и его свойства
Степень с рациональным показателем и ее свойства

Окружность.
Центральный угол. Дуга
• Центральный угол. Градусная мера дуги
• Конгруэнтные дуги
• Длина дуги
Окружность. Хорда
• Теорема о конгруэнтных хордах
• Теорема о серединном перпендикуляре хорды
• Теорема о хордах, расположенных на одинаковом расстоянии от центра окружности
Угол, вписанный в окружность
• Конгруэнтные углы, вписанные в окружность
Касательная к окружности
• Касательная
• Свойства касательных, проведенных из одной точки к окружности
Углы между секущими и касательными окружности
• Углы между двумя секущими
• Углы между касательной и секущей
Отрезки, секущих и касательных

Действительные числа

В основе применения математических методов при решении практических задач лежат вычисления и измерения. При счете используются натуральные числа. При делении целого на части натуральных чисел недостаточно. Поэтому вводятся дробные числа. Длину отрезка можно выразить с помощью рационального числа с любой точностью. В теоретических вычислениях приходится рассматривать отрезки, длины которых не выражаются с помощью рациональных чисел. По этой причине вводится понятие иррационального числа. Изменение значений величины в противоположном направлении удобнее показать отрицательными числами.

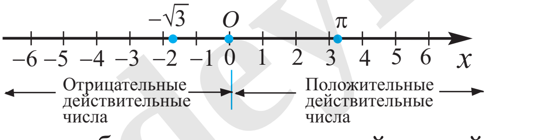
Действительные числа



Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. Любое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Для любого действительного числа a верны равенства: $a + 0 = a$ и $a \cdot 1 = a$.

Два действительных числа, отличающиеся только знаками, называются противоположными числами. a и $-a$ взаимно противоположные числа. Сумма двух противоположных чисел равна нулю: $a + (-a) = 0$.

При $a \neq 0$, a и $\frac{1}{a}$ являются взаимно обратными числами. Произведение двух взаимно обратных чисел равно единице: $a \cdot \frac{1}{a} = 1$. Сумма, разность, произведение и отношение (делитель отличен от 0) двух действительных чисел является действительным числом.



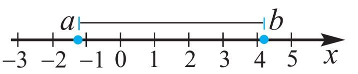
Каждой точке числовой оси соответствует одно определенное действительное число и, наоборот, каждое действительное число можно изобразить единственной точкой на числовой оси.

Для любых действительных чисел a и b верно только одно из соотношений: $a > b$, $a = b$, $a < b$. На числовой оси число, соответствующее точке, расположенной правее, больше числа, соответствующего точке, расположенной левее. Между двумя действительными числами существует бесконечное число действительных чисел. Наибольшее целое число, не превосходящее данное число, называется целой частью этого числа.

Абсолютная величина действительного числа показывает расстояние на числовой оси от точки, соответствующей этому числу, до начала отсчета.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \\ 0, \text{ если } a = 0. \end{cases}$$

Расстояние между двумя точками числовой оси равно абсолютной величине разности их координат a и b то есть, $|a - b|$. Обратите внимание на то, что $|a - b| = |b - a|$.



Действительные числа

1 Какие из данных действительных чисел являются натуральными; целыми; рациональными; иррациональными?

a) $\sqrt{16}$ b) $-\dfrac{9}{11}$ c) $1,(7)$ d) $\sqrt{8}$ e) $-\sqrt{9}$

2 В уравнении $x^2=a$ вместо a запишите такое число, чтобы уравнение: а) имело два рациональных корня; b) имело два иррациональных корня; c) не имело действительных корней

3 При каких значениях $n=2;\ 3;\ 4;\ 5$ выражения $\sqrt{n}$ является рациональным числом?

4 Определите, значение какого выражения является рациональным или иррациональным числом?

a) $(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$ c) $(2-\sqrt{2})^2$

5 Напишите два таких иррациональных числа, чтобы: а) сумма была рациональным числом; b) произведение было рациональным числом.

6 Укажите между какими двумя последовательными целыми числами находятся на числовой оси данные числа .

$-\dfrac{9}{4}$ | $1,6$ | $\sqrt{5}$ | $-0,(8)$ | $\dfrac{3}{4}$ | $\dfrac{7}{2}$ | $\dfrac{\pi}{4}$

7 Сравните числа:

a) $-2\sqrt{3}$ и $-\sqrt{9}$ b) $-\dfrac{7}{12}$ и $-\dfrac{7}{\sqrt{12}}$ c) $\sqrt{14}$ и 3 d) $\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ и π

8 a) Существует ли наименьшее число, которое больше 0,63?

b) Укажите наибольшее действительное число, которое меньше 0,9 и в десятичную запись которого не входит цифра 9.

9 Немат утверждает, что оба числа $-2+\sqrt{3}$ и $-1+\sqrt{2}$ расположены на отрицательной части числовой оси. Прав ли он?

10 Какое из утверждений верно относительно данных чисел?

1) $-\sqrt{3},\ -\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ -\sqrt{2}.$

a) больше, чем -1

b) между -2 и -1

2) $\sqrt{\dfrac{36}{5}},\ \sqrt{\dfrac{49}{8}},\ \sqrt{\dfrac{81}{11}}.$

a) между 1 и 2

b) между 2 и 3

11 Расположите числа в порядке возрастания.

1) $-\sqrt{49};\ -\sqrt{7};\ 0,\ -\sqrt{51};\ -6,8$ 2) $-\sqrt{8};\ -3,1;\ \sqrt{15};\ (-2)^2;\ -\sqrt{11}$

12 Напишите несколько: а) рациональных; б) иррациональных чисел, расположенных между числами $\dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{1}{2}$.

13 Найдите целую и дробную части чисел.

a) 2,3 b) –6,2 c) 2,(3) d) –2,(3) e) 2,1(6) f) $\sqrt{3}$ g) $\sqrt{5}-1$

Указание: Дробная часть числа равна разности числа и его целой части.

14 Упростите:

a) $|\sqrt{2}-3|+|\sqrt{2}-1|$ b) $|\sqrt{3}-1|+|\sqrt{3}+1|$ c) $|\pi-3|-|3-\pi|$

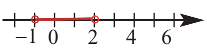
Числовые множества и форма их представления

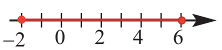
Множество, элементы которого являются действительными числами называется числовым множеством. В основном, числовые множества задаются в виде неравенств или в виде промежутков. Множество всех действительных чисел обозначается как (-∞;+∞)

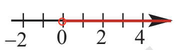
Промежутки	Неравенства	На числовой оси
$(a,\ b)$	$a<x<b$	
$[a,\ b)$	$a\le x<b$	
$(a,\ b]$	$a<x\le b$	
$[a,\ b]$	$a\le x\le b$	
$(a,\ +\infty)$	$a<x$	
$[a,\ +\infty)$	$a\le x$	
$(-\infty,\ b)$	$x<b$	
$(-\infty,\ b]$	$x\le b$	
$(-\infty,\ +\infty)$	R (все действительные числа)	

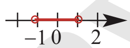
Пример: Изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству. Запишите в виде промежутков.

a) $-1<x<2$ b) $-2\le x\le 6$ c) $x>0$ d) $(-1,\ 1)$ e) $[-1,\ +\infty)$









$(-1,\ 2)$ $[-2,\ 6]$ $(0,\ +\infty)$ $-1<x<1$ $-1\le x<+\infty$

15 Запишите неравенства соответствующие утверждениям:

a) число n больше -1, но меньше 12;

b) число k не больше 3;

c) m неотрицательное число;

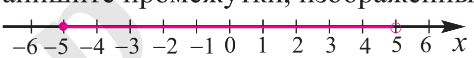
d) наименьшее значение a равна -10, а наибольшее 22;

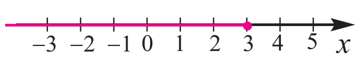
e) b меньше 5, но не меньше -3.

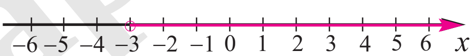
16 Запишите в виде промежутка множество действительных чисел, удовлетворяющих неравенству.

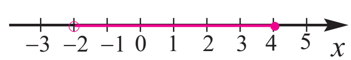
a) $x\le 2$ b) $-2<x\le 5$ c) $-1{,}5\le x\le -2$ d) $x\ge 10$

17 Запишите промежутки, изображенные на числовой оси.

a) 

c) 

b) 

d) 

Свойства объединения и пересечения числовых множеств

Некоторые свойства пересечения и объединения множеств подобны переместительным, сочетательным и распределительным свойствам сложения и умножения чисел.

1) $A \cup B = B \cup A$ 2) $A \cap B = B \cap A$

3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ 4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Верные для множеств равенства, соответствующие свойствам $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ для чисел не всегда верны.

18 Запишите объединение и пересечение промежутков.

Пример: $(-2; 4] \cup [0; 9] = (-2; 9]$; $(-2; 4] \cap [0; 9] = [0; 4]$

a) $(-2; 4] \cap [0; 9]$ b) $(-2; 4] \cup [0; 9]$ c) $(-\infty; \infty) \cap [-\pi; 21)$

d) $(-\infty; 4] \cap (-1; \infty)$ e) $[3; 4) \cup [4; 9)$ f) $(-\infty; 4] \cap (0; \infty)$

19 Выполните действия.

a) $Q \cap Z$ b) $N \cup R$ c) $N \cup Z \cap Q$ d) $(-4{,}8; -3{,}5) \cap Z$

20 Изобразите данный промежуток на числовой оси, укажите рациональные и иррациональные числа, входящие в этот промежуток (используйте знак $\in$). a) $[1; 5]$ b) $(-3; 0)$ c) $[-2; \infty)$

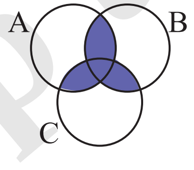
21 $A = [-2; 1]$, $B = [0; 3]$ и $C = [-1; 2]$ являются подмножествами множества действительных чисел R. Проверьте верность нижеследующих равенств, изобразив на числовой оси.

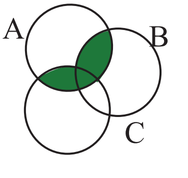
1) $A \cup B = B \cup A$; 2) $A \cap B = B \cap A$; 3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; 5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

22 Выберите из множеств $A = \{0; -1; -2; \frac{5}{9}; \sqrt{6}; 2\pi\}$, $B = \{-1; \sqrt{3}; 0{,}(5); \sqrt{2}; -2; \pi\}$ и $C = \{0; 5; \sqrt{3}; \sqrt{2}; 2; \pi\}$ два множества, пересечение которых состоит из: a) иррациональных; b) рациональных чисел.

23 Запишите множество, соответствующее закрашенной части.

1) 

2) 

Кубический корень числа

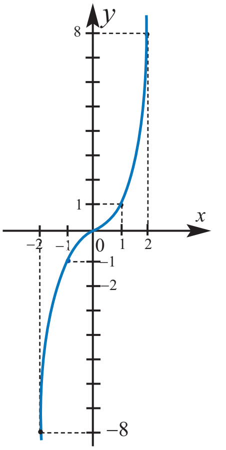
Практическое занятие.

1) Вычислите 12^3, используя равенства $3^3 = 27$, $4^3 = 64$. Аналогичным способом найдите 18^3.

2) Как изменится куб числа, если число увеличить или уменьшить в 10 раз? Основываясь на полученный результат, найдите $0{,}5^3$, 50^3.

3) Дополните таблицу в тетради.

x	-2		$-0{,}5$	0	$0{,}5$		
$y = x^3$		-1	$-0{,}125$	0		1	8



4) Отметьте на координатной плоскости точки, абсциссы которых равны значениям x, а ординаты равны соответствующим значениям y в таблице. Соедините эти точки сплошной кривой, как показано на рисунке.

5) Задайте несколько значений x, например, 1,5; –1,5 и т.д. Найдите соответствующие значения y и уточните расположение точек с соответствующими координатами на этой кривой.

В первой строке таблицы показаны значения аргумента x , а на второй строке– соответствующие значения функции $y = x^3$. Эта функция имеет смысл при всех значениях x . Функция принимает отрицательное значение при отрицательном значении x, положительное значение при положительном значении x. При $x=0$, $y= 0$. То есть, областью определения и множеством значений функции $y = x^3$ являются все действительные числа.

Графиком функции $y = x^3$ называется кубическая парабола.

Если $x > 0$, то $y > 0$ (куб положительного числа - положительное число), если $x < 0$, то $y < 0$ (куб отрицательного числа - отрицательное число), если $x = 0$, то $y = 0$.

Поэтому график функции проходит через начало координат и расположен в I и III четвертях. Если значение x заменить его противоположным значением $-x$, тогда функция будет принимать противоположное значение: т.к. $y = x^3$, то $(-x)^3 = -x^3 = -y$. Значит, каждой точке $(x; y)$ графика функции соответствует точка $(-x; -y)$, симметричная относительно начала координат на данном графике. Таким образом, график функции $y = x^3$ симметричен относительно начало координат. По графику видно, что число x, куб которого равен данному числу y - единственное.

Кубический корень числа

Определение. Число, куб которого равен a, называется кубическим корнем числа a и обозначается $\sqrt[3]{a}$.

Примеры: $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{2}$; $\sqrt[3]{-27} = -3$,

По определению $(\sqrt[3]{a})^3 = a$

Замечание: $a > b \Leftrightarrow \sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$. Например, $7 > 5 > -2$ и $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{5} > \sqrt[3]{-2}$ равносильны.

Кубический корень числа

Обучающие задания

1 Дана функция $y = x^3$.
a) Какие из точек A(–2; 8), B(2; 8), C($-\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{8}$), D(–3; –27) расположены на графике функции, являющейся кубической параболой?
b) При каком значении m кубическая парабола проходит через точку N(m; –8)? c) Сколько точек находится на кубической параболе с ординатами 8; –1?

2 Используя график функции $y = x^3$, найдите:
a) приближенное значение y при $x = 1{,}2$; $x = -1{,}2$;
b) приближенное значение x при $y = 4$; $y = -4$.

3 Найдите объем куба, длина ребра которого 4 см.
a) Чему равен объем куба, если длину ребра увеличить в 2 раза?
b) На сколько изменится объем куба, если длину ребра увеличить на 1 см?

4 Найдите значение выражения. a) $5\cdot\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2\cdot 13{,}5}$ c) $\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}$

d) $(4-\sqrt[3]{-64}):\sqrt[3]{0{,}125}$ e) $\sqrt[3]{31-\sqrt[3]{64}}$ f) $\sqrt[3]{60+\sqrt{16}}$ g) $\sqrt[3]{130-\sqrt[3]{125}}$

5 Укажите несколько натуральных значений n, при которых значение выражения $\sqrt[3]{n}$ будет: a) рациональным числом;
b) иррациональным числом.

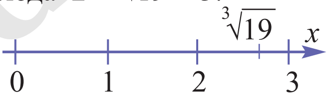
6 Какие из чисел являются рациональными, а какие иррациональными?

a) $\sqrt{11}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{-64}$ d) $\sqrt[3]{4}$ e) $\sqrt[3]{\frac{5}{27}}$ f) $\sqrt[3]{0{,}027}$

7 Определите приблизительное расположение данных чисел на числовой оси.
a) $\sqrt[3]{19}$ b) $\sqrt[3]{-20}$ c) $\sqrt[3]{30}$ d) $\sqrt[3]{36}$ f) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

Пример: $8 < 19 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{19} < \sqrt[3]{27}$, отсюда $2 < \sqrt[3]{19} < 3$.

То есть, число $\sqrt[3]{19}$ находится между 2 и 3.



8 Впишите знаки > или < в закрашенные квадраты.
a) $\sqrt[3]{7}\ \square\ \sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt[3]{9}\ \square\ 2$ c) $\sqrt[3]{25}\ \square\ 3$ d) $\sqrt{\frac{1}{4}}\ \square\ \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$ e) $0{,}01\ \square\ \sqrt[3]{0{,}001}$

9 Определите знак разности.
a) $\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}$ b) $\sqrt[3]{10}-2$ c) $\sqrt[3]{24}-3$

10 Расположите числа в порядке возрастания.
a) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{7}$, 2, $\sqrt[3]{1{,}2}$
b) $-\sqrt[3]{5}$, -2, $-\sqrt[3]{4}$, -3

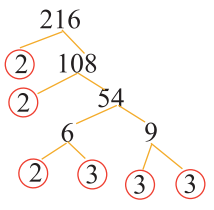
11 Решите уравнения:
a) $2x^3 - 1 = 15$ b) $\frac{1}{2}x^3 - 1 = 31$ c) $(x-1)^3 + 1 = 9$

Пример: $(x-2)^3 - 1 = 7$; $(x-2)^3 = 8$; $x - 2 = \sqrt[3]{8}$; $x - 2 = 2$; $x = 4$

Кубический корень числа

Прикладные задания

12 a) Распределите простые множители чисел на три одинаковые группы и запишите в виде куба какого-либо числа.



$216 = 3\cdot2\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2 = (2\cdot3)\cdot(2\cdot3)\cdot(2\cdot3)= 6^3$

1) 216 2) 512 3) 1000 4) 2744

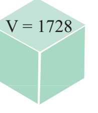
b) Распределите простые множители чисел на две одинаковые группы и запишите в виде квадрата какого-либо числа.

1) 144 2) 225 3) 484 4) 256

13 Число 64 имеет полный квадрат и полный куб: $64 = 8^2$, $64 = 4^3$. Найдите несколько таких чисел. Как нижеследующая последовательность может помочь в нахождении таких чисел?

$0 = 0^3 = 0^2$; $1 = 1^3 = 1^2$; $64 = 4^3 = 8^2$; $729 = 9^3 = 27^2$; $4096 = 16^3 = 64^2$

14 1) Найдите длину ребра куба, показанного на рисунке, используя разложение на простые множители.



2) Найдите площадь полной поверхности куба с объемом 64 м^3

15 Отбросив члены a^2 и a^3 в тождестве $(1\pm a^3)=1\pm3a+3a^2\pm a^3$, при a близких к нулю, с помощью полученного приблизительного равенства $(1\pm a)^3\approx1\pm3a$ можно вычислить куб чисел близких к 1.

Пример: $1{,}02^3 \approx 1 + 3 \cdot 0{,}02 = 1{,}06$ *вычисление с помощью калькулятора* $1{,}02^3 = 1{,}061208$

$0{,}97^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}03 = 0{,}91$ $0{,}97^3 = 0{,}912673$

Вычислите согласно примеру.

a) $1{,}01^3$ b) $1{,}03^3$ c) $0{,}99^3$ d) $0{,}98^3$

16 В магазине три холодильника, каждый в форме куба с измерениями 40 см, 60 см, 50 см и соответствующими ценами 96 манат, 192 манат, 150 манат. Какой холодильник выгоднее купить по цене вместимости 1м^3? Решите задачу, начертив соответствующие рисунки в определенном масштабе.

17 Объем грузового контейнера 1000 м^3. Маленькие коробки, в которые упакованы предметы, собраны в этот контейнер. Ширина контейнера равна ширине 5 маленьких коробок, длина равна длине 5 маленьких коробок, а глубина– высоте 5 маленьких коробок. 1) Найдите объем маленьких коробок. 2) Сколько маленьких коробок в контейнере?

18 Даны: $A = \{ \sqrt[3]{2}\,; \sqrt[3]{3}\,; \sqrt[3]{8}\,; \sqrt{2}\,; -4 \}$ $B = \{ \sqrt[3]{8}\,; -4; \sqrt[3]{5}\,; \sqrt{0{,}(4)}\}$

$C = \{0{,}2; \sqrt{\frac{4}{9}}\,; \sqrt[3]{7}\,; -4\,; \sqrt[3]{8}\,\}$. Выберите из них два множества:

а) разность которых состоит из иррациональных чисел; б) пересечение которых состоит из рациональных чисел. Решите, используя диаграмму Эйлера-Венна.

19 Исследуйте и примените данное ниже правило для получения кубического корня многозначного числа.

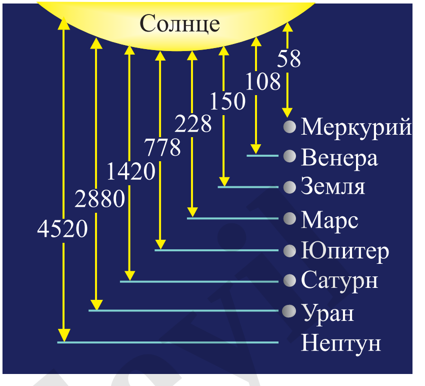
$2^3=8$ $3^3=27$ $4^3=64$ $5^3=125$ $6^3=216$ $7^3=343$ $8^3=512$ $9^3=729$

а) $\sqrt[3]{32768}=?$ b) $\sqrt[3]{103823}=?$ c) $\sqrt[3]{12167}=?$ в) $\sqrt[3]{74088}=?$

а) Выделите по три цифры, начиная справа. 32 768 последней цифрой числа является 8, значит, последняя цифра кубического корня 2. $3^3=27$ и $4^3=64$, число 32 находится между 27 и 64. Так как $30^3<32768<40^3$ и кубический корень числа 32768 находится между 30 и 40. С помощью калькулятора проверьте, что этим числом является 32.

b) Последней цифрой числа 103823 является 3, значит, кубический корень этого числа оканчивается цифрой 7. Число 103 находится между числами $4^3=64$ и $5^3=125$. Кубический корень числа 103823 находится между числами 40 и 50. С помощью калькулятора проверьте, что этим числом является 47.

20 **Астрономия.** В 1500-м году Кеплер, для вычисления времени (периода) полного оборота планет вокруг Солнца, определил формулу $T=0{,}2\sqrt{R^3}$. Здесь R выражает расстояние от планеты до Солнца в миллионах километрах, а T– время в днях (земных). На рисунке даны расстояния от Солнца до планет. У какой из планет период больше: Земли или Марса? Результат подтвердите вычислениями.



21 **Биология.** Высоту дерева приблизительно можно определить по формуле $h\approx 35\sqrt[3]{d^2}$. Здесь d– диаметр ствола дерева, h– его высота. Чему, приблизительно, равна высота дерева с диаметром ствола 1,1 м? Проверьте верность формулы, проведя соответствующие измерения в саду и в парке.

22 **Биология.** Для вычисления массы мозга млекопитающих животных биологи используют формулу $b\approx 0{,}01\sqrt[3]{m^2}$. Здесь m – масса животного, b – масса мозга животного. Вычислите массу мозга: а) Собаки массой 27 кг; b) Полярного медведя массой 200 кг.

23 **Геометрия.** Объем шара вычисляется по формуле $V=\frac{4}{3}\pi r^3$. Найдите, с точностью до сотых, радиус шара, объем которого равен 528 м³.

24 Расплавив два железных куба с ребрами 3 см и 4 см, получили один куб. Найдите приближенное значение длины ребра полученного куба. Результат округлите до десятых.

Корень *n*-й степени и его свойства

Исследование. 1) Впишите в закрашенные квадраты число, при котором равенство будет верным.

a) $(\blacksquare)^4 = 16$ b) $(\blacksquare)^5 = 343$ c) $(\blacksquare)^8 = 0$ d) $(\blacksquare)^5 = -32$

2) Можно ли найти число, при подстановке которого в закрашенный квадрат, равенство $(\blacksquare)^6 = -64$ будет верным? 3) Что можно сказать о числе, вписанном в квадрат для верности равенства $(\blacksquare)^4 = 9$?

Корень *n*-й степени

- Корнем n-й степени $(n \geq 2, n \in N)$ из числа a называется число, n-я степень которого равна a.

Например, корнем 5-й степени из числа 32 является 2, потому что $2^5=32$. Корнем 4-й степени из числа 81 является 3 и –3, потому что $3^4=81$ и $(-3)^4=81$.

- Если n нечетное число, то для любого числа a существует единственное действительное число, n-я степень которого равна a.
- Если n четное число, то при $a > 0$ существуют два действительных числа, n-я степень которых равна a. Эти числа являются взаимно противоположными.
- Если n четное число, при $a < 0$ a не имеет действительного корня.
- Арифметическим корнем n-ой степени из числа $a (a \geq 0)$ называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Обозначается $\sqrt[n]{a}$ и читается так: «корень n-й степени из числа a».
Число a называется подкоренным числом или подкоренным выражением, n – показателем корня. При $a > 0$ отрицательный корень четной степени из числа a обозначается $-\sqrt[n]{a}$.

- Корень нечетной степени из отрицательного числа можно выразить через арифметический корень той же степени. Например, $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$
- Если $a = 0$, то $\sqrt[n]{0} = 0$.
- Если n нечетное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл для любого $a \in R$
  Если n четное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл только при $a \geq 0$
- При всех значениях имеющего смысл выражения $\sqrt[n]{a}$,
  справедливо $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- Если n нечетное число, $\sqrt[n]{a^n} = a$. Если n четное число, то $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

Пример 1: $\sqrt[3]{x^3} = x$ $\sqrt[4]{x^4} = |x|$ $\sqrt[5]{x^5} = x$ $\sqrt[6]{x^6} = |x|$

- Если $a > b > 0$ то, $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ **Пример 2:** $\sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{8} > \sqrt[4]{5}$

Обучающие задания

1 Вычислите.

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt[3]{125}$ c) $\sqrt[4]{256}$ d) $\sqrt[3]{0}$ e) $\sqrt[4]{1}$

f) $\sqrt{0,64}$ g) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ h) $\sqrt[5]{-32}$ i) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ j) $\sqrt[3]{0,064}$

Корень *n-й* степени и его свойства

2 Разделите на две группы: имеющие смысл и не имеющие смысла.

a) $\sqrt[5]{-27}$ b) $-\sqrt[8]{19}$ c) $\sqrt[4]{(-2)^4}$ d) $\sqrt[4]{-12}$ e) $\sqrt[6]{(-3)(-7)}$

3 Запишите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{25}$ c) $\sqrt[5]{28}$ d) $\sqrt[4]{0{,}7}$ e) $\sqrt[4]{15}$

4 Найдите целую часть числа.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{20}$ c) $\sqrt[5]{38}$ d) $\sqrt[4]{17}$ e) $-\sqrt[4]{17}$ f) $\sqrt[4]{17}-1$

5 Чтобы найти дробную часть числа, нужно из данного числа вычесть его целую часть. Сначала найдите целую часть числа, а затем укажите его дробную часть.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt[4]{12}$ d) $\sqrt[5]{33}$ e) $\sqrt[3]{28}-2$

6 Вычислите. a) $\sqrt{\sqrt{16}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt{7+\sqrt[3]{7+\sqrt[4]{1}}}$ d) $\sqrt[3]{4\cdot\sqrt[5]{2\cdot\sqrt{256}}}$

7 Вычислите. a) $(4\sqrt{3})^2$ b) $(5\sqrt[3]{2})^3$ c) $(-2\sqrt[4]{3})^4$ d) $(-2\sqrt[5]{4})^5$

e) $3\sqrt[4]{(-2)^4}$ f) $\sqrt[4]{(-3)^4}+\sqrt[3]{(-3)^3}$ g) $\sqrt[6]{(-8)^2}$ h) $2\sqrt[3]{(-4)^3}$ i) $\sqrt{(-7)^2}$

8 С помощью калькулятора найдите приближенные значения выражений:

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[4]{6^3}$ c) $\sqrt{10^3}$ d) $\sqrt[3]{16}$

9 Упростите: a) $\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[5]{x^5}$ $(x>0)$ b) $\sqrt[4]{x^4}+\sqrt[5]{x^5}$ $(x<0)$

10 Упростите: a) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-1)^4}$ b) $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-3)^3}+\sqrt[4]{(\sqrt{2}-3)^4}$

11 Упростите выражение $\sqrt[3]{(x-1)^3}+\sqrt{x^2-4x+4}$ при $1<x<2$

12 Расположите числа в порядке возрастания:

a) $\sqrt[4]{17}$, $\sqrt[4]{15}$, 2 b) $\sqrt[5]{9}$, $\sqrt[5]{7}$, $\sqrt[5]{3}$

13 При каких значениях переменной верно равенство?

a) $\sqrt[3]{x+1}=3$ b) $\sqrt[4]{x-1}=2$ c) $\sqrt[6]{x-7}=-1$ d) $\sqrt[5]{x-3}=-2$

14 Решите уравнения.

a) $x^3=64$ b) $x^6=-16$ c) $x^4=81$ d) $\frac{1}{8}x^4-2=0$ e) $\frac{1}{2}x^5+16=0$

Пример: 1) *Уравнение с нечетной степенью* $x^3=27$ *имеет единственный действительный корень:* $x=\sqrt[3]{27}=3$

2) *Уравнение* $x^4=-81$ *не имеет действительных корней, т.к. степень с четным показателем не равна отрицательному числу.*

3) *Уравнение* $x^4=16$ *имеет две действительные корни:*

$x=\pm\sqrt[4]{16}$, $x=\pm 2$

Корень n-й степени и его свойства

Исследование: 1) Сравните значения выражений $\sqrt[3]{8\cdot 27}$ и $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}$
2) Впишите в закрашенный квадрат соответствующий знак сравнения.
$\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ ■ $\sqrt[6]{64}$ Обсудите решение этих заданий и обобщите свое мнение.

Корень *n-й* степени и его свойства

Свойсво 1. Если $a\geq 0$ и $b\geq 0$ то, $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
Корень n-й степени из произведения неотрицательных сомножителей равен произведению корней n-й степени сомножителей.
Пример: $\sqrt[3]{27\cdot 64}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}=3\cdot 4=12$
Свойство 2. Если $a\geq 0$ и $b>0$ то, $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
Корень из дроби n-й степени с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен отношению корней n-й степени числителя и знаменателя.
Пример: $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}=\dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}}=\dfrac{2}{3}$

Свойство 3. Если n, k - натуральные числа и $a\geq 0$, то $(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k}$
Пример: $(\sqrt[5]{2})^4=\sqrt[5]{2^4}=\sqrt[5]{16}$

Свойство 4. Если n, k – натуральные числа и $a\geq 0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$
Действительно, при $a\geq 0$ выражения $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$ и $\sqrt[nk]{a}$ имеют смысл и их значения неотрицательны. Т.к. $(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk}=((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k=(\sqrt[k]{a})^k=a$ то,
$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ **Пример:** $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[12]{2}$
Свойство 5. Если n, k, m – натуральные числа и $a\geq 0$ то, $\sqrt[kn]{a^{km}}=\sqrt[n]{a^m}$
Если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то значение корня не изменится. Действительно, согласно свойству 4,
$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{\sqrt[k]{a^{mk}}}=\sqrt[n]{(\sqrt[k]{a^m})^k}=\sqrt[n]{a^m}$
Пример: $\sqrt{\sqrt[3]{x^4}}=\sqrt[6]{x^4}=\sqrt[3]{x^2}$

Обучающие задания

15 Дополните нижеследующее доказательство тождества $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ при $a\geq 0$, $b\geq 0$.

Утверждение	Обоснование
1. $a\geq 0$, $b\geq 0$	1. Дано
2. $\sqrt[n]{a}\geq 0$, $\sqrt[n]{b}\geq 0$	2. ....
3. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\geq 0$	3. ....
4. $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n$	4. Степень произведения ... произведению степеней .....
5. $(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=a\cdot b$	5. ....
6. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	6. ....

16 Вычислите значение выражения.

a) $\sqrt{25\cdot 64}$ b) $\sqrt[3]{8\cdot 27}$ c) $\sqrt[4]{16\cdot 81}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}}$ e) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}\cdot 243}$

17 Если прочесть справа налево тождества, заданные в свойстве 1 и в свойстве 2, то получится правило умножения и деления корней с одинаковыми показателями. Вставьте пропущенные слова, чтобы дополнить правила.

1) Чтобы перемножить корни с .... показателями, нужно .... подкоренные выражения, а показатель корня ....

2) Чтобы разделить корни с .... показателями, нужно разделить .... , а показатель корня ....

18 Вычислите значение выражения.

Пример: $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{54\cdot 32}=\sqrt[3]{27\cdot 2\cdot 32}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}=3\cdot 4=12$

a) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{200}$ b) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ c) $\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{8}$ d) $\sqrt[3]{28}\cdot\sqrt[3]{98}$

e) $\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{13{,}5}$ f) $\sqrt[4]{80}\cdot\sqrt[4]{125}$ g) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{162}$ h) $\sqrt[5]{81}\cdot\sqrt[5]{96}$

19 Вычислите. a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{192}}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}}$ d) $\dfrac{4\sqrt{10}}{\sqrt{0{,}1}}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{3\sqrt[3]{3}}$

20 Вычислите. a) $\sqrt[4]{32\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{8\cdot 27}$ b) $\sqrt[4]{8\cdot 3}\cdot\sqrt[4]{2\cdot 27}$ c) $\sqrt[5]{16\cdot 9}\cdot\sqrt[5]{2\cdot 27}$

21 Вычислите значение выражения.

a) $(\sqrt{8}-\sqrt{4{,}5})\cdot\sqrt{2}$ b) $(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt[3]{4}$ c) $\dfrac{\sqrt[4]{512}-\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$ d) $\dfrac{\sqrt[5]{486}-\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}}$

e) $(\sqrt[4]{8}-2\cdot\sqrt[4]{0{,}5})\cdot\sqrt[4]{2}$ f) $(\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}+2\cdot\sqrt[3]{16}):\sqrt[3]{2}$ g) $(\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{121{,}5})\cdot\sqrt[5]{2}$

22 Вычислите.

a) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$ | b) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\cdot\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$ | c) $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}}\cdot\sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$

23 Сравните значения данных выражений:

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ и $\sqrt[4]{81}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$ и $\sqrt[6]{64}$ c) $\sqrt{\sqrt[4]{2^8}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{2^8}}$ и $\sqrt[8]{2^8}$

24 Упростите выражения при положительном значении переменных.

a) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$ d) $\sqrt[9]{x^6}$ e) $\sqrt[2n]{a^{4n}}$

f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}}$ g) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{c^5}}$ h) $\sqrt[5]{\sqrt{n}}$ i) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{z^{12}}}$ j) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{y^6}}$ k) $\sqrt[5]{\sqrt{n^5}}$

25 Упростите выражения при положительных значениях переменных.

a) $\left(\sqrt[6]{x^2}\right)^3$ b) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{ab}\right)^3\cdot\sqrt{a^3b^3}$ d) $\sqrt[4]{z^2}\cdot\sqrt[4]{81z^6}$

e) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$ f) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$ g) $\sqrt[n]{a^n}\cdot(\sqrt[n]{a})^n$ h) $\dfrac{(\sqrt{x}\cdot\sqrt{y})^3}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}}$

Корень *n*-й степени и его свойства

26 Найдите площадь прямоугольника с длиной $\sqrt[4]{8}$ м и шириной $\sqrt[4]{2}$ м .

27 Покажите на примерах, что свойства 1 и 2 верны и для отрицательных чисел a и b, если n нечетное число.

28 Во сколько раз число $\sqrt[3]{\frac{5}{64}}$ больше числа $\sqrt[3]{\frac{5}{256}}$?

29 Выполните действие.

a) $(\sqrt[6]{8}\ )^2$ b) $(\sqrt[4]{4}\ )^2$ c) $-3\cdot(\sqrt[4]{9}\ )^2$ d) $(\sqrt{3}\cdot\sqrt[6]{8}\ )^2$

30 Упростите.

a) $\frac{\sqrt{x^3y^5}}{\sqrt{x^5y^3}}$ b) $\frac{\sqrt[4]{a^5b^{10}}}{\sqrt[4]{ab^2}}$ c) $\frac{\sqrt[3]{n^4m}}{\sqrt[3]{nm^4}}$ d) $\frac{\sqrt[4]{x^6z^3}}{\sqrt[4]{x^2z^3}}$

31 Освободите от корня. Запишите в виде многочлена.

a) $\sqrt[3]{(a+2)^6}$ b) $\sqrt[4]{(x-3)^8}$ c) $\sqrt[3]{(x^2-1)^3}$ d) $\sqrt[4]{(x^2+2)^4}$

Вынесение множителя из-под знака корня.

Примеры:

a) $\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{27\cdot 2}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{a^5b^6}=\sqrt[3]{a^3b^6a^2}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}\cdot\sqrt[3]{a^2}=ab^2\sqrt[3]{a^2}$

c) $\sqrt[4]{48a^6}=\sqrt[4]{16\cdot 3\cdot a^4\cdot a^2}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{a^4}\cdot\sqrt[4]{3a^2}=2|a|\sqrt[4]{3a^2}$

32 Запишите выражение в виде $a\sqrt[n]{b}$

a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt[3]{24}$ c) $\sqrt[4]{32}$ d) $\sqrt[5]{128}$ e) $\sqrt[3]{\frac{108}{250}}$

33 Упростите выражения при положительных значениях переменных.

a) $\sqrt{16x^3}$ b) $\sqrt[3]{27a^5}$ c) $\sqrt[6]{64\,a^7}$ d) $\sqrt[3]{54a^5b^7}$ e) $\sqrt{\frac{81a^2b^4}{3b}}$

34 Упростите. Определите допустимые значения переменной (ДЗП).

a) $\sqrt{36x^3}$ b) $\sqrt[4]{36x^5y^8}$ c) $\sqrt[5]{8xy^7}\cdot\sqrt[5]{16x^6}$ d) $\sqrt[3]{4y^3z}\cdot\sqrt[3]{2y^2z^4}$

e) $\sqrt[3]{\frac{x^6y^8}{x^3y^4}}$ f) $\frac{\sqrt[5]{x^9y}}{\sqrt[5]{x^3y^8}}$ g) $\sqrt{\frac{9x^3}{32y^4}}$ h) $\sqrt[4]{x^3y\cdot\frac{\sqrt[4]{16x^4y}}{\sqrt[4]{y}}}$

35 Упростите выражение вынесением общего множителя за скобки.

a) $2\sqrt[5]{y}+7\sqrt[5]{y}$ b) $\sqrt[5]{64x^8}-x\sqrt[5]{2x^3}$ c) $-\sqrt[4]{x}+2\sqrt[4]{x}$ d) $\sqrt[3]{16y^4}-3y\sqrt[3]{2y}$

Внесение множителя под знак корня.

При n нечетном, $a=\sqrt[n]{a^n}$ при n четном и $a\geq 0$ $a=\sqrt[n]{a^n}$

$a<0$ $a=-\sqrt[n]{a^n}$

Пример: a) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{8\cdot 5}=\sqrt[3]{40}$

b) $\frac{3x}{\sqrt[4]{x}}=\sqrt[4]{\frac{(3x)^4}{x}}=\sqrt[4]{81x^3}$ c) $c\cdot\sqrt[4]{-\frac{3}{c^3}}=-\sqrt[4]{c^4}\cdot\sqrt[4]{-\frac{3}{c^3}}=-\sqrt[4]{-3c}$

36 Внесите множитель под знак корня.

a) $3\sqrt[3]{2}$ b) $2\sqrt[4]{2}$ c) $3\sqrt[4]{5}$ d) $-2\sqrt[4]{3}$ e) $-2\sqrt[5]{2}$ f) $x\sqrt[3]{3}$ g) $a\sqrt[5]{2}$

37 Внесите множитель под знак корня. Укажите ДЗП.

a) $x\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{x}}$ b) $x\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{x}}$ c) $2c\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{4c}}$ d) $\frac{2}{x}\cdot\sqrt[4]{\frac{x^5}{8}}$ e) $c\cdot\sqrt[4]{-\frac{3}{c}}$

38 Определите знак разности. a) $\sqrt[6]{2}-\sqrt[3]{10}$ b) $\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}$ c) $\sqrt[4]{5}-\sqrt[6]{7}$

39 Сравните числа. a) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{3}$ b) $2\sqrt[3]{3}$ и $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt[4]{3}$ и $3\sqrt[4]{2}$

40 Приведите корни к одинаковым показателям, а затем выполните действие.

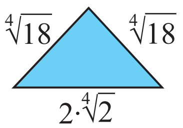
a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}$ b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{3}$ c) $\sqrt[6]{4}:\sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt[3]{x}:\sqrt[5]{x}$

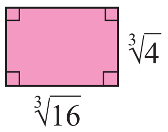
41 Вычислите значение выражения.

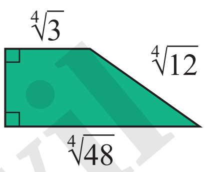
a) $\sqrt{4+\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{23-8\sqrt{7}}$ b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$

42 Упростите. a) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ b) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

43 Найдите площади фигур.

a) 

b) 

c) 

44 Упростите, применяя свойства корня.

a) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^6}}\ (a\ge 0)$ c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}\ (a\ge 0)$

45 Какое из равенств верно при $a<0$.

a) $\sqrt[5]{a^5}=a$ b) $\sqrt[5]{a^5}=-a$ c) $\sqrt[4]{a^4}=-a$ d) $\sqrt[6]{a^6}=|a|$

46 Расположите числа в порядке возрастания:

a) $\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[3]{3}$. b) $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[4]{5}$.

47 Освободите знаменатель от иррациональности.

a) $\dfrac{9}{\sqrt[4]{27}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt[3]{4}}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt[5]{8}}$

48 Выполните действия.

a) $\dfrac{\sqrt[4]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{2\sqrt{5}-4}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{5}-4}}{\sqrt[3]{0{,}5}}$

49 Решите уравнения и неравенства.

a) $\sqrt[3]{x}=4$; $\sqrt[3]{x}>4$; $\sqrt[3]{x}<4$; b) $\sqrt[4]{x}=2$ $\sqrt[4]{x}>2$ $\sqrt[4]{x}<2$

c) $\sqrt[5]{x-3}=2$ d) $\sqrt[3]{x+5}=-1$ e) $\sqrt[4]{x+1}=3$ f) $\sqrt[6]{x+2}=-5$

Степень с рациональным показателем и ее свойства

Исследование

1) Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2^6}$.

2) Вычислите значение выражения $2^{\frac{6}{3}}$, учитывая что $\frac{6}{3} = 2$.

3) Сравните результаты 1-го и 2-го шагов.

4) Верно ли равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, если m делится на n? Приведите еще один пример.

5) Как вычислить значение выражения $a^{\frac{m}{n}}$, если число m не делится на n без остатка?

Степень с рациональным показателем

Допустим, что равенство $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (здесь $a > 0$, $m \in Z$, $n \in N$, $n \geq 2$) верно и в случае, если $\frac{m}{n}$ дробное число. Тогда все свойства степени с целым показателем выполняются и для степеней с дробным показателем при положительном основании.

Определение: Если a – положительное число, а $\frac{m}{n}$ – дробное число (здесь m – целое, n – натуральное число, $n \geq 2$), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пример: $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$; $2^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^{-3}}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

Т.к $\sqrt[n]{0^m} = 0$ ($n \in$ N, $n \geq 2$) при $m > 0$, то при $\frac{m}{n} > 0$, $0^{\frac{m}{n}} = 0$

Степень с дробным показателем для отрицательного числа не рассматривается. Например, выражение $(-4)^{\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

Обучающие задания

1 Замените корнем степень с рациональным показателем.

a) $5^{\frac{2}{3}}$; $3^{\frac{3}{4}}$; $8^{-\frac{3}{4}}$; $9^{0,25}$ b) $x^{\frac{2}{3}}$; $y^{1,5}$; $8^{-0,5}$; $c^{-2,5}$ c) $3x^{\frac{1}{2}}$; $y^{1,5}$; $8^{-0,5}$; $c^{-2,5}$

2 Замените арифметический корень степенью с рациональным показателем.

a) $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\sqrt[5]{a^3}$; $\sqrt[6]{b^5}$; $\sqrt[3]{2x}$; $\sqrt[8]{2x^3}$

3 Вычислите.

a) $100^{\frac{1}{2}}$ b) $9^{-\frac{1}{2}}$ c) $8^{1\frac{1}{3}}$ d) $27^{\frac{1}{3}}$ e) $81^{\frac{3}{4}}$ f) $2 \cdot 125^{\frac{1}{3}}$

g) $25^{\frac{1}{2}} \cdot 0,001^{\frac{1}{3}}$ h) $8^{\frac{2}{3}} - 27^{\frac{1}{3}}$ i) $16^{\frac{1}{4}} + 32^{\frac{1}{5}}$

4 Лятиф и Севиль вычислили значения выражения $(-8)^{\frac{1}{3}}$ следующим образом:

Лятиф: $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$. Севиль: $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Сравнивая результаты объясните, почему степень с дробным показателем для отрицательного числа не рассматривается.

5 Вычислите. a) $\left(27^{\frac{2}{3}} + 125^{\frac{1}{3}} + 8^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{4}}$ b) $\left(8^{\frac{2}{3}} + 9^{\frac{3}{2}} + 125^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

6 Вычиление на калькуляторе $2{,}4^{3{,}5} \approx 21{,}4160487111885324$.
Лала и Анвер объяснили это вычисление таким образом:
Объяснение Лалы: Если число 2,4 умножить 3,5 раз на себя, то получится приблизительно 21,42.
Объяснение Анвера: $2{,}4^{3{,}5} = 2{,}4^{\frac{7}{2}}$. Это является квадратным корнем из произведения 7 множителей, каждый из которых равен 2,4. Какое из объяснений верно?

7 Сравните числа.

a) $5^{\frac{1}{2}}$ c $3^{\frac{1}{2}}$ b) $0{,}1^{\frac{1}{2}}$ c $0{,}2^{\frac{1}{2}}$ c) $3^{\frac{1}{2}}$ c $3^{\frac{1}{3}}$ d) $4^{\frac{1}{3}}$ c $4^{\frac{1}{4}}$

8 При каких значениях переменной выражение имеет смысл?

a) $x^{\frac{1}{3}}$ b) $\sqrt[3]{x}$ c) $(x-1)^{-\frac{1}{4}}$ d) $(x+1)^{\frac{2}{3}}$

Свойства степени с рациональным показателем

Известные нам свойства степени с целым показателем справедливы и для степеней с любым рациональным показателем при положительном действительном основании.

Название	Форма записи	Пример
Произведение степеней	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5^2 = 25$
Степень степени	$(a^p)^q = a^{pq}$	$(3^{\frac{5}{2}})^2 = 3^{\frac{5}{2}\cdot 2} = 3^5 = 243$
Степень произведения	$(ab)^p = a^p b^p$	$(16\cdot 9)^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 4\cdot 3 = 12$
Степень с отрицательным показателем	$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$	$36^{-0,5} = \dfrac{1}{36^{0,5}} = \dfrac{1}{(6^2)^{0,5}} = \dfrac{1}{6}$
Степень с нулевым показателем	$a^0 = 1$	$213^0 = 1$
Отношение степеней	$\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$\dfrac{4^{\frac{5}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 4^2 = 16$
Степень отношения	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$	$\left(\dfrac{27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{27^{\frac{1}{3}}}{64^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{3}{4}$

Здесь *a и b положительные действительные числа*, p и q рациональные.

Докажите, что $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$, если $p = \dfrac{m}{n}$, $q = \dfrac{k}{l}$ (n и l – натуральные числа, m и k – целые числа).

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{l}} = a^{\frac{ml}{nl}} \cdot a^{\frac{nk}{nl}} = \sqrt[ln]{a^{ml}} \cdot \sqrt[ln]{a^{nk}} = \sqrt[ln]{a^{ml} \cdot a^{nk}} = \sqrt[ln]{a^{ml+nk}} = a^{\frac{ml+nk}{nl}} =$$
$$= a^{\frac{ml}{nl}+\frac{nk}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} = a^{p+q}$$

Остальные свойства доказываются аналогичным способом.

Степень с рациональным показателем и ее свойства

Обучающие задания

9 Представьте в виде степени с рациональным показателем.

a) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{\frac{1}{3}}$ b) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}}$ c) $b^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}$ d) $a^{0,8} \cdot a^{-5,1} \cdot a^{7,3}$

10 Упростите.

a) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}}$ b) $y : y^{\frac{2}{3}}$ c) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{2}{3}}$ d) $c^{1,2} : c^{-0,8}$

11 Упростите, применяя свойства степени с рациональным показателем.

a) $(a^{\frac{5}{7}})^{1,4}$ b) $(m^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$ c) $(b^{0,8})^{0,5}$

d) $(c^{0,7})^{0,5} \cdot c^{0,15}$ e) $y^{\frac{5}{6}} \cdot y^{\frac{2}{3}} : y^{-0,5}$ f) $(a^{-\frac{3}{4}})^{\frac{5}{9}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$

12 Вычислите.

a) $2 \cdot 4^{0,4} \cdot 4\sqrt[5]{2}$ b) $4^{\frac{5}{12}} \cdot \sqrt[6]{2}$ c) $25^{0,7} \cdot 5^{0,4}$ d) $3^{0,2} \cdot 3^{-0,25} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{-\frac{3}{4}}$

13 Найдите значение выражения.

a) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$ b) $(\frac{1}{8} \cdot 27^{-1})^{\frac{1}{3}}$ c) $(0,01 \cdot \frac{1}{49})^{-\frac{1}{2}}$ d) $(\frac{49}{144})^{\frac{1}{2}}$

14 Упростите. a) $(125\,x^{6})^{-\frac{2}{3}}$ b) $(27\,x^{3})^{\frac{1}{3}}$ c) $(64\,c^{6})^{-\frac{1}{3}}$ d) $(\frac{1}{81}\,x^{8})^{-\frac{1}{4}}$

15 Представьте в виде квадрата выражения ($x > 0$):

x; x^{8}; $x^{\frac{1}{4}}$; $x^{-\frac{1}{3}}$

16 Представьте в виде куба выражения ($a > 0$):

a; a^{6}; $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{-\frac{1}{3}}$; $\sqrt{a}$

17 Выразите нижеследующее выражение через a, если $234^{\frac{1}{2}} = a$

a) $2,34^{\frac{1}{2}}$ b) $0,0234^{\frac{1}{2}}$ c) $23400^{\frac{1}{2}}$

18 Выразите переменную x через a, если $x > 0, a > 0$.

a) $a = x^{\frac{1}{2}}$ b) $a = x^{-\frac{1}{3}}$ c) $a = x^{\frac{2}{3}}$

19 Решите уравнения. a) $x^{\frac{1}{2}} = 3$ b) $x^{-\frac{1}{3}} = 2$ c) $x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{1,4} = 9$

Пример: $x^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow (x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = 8$

20 Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем.

a) $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x}$ b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$ c) $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt[4]{x \cdot \sqrt{x}}}$

21 Упростите.

a) $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{x} \cdot \sqrt[3]{x}$ b) $\dfrac{c^{0,4} \cdot \sqrt[5]{c}}{\sqrt{c}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[5]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{5}}}$ d) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x^2}}}{x^{-\frac{1}{8}}}$

22 Упростите.

a) $(x^{\frac{1}{2}} - 3) \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}$ b) $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) \cdot (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$ c) $(y^{\frac{1}{3}} - 1) \cdot (y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + 1)$

23 Представьте в виде суммы.

a) $(c^{\frac{3}{4}} + 2c^{\frac{1}{4}})^2 - 4c$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} - (x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}})^2$

c) $(c^{\frac{2}{9}} - 1)(c^{\frac{4}{9}} + c^{\frac{2}{9}} + 1) \cdot (c^{\frac{2}{3}} + 1)$

Пример:

$(1 - a^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot a^{0,5} =$

$= 1^2 - \cancel{2 \cdot 1 \cdot a^{\frac{1}{2}}} + (a^{\frac{1}{2}})^2 + \cancel{2 \cdot a^{0,5}} =$

$= 1 + a.$

24 Разложите на множители.

a) $b + b^{\frac{1}{2}}$ b) $(ab)^{\frac{1}{3}} - (ac)^{\frac{1}{3}}$ c) $c^2 - 3$ d) $a - b$, $(a > 0,\ b > 0)$

e) $x^{\frac{1}{2}} - 4$ f) $x^{\frac{1}{3}} + 8$ g) $x^{\frac{2}{3}} - 9$ h) $y - 27$ $(y > 0)$

25 Сократите дробь.

a) $\dfrac{a - b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$ b) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}} - 3}{x - 9}$ c) $\dfrac{a - 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b}{a - b}$ d) $\dfrac{b^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{6}}}$

26 Найдите значение выражения при данном значении переменной:

a) $\dfrac{a - 4a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} - 2a^{\frac{1}{2}}}$, $a = 81$ b) $\dfrac{c^{\frac{1}{2}} - 4c^{\frac{1}{6}}}{c^{\frac{1}{3}} - 2c^{\frac{1}{6}}}$, $c = 64$

27 Докажите, что значение выражения не зависит от переменной.

a) $\dfrac{(9^n - 5 \cdot 9^{n-1})^{\frac{1}{2}}}{(27^{n-1} - 19 \cdot 27^{n-2})^{\frac{1}{3}}}$ b) $\dfrac{(8^{n-2} - 7 \cdot 8^{n-3})^{\frac{1}{3}}}{(5 \cdot 16^{n-1} + 16^{n-2})^{\frac{1}{4}}}$

Прикладные задания

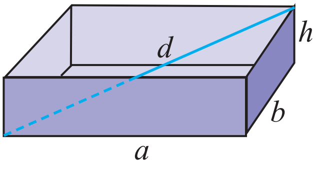
28 В составе чая, кофе и шоколада есть кофеин. С помощью выражения $100 \cdot (0,5)^{\frac{n}{5}}$ можно вычислить количество кофеина (в %), оставшегося в организме человека после употребления через n часов. Сколько процентов кофеина остается в организме человека после употребления чая через:

1) a) $\frac{1}{2}$ часа; b) 1,5 часа?

2) Через сколько часов количество оставшегося в организме кофеина будет 50%?

29 Бак для нефти в виде куба имеет объем 2187 м³. Сколько банок краски понадобится, чтобы покрасить полную поверхность бака, если одной банки краски хватает на покраску 20 м² площади?

30 Длину диагонали коробки в форме прямоугольного параллелепипеда, показанного на рисунке, можно найти по формуле $d = (a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}$



a) Найдите длину диагонали коробки, если ее длина $a = 20$ см, ширина $b = 12$ см, высота $h = 6$ см.

b) Найдите высоту (h) коробки, если ее длина $a = 4$ см, ширина $b = 3$ см, диагональ $d = 13$ см.

31 Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с измерениями $2^{\frac{1}{3}}$ см, $4^{\frac{1}{3}}$ см, $8^{\frac{1}{3}}$ см. Сравните объем данного параллелепипеда с объемом куба, ребро которого $5^{\frac{1}{4}}$ см.

32 **Биология.** Биологи проводят сравнительные опыты на живых существах в различных направлениях. Например, площадь поверхности (см²) живых существ из класса млекопитающих приближенно вычисляют по формуле $S \approx k \cdot m^{2/3}$. Здесь m – масса живого существа в граммах, k – постоянный коэффициент, принятый для каждого живого существа. В таблице задан коэффициент k для некоторых живых существ из класса млекопитающих.

Название	Мышь	Кошка	Собака	Корова	Кролик	Человек
коэффициент (k)	9,0	10,0	11,2	9,0	9,75	11,0

Сколько квадратных сантиметров составляет поверхность кожи животного: a) кошки массой 2 кг; b) собаки массой 2 кг; c) кролика массой 6 кг?

33 1) Начертите квадрат. Задайте площадь таким числом, чтобы периметр был: a) рациональным числом; b) иррациональным числом.

2) Начертите куб. Задайте объем таким числом, чтобы площадь полной поверхности была:
a) рациональным числом; b) иррациональным числом

34 Найдите требуемую величину по данным формулам:

a) Найдите m, при $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{g}}$ b) Найдите k, при $R = \sqrt{d^2 + k^2}$

c) Найдите u, при $K = \sqrt{1 - \dfrac{x^3}{u^3}}$ d) Найдите b, при $A = \sqrt{1 + \dfrac{a^3}{b^3}}$

Обобщающие задания

1 Найдите значение выражения.

a) $(\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{32}) : \sqrt[3]{4}$ b) $(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{0,5}) \cdot \sqrt[4]{2}$

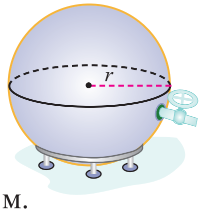
c) $\dfrac{4 - 3\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{2} - \sqrt[4]{8})^2}$ d) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{\sqrt[4]{17 - 12\sqrt{2}}}{\sqrt{3 - \sqrt{8}}}$

2 Расположите числа в порядке возрастания.

a) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[15]{30}$ b) $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[10]{25}$, $\sqrt[6]{3 \cdot \sqrt[5]{3}}$ c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

3 Освободите знаменатель дроби от иррациональности.

a) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{3}}$ b) $\dfrac{6}{\sqrt[5]{8}}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{2}}$ d) $\dfrac{9}{\sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{2}}$



4 Объем шара радиусом r вычисляется по формуле

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

a) Вычислите объем шарообразного бака радиусом 1,5м.

b) Найдите радиус бака с объемом $\dfrac{28\pi}{3}$. Результат округлите до десятых.

5 Вычислите. a) $\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt[6]{2 + \sqrt{3}}}$ b) $\dfrac{\sqrt[6]{4 - \sqrt{15}}}{\sqrt{4 - \sqrt{15}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}}$

6 Внесите множитель под знак корня.

a) $2\sqrt[4]{3}$ b) $-3\sqrt[4]{2}$ c) $a\sqrt[4]{3}$, $a > 0$ d) $a\sqrt[4]{3}$, $a < 0$ e) $c\sqrt[4]{\dfrac{2}{c}}$ f) $c\sqrt[4]{-\dfrac{2}{c}}$

7 Упростите. a) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{b^3\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$ c) $\dfrac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b} + \sqrt[3]{b}}$

8 Упростите: a) $\dfrac{a^{\frac{1}{6}} + 5}{25 - a^{\frac{1}{3}}}$ b) $\dfrac{b - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}}}{a - 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$

9 Установите соответствие для равенств.

1. $\sqrt[4]{a^4} = a$ 2. $\sqrt[3]{a^3} = -a$ 3. $\sqrt[6]{a^6} = |a|$

a) верно при любых значениях a.

b) верно только при $a \geq 0$.

c) верно только при $a = 0$.

10 Решите уравнения.

a) $0,5x^4 + 1 = 9$

b) $\sqrt[3]{2x - 4} = 1$

c) $\sqrt[4]{3x + 4} = 1$

11 Упростите выражение при $a < 0$: $a^2 \cdot \sqrt{a^2} + \sqrt[3]{a^9} - 2\sqrt[4]{a^{12}}$

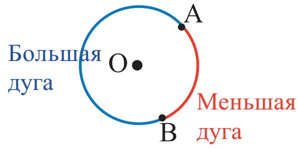
12 Найдите $(\sqrt[8]{3} + 1) \cdot (\sqrt[4]{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$, если $\sqrt[8]{3} = a + 1$

13 При каких значениях переменной выражение имеет смысл?

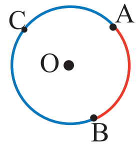
a) $\sqrt[8]{x - 3}$ b) $\sqrt[5]{x - 1}$ c) $\sqrt[4]{2 - x}$ d) $\sqrt[6]{-x}$

Окружность. Центральный угол. Дуга окружности.

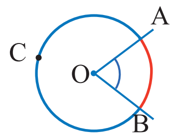
Центральный угол. Градусная мера дуги.



Дуга окружности. Если отметить на окружности точки A и B, то окружность разделится на две дуги: большую дугу (мажорная дуга) и меньшую дугу (минорная дуга). Если точка C является какой-либо точкой дуги AB, то $\smile ACB = \smile AC + \smile CB$ Если точки A и B являются концами диаметра, то каждая дуга является полуокружностью.

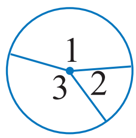


Центральный угол. Угол, вершина которого находится в центре окружности, называется центральным углом. Дугу окружности можно измерять в градусах. Градусная мера дуги равна градусной мере соответствующего центрального угла: $\smile AB = \angle AOB$

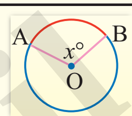
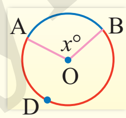
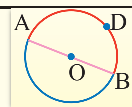


Сумма всех центральных углов окружности, не имеющих общую внутреннюю точку, равна 360°.

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$$

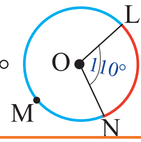


Дуги окружности и их величины

Дуги	Величины	
Минорная дуга, меньшая дуга	Градусная мера минорной дуги меньше 180° и равна градусной мере соответствующего центрального угла. $\smile AB = \angle AOB$	
Мажорная дуга, большая дуга	Градусная мера мажорной дуги больше 180° и ее значение равно разности 360° и соответствующей минорной дуги. $\smile ADB = 360^\circ - \smile AB$	
Полуокружность	Градусная мера полуокружности равна 180° $\smile ADB = 180^\circ$	

Пример: $\smile LN$ – минорная дуга: $\smile LN = 110^\circ$

$\smile LMN$ – мажорная дуга : $\smile LMN = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

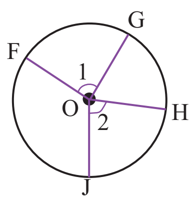


Конгруэнтные дуги

Дуги окружности, с равными градусными мерами, являются конгруэнтными дугами.

Если $\angle 1 \cong \angle 2$, то $\smile FG \cong \smile HJ$

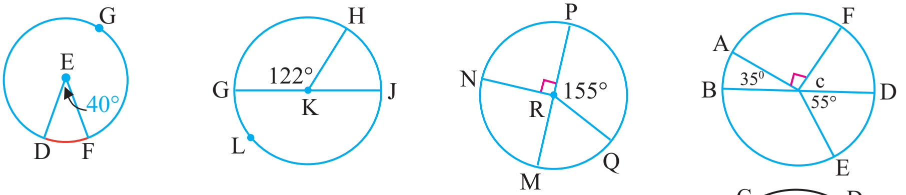
Если $\smile FG \cong \smile HJ$, то $\angle 1 \cong \angle 2$



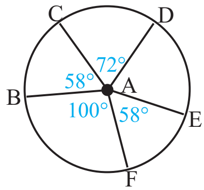
Окружность. Центральный угол. Дуга окружности.

Обучающие задания

1 По рисунку, запишите названия минорной дуги, мажорной дуги и полуокружности. Определите их градусные меры.

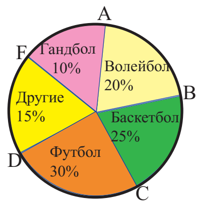


2 Определите градусную меру дуг. Какие дуги конгруэнтны?



1. ⌣BC и ⌣EF 2. ⌣BC и ⌣CD
3. ⌣ CD и ⌣DE 4. ⌣BFE и ⌣CBF

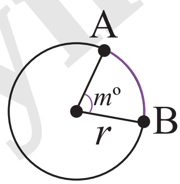
3 Найдите градусные меры дуг, соответствующие данным на диаграмме.



Длина дуги

Какую часть составляет центральный угол от всей окружности, такую же часть длина дуги составляет от длины всей окружности.

Длина дуги в 1° равна $\frac{1}{360}$ части длины окружности.



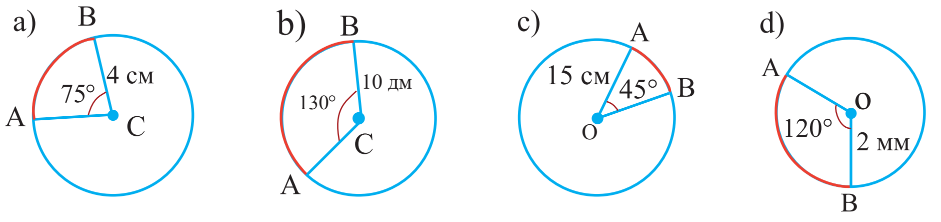
Длина дуги, соответствующей центральному углу с градусной мерой $m°$, составляет $\frac{m}{360}$ части длины окружности: $l = \frac{m}{360} \cdot 2\pi r$

Длина дуги выражается единицами измерения длины (мм, см, м, и т.д.)

Пример 1. Длина окружности равна 72 см. Найдите длину дуги соответствующий центральному углу 45°.
Решение: Так как центральный угол 45° составляет $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ часть полного угла, то длина искомой дуги: $l = \frac{1}{8} \cdot 72 = 9$ (см)

Пример 2. Найдите длину дуги соответствующей центральному углу 72° в окружности радиусом 15 см.
Решение: поставляя значения $m = 72$, $r = 15$ в формулу длины дуги находим: $l = \frac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 15 = 6\pi \approx 18{,}85$ (см)

4 По данным рисунка найдите длину дуги AB. Результат округлите до сотых.



5 Найдите длину дуги l, зная радиус окружности и градусную меру центрального угла. Результат округлите до сотых.

a) $r = 3$ см, $m = 45°$ b) $r = 7$ м, $m = 80°$ c) $r = 8$ м, $m = 120°$

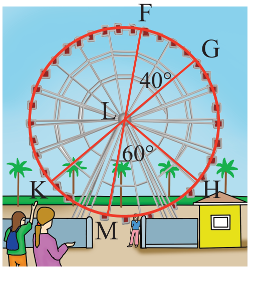
6 Длина минутной стрелки часов 20 см. Найдите длину дуги, которую начертит конец минутной стрелки с 12:00 до 12:30?

7 Кругообразная посевная площадь была разделена на равные части для выращивания различных растений, как показано на рисунке.

a) Найдите градусную меру дуг соответствующую к частям посева фасоли, перца и помидоров.

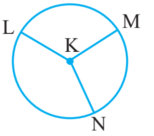
b) Найдите длину дуги, соответствующую каждой части, если диаметр посевной площади 120 м.

8 Диаметр карусели FM равна 30 м. По данным рисунка найдите длину дуг.



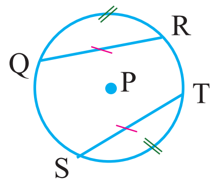
1) ⌣FG 5) ⌣FKH
2) ⌣MF 6) ⌣GHM
3) ⌣GH 7) ⌣MKG
4) ⌣MH 8) ⌣HGF

9 Окружность с радиусом 5 см разделена на дуги точками L, M и N в отношении 5 : 3 : 4.
Найдите: a) градусные меры; б) длины этих дуг.



Окружность. Хорда.

Теорема о конгруэнтных хордах



Теорема 1. Хорды, стягивающие конгруэнтные дуги окружности, конгруэнтны.

Обратная теорема 1. Дуги, стягиваемые конгруэнтными хордами окружности, конгруэнтны.

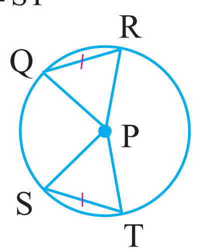
1) Если $\smile QR \cong \smile ST$, то $QR \cong ST$ 2) Если $QR \cong ST$, то $\smile QR \cong \smile ST$

Обучающие задания

1 **Изучите доказательство теоремы 1.** Обозначив соответствующие точки другими буквами, напишите доказательство теоремы заново.

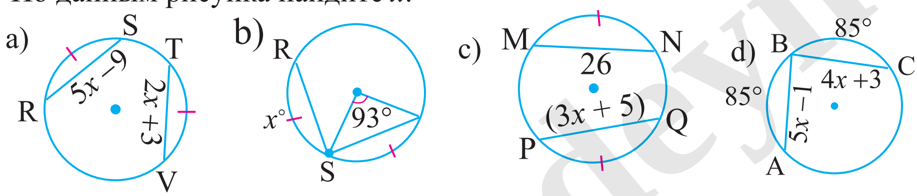
Доказательство теоремы 1: Если $\smile QR \cong \smile ST$, то $QR \cong ST$

Утверждение	Обоснование
1. $\smile QR \cong \smile ST$	1. Дано
2. $\angle QPR \cong \angle SPT$	2. Центральные углы, соответствующие конгруэнтным дугам
3. $QP \cong RP \cong SP \cong TP$	3. Радиусы окружности
4. $\Delta QPR \cong \Delta SPT$	4. По признаку СУС
5. $QR \cong ST$	5. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников.

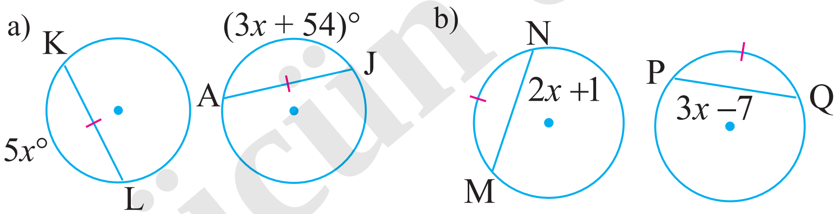


2 Аналогичным способом докажите обратную теорему 1.

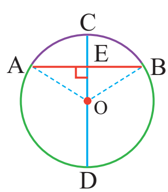
3 По данным рисунка найдите x.



4 Найдите x, если окружности конгруэнтны.



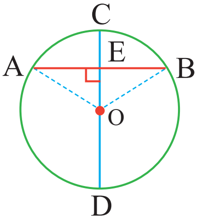
Теорема о серединном перпендикуляре хорд



Теорема 2. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и соответствующую дугу пополам.

Если $CD \perp AB$, то $AE \cong EB$ və $\smile AC \cong \smile CB$

Доказательство теоремы 2.

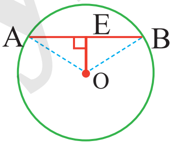


Дано: O – центральный угол, $CD \perp AB$
Докажите: $AE \cong EB$, $\smile AC \cong \smile CB$,
Начертите радиусы OA и OB окружности.

Утверждение	Обоснование
1. $AB \perp CD$	1. Дано
2. $\angle AEO$ и $\angle BEO$ прямые углы	2. Перпендикулярные прямые пересекаются под прямым углом.
3. $OA \cong OB$	3. Радиусы окружности конгруэнтны
4. $\Delta AOE \cong \Delta BOE$	4. Конгруэнтность прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе
5. $AE \cong BE$	5. Соответствующие стороны конгруэнтных треугольников.
6. $\angle AOE \cong \angle BOE$	6. Соответствующие углы конгруэнтных треугольников.
7. $\smile AC \cong \smile CB$	7. Соответствующие дуги конгруэнтных центральных углов конгруэнтны.

Следствие 1. Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, делит хорду и ее дугу пополам.
Следствие 2. Центр окружности расположен на серединном перпендикуляре хорды. Серединный перпендикуляр хорды проходит через центр окружности.

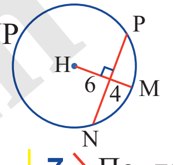
Пример. Найдите расстояние от центра до хорды длиной 30 единиц в окружности радиусом 17 единиц.



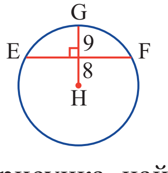
Если $OE \perp AB$, то $AE = EB = 30 : 2 = 15$. Из ΔAOE по теореме Пифагора имеем:
$OE^2 = OA^2 - AE^2 = 17^2 - 15^2 = 64$, $OE = 8$

5 Найдите длину хорды, по данным рисунка. H - центр окружности.

a) NP

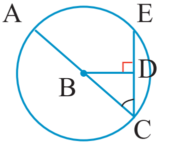


b) EF

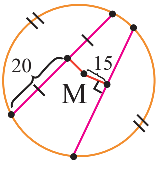


6 Диаметр окружности с центром в точке B равен 30 единицам, $\angle ACE = 45°$.

Найдите:
a) Длину отрезка BD
b) Длину отрезка DC
c) Длину хорды CE



7 По данным рисунка найдите радиус окружности. M - центр окружности.

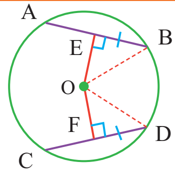


Окружность. Хорда

Теорема о хордах, находящихся на одинаковом расстоянии от центра окружности

Теорема 3. Конгруэнтные хорды окружности находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности..

Если $AB \cong CD$ $OE \perp AB$ $OF \perp CD$, то $OE \cong OF$



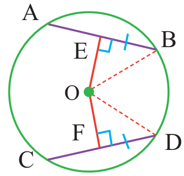
Обратная теорема 3. Хорды, находящиеся на одинаковом расстоянии от центра окружности, конгруэнтны.

Доказательсво теоремы 3

Дано: Окружность с центром O, $AB \cong CD$

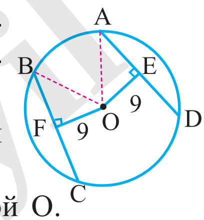
$OE \perp AB$ $OF \perp CD$

Докажите: $OE \cong OF$



Доказательство (текстовое): Прямая, проходящая через центр окружности и перпендикулярная хорде, делит хорду и стягивающую ее дугу пополам. OE и OF - серединные перпендикуляры конгруэнтных хорд AB и CD. $EB \cong FD$, так как они являются половиной конгруэнтных хорд. Начертим радиусы окружности OB и OD: $OB \cong OD$. Прямоугольные треугольники, ΔOEB и ΔOFD конгруэнтны (по катету и гипотенузе). Так как OE и OF являются соответствующими сторонами данных треугольников, то они конгруэнтны: $OE \cong OF$. Теорема доказана.

Задача. Хорды AD и BC находятся на одинаковом расстоянии от центра окружности. OE=OF=9. Если радиус окружности равен 41 единице, то найдите AD и BC.



Решение: Так как хорды AD и BC находятся на одинаковом расстоянии от центра, то они конгруэнтны: $AD \cong BC$.

$OE \perp AD$ и $OF \perp BC$. Соединим точки A и B с точкой O.

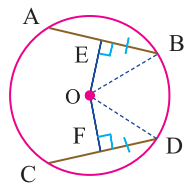
В прямоугольном треугольнике ΔAEO: $AE^2 + OE^2 = OA^2$

$AE^2 + 9^2 = 41^2$; $AE^2 = 1600$; $AE = 40$; $AD = 2AE = 2 \cdot 40 = 80$

Так как $AD \cong BC$, $BC = 80$

8 **Докажите обратную теорему 3 самостоятельно.**

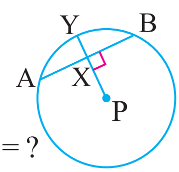
Дано: Окружность с центром O, $OE \cong OF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ **Докажите:** $AB \cong CD$.



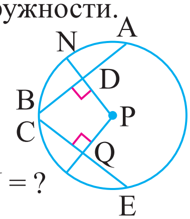
План доказательства: Используйте конгруэнтность треугольников.

9 Найдите требуемое по данным и рисунку, . P - центр окружности.

a) **Дано:** $PY = 13$, $AB = 10$.
Найдите: $BX = ?$; $PX = ?$

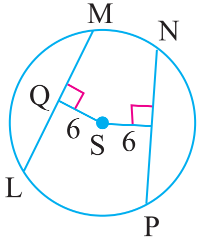


b) **Дано:** $PD = 10$
$PQ = 10$
$QE = 24$
Найдите: $AB = ?$, $PN = ?$

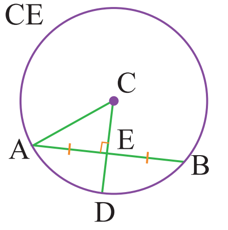


Окружность. Хорда

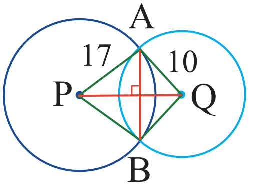
10 a) **Дано:** В окружности с центром S:
$LM = x + 8$ и $PN = 2x$
Найдите: радиус окружности.



b) **Дано:** Окружность с центром C. $CD \perp AB$
Хорда - 8 см
Радиус - 5 см
Найдите: CE



11 Отрезок AB перпендикулярен отрезку, соединяющему центры окружностей P и Q. Найдите PQ, если $AP = 17$, $AQ = 10$, $AB = 16$.

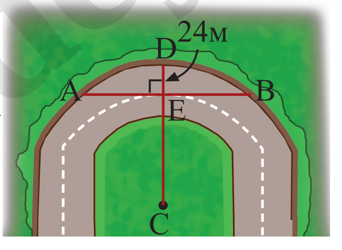


12 **Вопрос открытого типа.** 1) Начертите неравные хорды окружности и их серединные перпендикуляры. Какая из хорд ближе к центру: большая или меньшая?

2) Начертите две окружности с разными радиусами. В каждой окружности проведите равные хорды и покажите центральные углы, соответствующие этим хордам. Какой из центральных углов больше? Изложите свою мысль.

13 В окружности с радиусом 5 см найдите расстояние между двумя параллельными хордами длиной 6 см и 8 см. Сколько решений имеет задача?

14 Кривая часть дороги является частью окружности с центром C и радиусом 120 м. Найдите длину отрезка AB, если длина DE равна 24 м.



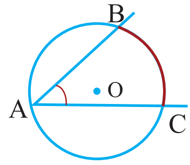
15 Решите задачу, начертив соответствующие рисунки.

a) Диаметр окружности 30 см, а длина хорды 18 см. На каком расстоянии от центра окружности находится хорда?
b) Хорда длиной 12 см находится на расстоянии 8 см от центра окружности. Найдите радиус окружности.
c) Диаметр окружности 52 см, расстояние от центра окружности до хорды 10см. Найдите длину хорды.

Угол, вписанный в окружность.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется углом вписанным в окружность. Дуга, соответствующая углу, вписанному в окружность, называется дугой, на которую опирается этот угол.

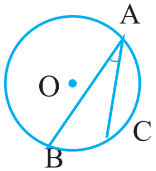
$\angle BAC$ является углом вписанным в окружность с центром O, а BC – дуга, на которую опирается этот угол.



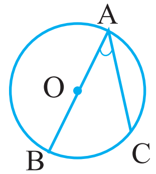
Ниже показаны три разных угла, вписанных в окружность.

Центр окружности лежит вне вписанного угла.	Центр окружности лежит на стороне вписанного угла	Центр окружности лежит внутри вписанного угла

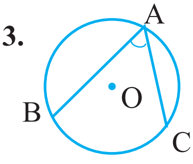
1.



2.



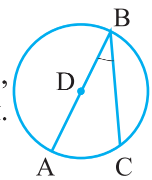
3.



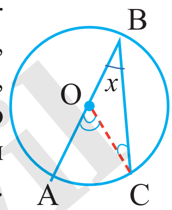
Угол, вписанный в окружность.

Теорема 1. Градусная мера угла, вписанного в окружность, равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

$\angle ABC = \dfrac{\smile AC}{2}$

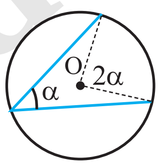


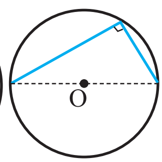
Доказательство (текстовое). OB и OC – радиусы окружности и ΔBOC – равнобедренный треугольник. Значит, $\angle B = \angle C$. Так как $\angle AOC$ является внешним углом ΔBOC, то $\angle AOC = \angle B + \angle C$. Если примем, что $\angle B = \angle C = x$, то $\angle AOC = 2x$. Так как градусные меры центрального угла и опирающейся на него дуги равны, то $\smile AC = \angle AOC = 2x$. Следовательно, $\angle ABC = \dfrac{\smile AC}{2}$. Запишите доказательство теоремы в виде двухстолбчатой таблицы.



Следствие 1. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

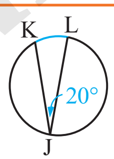
Следствие 2. Угол, вписанный в окружность и опирающийся на диаметр (полуокружность), является прямым углом.

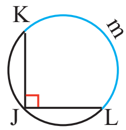


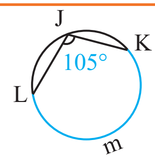


Обучающие задания

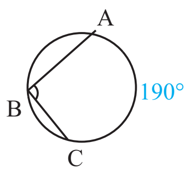
1 Найдите градусную меру дуги, на которую опирается угол.

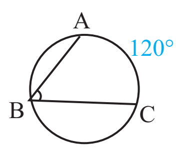


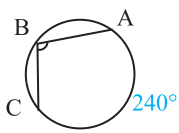




2 Найдите градусную меру вписанного угла, опирающегося на заданную дугу окружности.



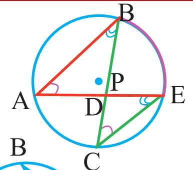




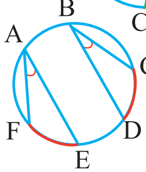
Угол, вписанный в окружность

Конгруэнтные углы, вписанные в окружность

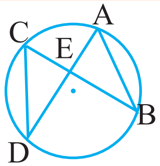
Следствие 3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны. $\angle EAB \cong \angle BCE$, $\angle ABC \cong \angle AEC$.



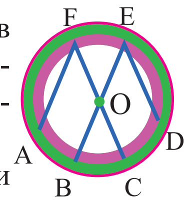
Следствие 4. Вписанные углы, опирающиеся на конгруэнтные дуги, конгруэнтны.
Если $\smile FE \cong \smile CD$ то, $\angle FAE \cong \angle DBC$



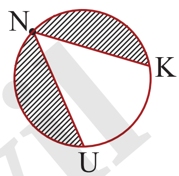
3 **Дано:** $CD \cong AB$
Докажите: $\Delta CDE \cong \Delta ABE$
План доказательсва: Воспользуйтесь признаком конгруэнтности треугольников по двум углам и одной стороне (УСУ)



4 1) Во многих случаях, в качестве коммерческих знаков используют логотипы в форме круга. На рисунке изображен логотип, дизайн которого состоит из двух вписанных и центральных углов.
a) Напишите названия этих углов. b) Найдите $\angle AFC$ и $\angle BED$, если $\smile AC \cong \smile BD$, $\smile AF = 90°$, $\smile FE = °45$, $\smile ED = 90°$.

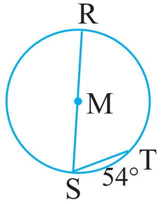


2) Найдите $\angle KNU$, если на логотипе $\smile NK \cong \smile NU$, $\smile NK = 130°$.
3) Создайте свой логотип.

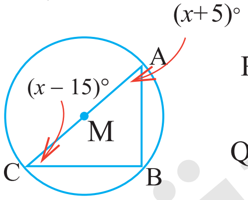


5 По данным рисунка (M - центр окружности), найдите:

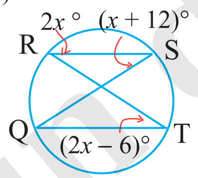
1) $\angle S$



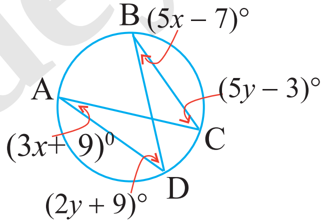
2) $\smile CB$



3) $\angle Q$, $\angle T$

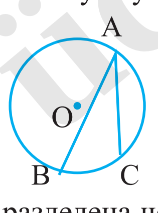


4) $\angle D$, $\angle B$

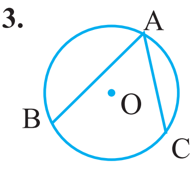


6 Доказательство теоремы 1 дано для второго случая. Докажите эту теорему по 1-му и 3-му случаю вписанного угла.

1.



3.



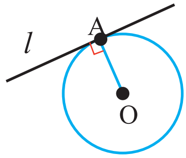
7 Окружность разделена четырьмя точками в отношении $3 : 4 : 5 : 6$. Найдите углы четырехугольника с вершинами в этих точках.

Касательная к окружности

Касательная. Признак касательной

Прямая, имеющая одну общую точку с окружностью, называется касательной.

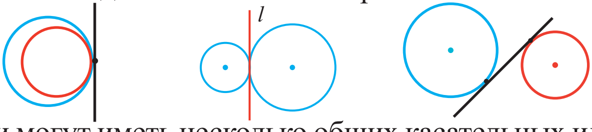
Теорема 1. Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



Прямая l является касательной к окружности. Значит, $l \perp AO$

Обратная теорема (признак касательной): Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному в эту точку, является касательной окружности.

Прямая, касающаяся обеих окружностей, называется общей касательной этих окружностей. Окружности, касаясь друг друга изнутри или извне, могут иметь общую касательную в одной точке. Также окружности могут касаться одной касательной в разных точках.



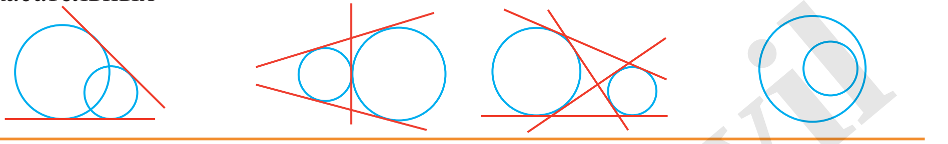
Две окружности могут иметь несколько общих касательных или вообще не иметь общих касательных.

Имеет 2 общих касательных

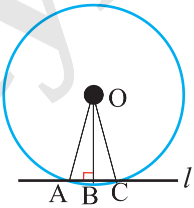
Имеет 3 общих касательных

Имеет 4 общих касательных

Не имеет общих касательных



Доказательство теоремы 1. Если прямая l – касательная к окружности, значит, она имеет единственную общую точку с окружностью. Допустим, что прямая l не перпендикулярна радиусу OA. Проведем $OB \perp l$ и на прямой l выделим отрезок $AB = BC$. Тогда $OC = OA = r$, так как $\Delta AOB \cong \Delta COB$. Значит, точка C также находится на окружности. То есть прямая l имеет с окружностью две общие точки, что противоречит условию. Значит, $l \perp OA$.

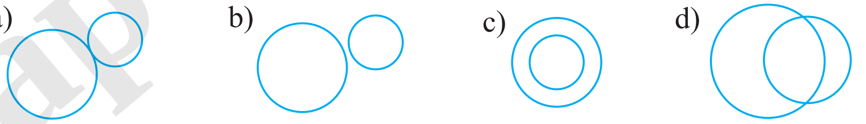


Обучающие задания

1 Согласно рисунку объясните: почему MN нельзя назвать касательной к окружности с центром P, а ML можно назвать касательной?

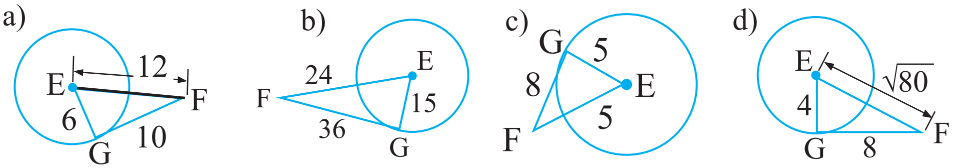
2 Нарисуйте окружности в тетради. Начертите их общие касательные. Отметьте окружности, не имеющие общих касательных.

a) b) c) d)

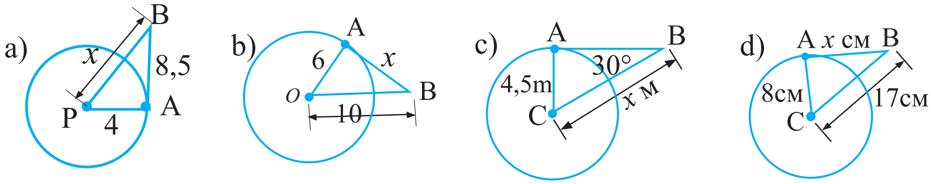


Касательная к окружности

3 По какому рисунку можно сказать, что отрезок GF, является касательной к окружности? Чтобы ответить на этот вопрос, запишите теорему, обратную теореме Пифагора и примените ее к решениям задач. Точка E является центром окружности.

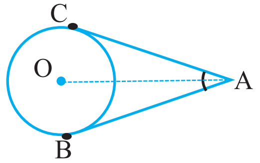


4 Найдите x, зная, что AB является касательной к окружности.



Свойства касательных, проведенных к окружности из одной точки

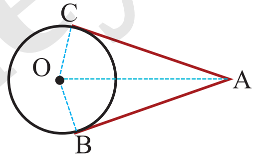
Теорема 2. Отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, конгруэнтны, и центр окружности находится на биссектрисе угла, образованного касательными.



AB и AC – касательные, проведенные из точка A к окружности с центром O.
$AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

5 Докажите теорему 2.

Дано: AB и AC – отрезки касательных, проведенных к окружности (с центром O) из точки A.

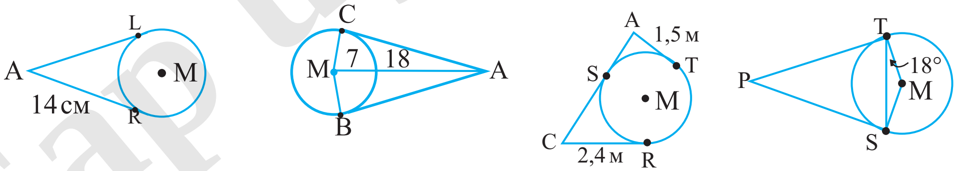


Докажите: $AB \cong AC$, $\angle BAO \cong \angle CAO$.

План доказательства: Начертите радиусы окружности OB и OC и отрезок AO. Используйте конгруэнтность соответствующих треугольников.

6 На рисунке из точки вне окружности (с центром M) проведены касательные к окружности. По данным рисунка найдите.

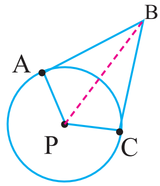
a) AL b) AB c) AC d) $\angle TPS$



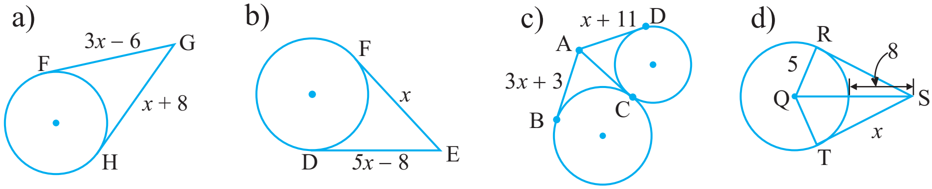
Касательная к окружности

7 Из точки B проведены касательные к окружности с центром P. Запишите, на каком основании верно каждое из данных утверждений.

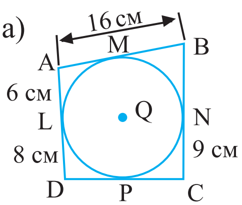
a) $BA \cong BC$ b) $PA \cong PC$ c) $\Delta PAB \cong \Delta PCB$

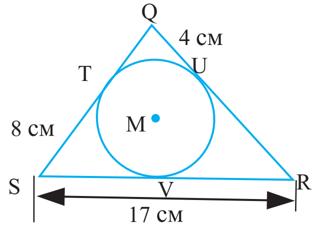


8 Из точки вне окружности проведены касательные к окружности. По данным рисунка найдите x

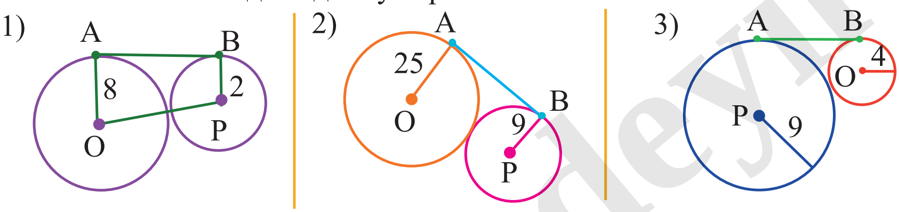


9 По данным рисунка, найдите длины сторон многоугольников и их периметр.



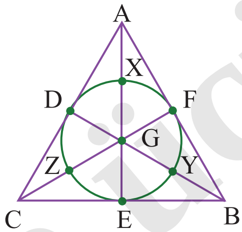


10 AB – общая касательная окружностей с центром O и P, которые касаются извне. Найдите длину отрезка AB.

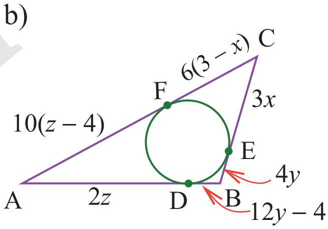


11 По данным рисунка найдите периметр ΔABC.

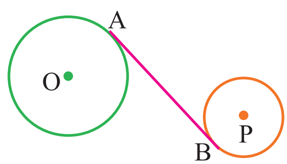
a) $BY = CZ = AX = 2{,}5$
диаметр окружности $EX = 5$



b)

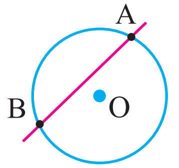


12 AB – касательная к окружностям с центром O и P. Радиусы окружностей соответственно равны 15 см и 12 см. Найдите длину отрезка AB, если OP = 36 см.



Углы, образованные секущими и касательными

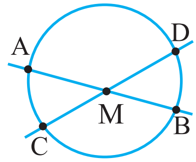
Прямая, имеющая две общие точки с окружностью, называется секущей окружности.



Углы между двумя секущими

Вершина угла находится внутри окружности

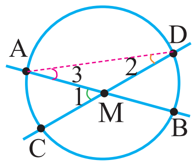
Теорема. Если вершина угла, образованного двумя секущими, находится внутри окружности, то градусная мера угла равна полусумме величин дуг на которые опирается этот угол и угол вертикальный данному.



$$\angle AMC = \frac{\smile AC + \smile DB}{2} \qquad \angle AMD = \frac{\smile AD + \smile BC}{2}$$

1 Завершите доказательство теоремы в тетради.
Дано: AB и CD – секущие.

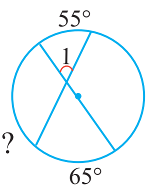
Докажите: $\angle 1 = \dfrac{\smile AC + \smile DB}{2}$



Утверждение	Обоснование
1. $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$	1. $\angle 1$ является ______ углом ΔAMD
2. $\angle 2 = \dfrac{\smile AC}{2}$	2.__________
3. $\angle 3 = \dfrac{\smile DB}{2}$	3.__________
4. $\angle 1 = \dfrac{\smile AC + \smile DB}{2}$	4.__________

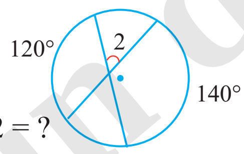
2 По данным рисунка, найдите требуемое.

a)



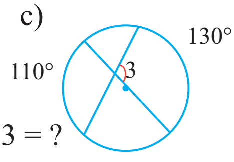
$\angle 1 = ?$

b)



$\angle 2 = ?$

c)

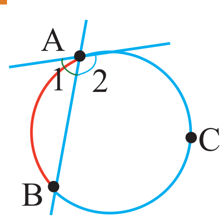


$\angle 3 = ?$

Углы между касательной и секущей

Вершина угла находится на окружности

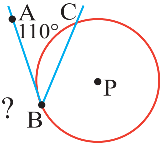
Теорема. Если вершина угла, образованного касательной и секущей, находится на окружности, то градусная мера угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.



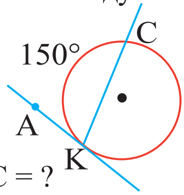
$$\angle 1 = \frac{\smile AB}{2} \qquad \angle 2 = \frac{\smile ACB}{2}$$

Углы, образованные секущими и касательными

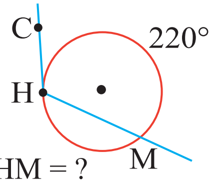
3 По данным рисунка, найдите угол между касательной и секущей.

a) 

$\angle ABC = ?$

b) 

$\angle AKC = ?$

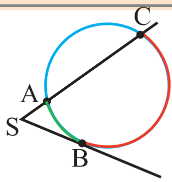
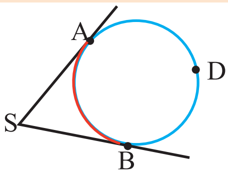
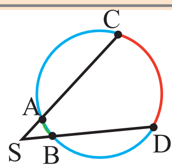
c) 

$\angle CHM = ?$

Углы, образованные касательной и секущей.

Вершина угла находится вне окружности

Теорема 1. Градусная мера угла, образованного секущей и касательной, двумя касательными, двумя секущими окружности (если вершина угла находится вне окружности), равна половине разности градусных мер дуг, находящихся между сторонами угла.

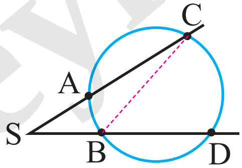
1. Угол, образованный касательной и секущей	2. Угол, образованный двумя касательными	3. Угол, образованный двумя секущими
 $\angle S = \dfrac{\smile BC - \smile AB}{2}$	 $\angle S = \dfrac{\smile ADB - \smile AB}{2}$	 $\angle S = \dfrac{\smile CD - \smile AB}{2}$

4 Завершите доказательство теоремы для третьего случая. Доказательство теоремы для 1-го и 2-го случая запишите самостоятельно.

3) Угол, образованный двумя секущими.

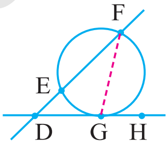
Дано: SC и SD секущие окружности.

Докажите: $\angle S = \dfrac{\smile CD - \smile AB}{2}$

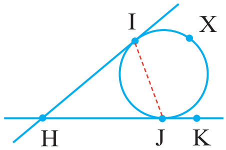


Утверждение	Обоснование
1. $\angle CBD = \angle CSB + \angle SCB$	1. $\angle CBD$ внешний угол ΔSBC
2. $\angle CBD = \dfrac{1}{2} \smile CD$	2.__________
3. $\angle SCB = \dfrac{1}{2} \smile AB$	3.__________
4. $\angle CSB = \angle CBD - \angle SCB$	4.__________
5. $\angle CSB = \dfrac{1}{2} \smile CD - \dfrac{1}{2} \smile AB$	5.__________

1) Угол, образованный секущей и касательной

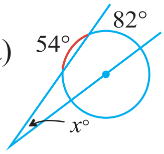


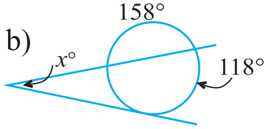
2) Угол, образованный двумя касательными

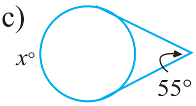


Углы, образованные секущими и касательными

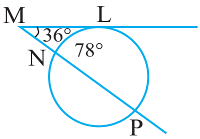
5 Найдите требуемый угол или дугу, обозначенный через *x*.

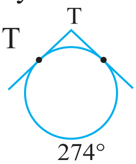
a) 

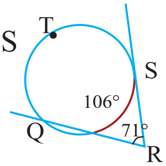
b) 

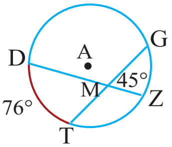
c) 

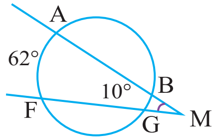
6 Найдите требуемый угол или дугу.

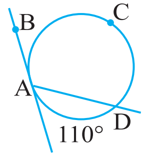
a) ⌣LP 

b) ∠T 

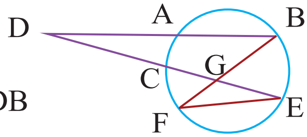
c) ⌣QTS 

d) ⌣GZ 

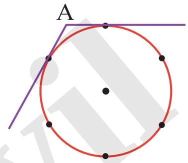
e) ∠AMF 

f) ∠DAB 

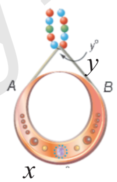
7 **Дано:** ⌣AB = 108^0, ⌣FE = 118^0,
∠EGB = 52° ∠EFB = 30°
Найдите: a) ⌣AC b) ⌣ CF c) ∠EDB



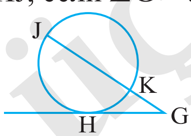
8 В городе шесть зданий почты, находящихся на одинаковом расстоянии от центральной и соседней почты и расположенных по кругу. Нармин находится в точке A, откуда может видеть только два здания. Найдите градусную меру угла A.



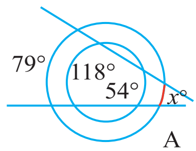
9 Нити, на которой подвешен медальон в форме круга являются касательными к медальону. Найдите градусную меру угла, образованного нитями медальона, если дуга *x* равна 220°.



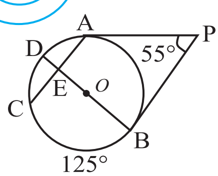
10 1) JK– диаметр окружности, GH– касательная. a) Объясните интервал изменения ∠G. b) Найдите ⌣HK и ⌣HJ, если ∠G = 32°.



2) На рисунке изображены концентрические окружности. Найдите *x*, исходя из данных.



11 **Дано:** PA и PB касательные, BD - диаметр
∠APB = 55^0, ⌣CB = 125^0
Найдите: a) ⌣AB b) ∠DEC c) ⌣AD
d) ∠PBD e) ∠PAC

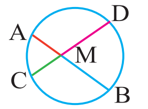


Отрезки секущих и касательных

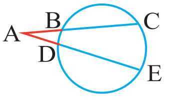
Длина отрезков, секущих окружность

Теорема 1. При пересечении двух хорд, произведение отрезков одной хорды, полученных точкой пересечения, равно произведению отрезков второй хорды.

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$

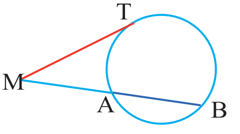


Теорема 2. Если из точки A провести две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках B и C, D и E, то верно равенство $AC \cdot AB = AE \cdot AD$.



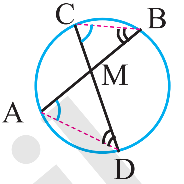
Теорема 3. Если из точки M проведены прямая, которая пересекает окружность в точках A и B и касательная к окружности в точке T, то верно равенство:

$$MT^2 = MA \cdot MB$$



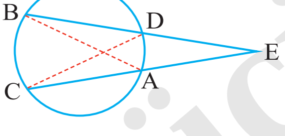
1 Завершите доказательство **теоремы 1.**

Утверждение	Обоснование
1. $\angle A \cong \angle C$	1. ____________ к одинаковой дуге
2. $\angle D \cong \angle B$	2. ______________ к одинаковой ...
3. $\Delta AMD \sim \Delta CMB$	3. ____________
4. $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{DM}{MB}$	4. ________________
5. $AM \cdot MB = CM \cdot MD$	5. ____________________



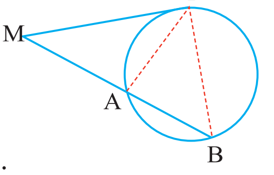
2 Докажите теорему 2.

Дано: EB и EC секущие.
Докажите: $EB \cdot ED = EC \cdot EA$
План доказательства:
Воспользуйтесь подобием ΔABE и ΔDCE.



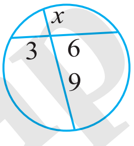
3 Докажите теорему 3.

Дано: MT касательная, MB секущая к окружности.
Докажите: $MT^2 = MA \cdot MB$
План доказательства: Воспользуйтесь подобием ΔMTA и ΔMBT

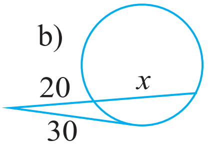


4 Найдите *x*, исходя из данных на рисунке.

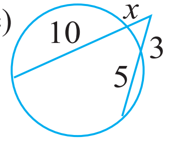
a)



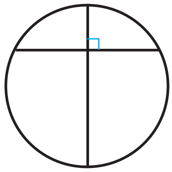
b)

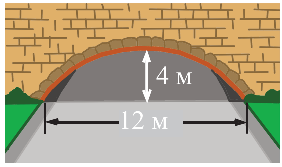


c)



5 По данным на плане туннеля найдите радиус окружности, содержащей дугообразную часть.



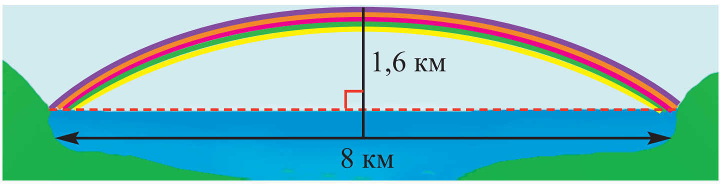


Указание: для решения запишите измерения на соответствующем схематическом изображении.

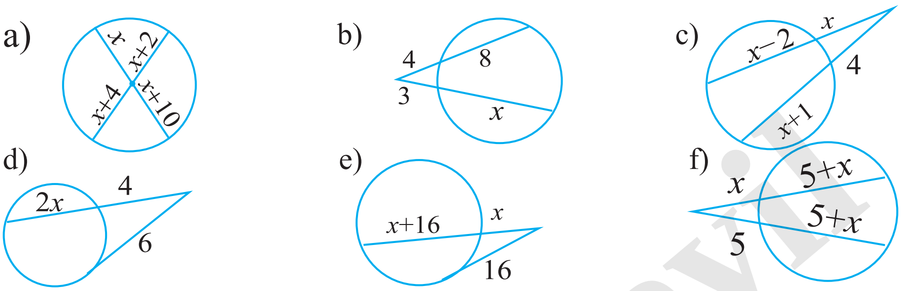
6 На самом деле радуга – это окружность. Мы видим только какую-то ее часть – дугу. По данным рисунка, найдите:

а) радиус окружности, содержащий дугу радуги;

б) длину дуги радуги.

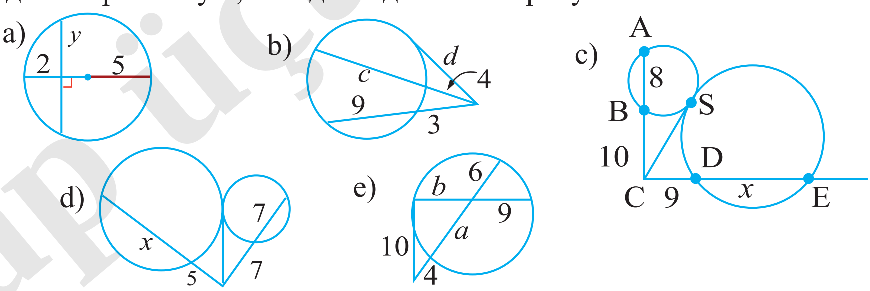


7 Исходя из данных на рисунке, найдите переменную.



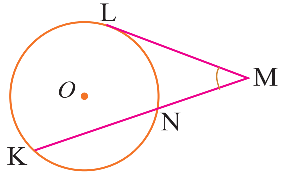
8 **Измерение.** Лейла стоит на расстоянии 4 м от дерева, а Кянан стоит у подножья дерева. Расстояние между Лейлой и Кянаном 5 м. Изобразите эту ситуацию схематически и найдите диаметр дерева. **Указание.** На схеме, отрезок, соединяющий точки нахождения Лейлы и Кянан примите за касательную окружности.

9 Найдите переменную, исходя из данных на рисунке.

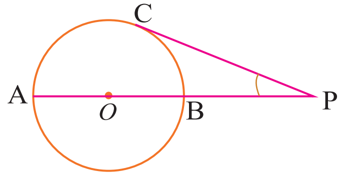


Обобщающие задания

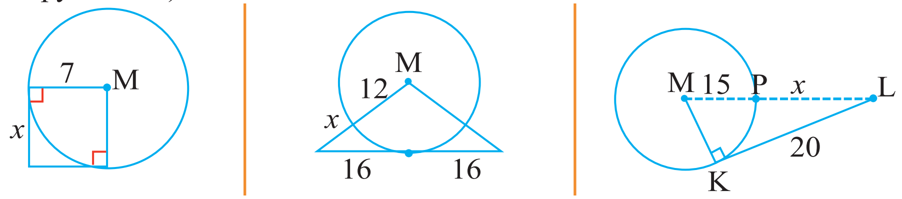
1 **Дано:** ML – касательная к окружности с центром O, MK– секущая.
$\smile LN : \smile NK : \smile KL = 3 : 4 : 5$
Найдите: $\angle LMK$



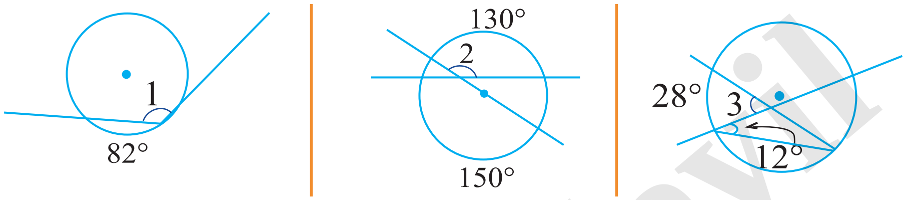
2 **Дано:** CP – касательная к окружности с центром O, AP – секущая, содержащая диаметр.
$\smile AC : \smile CB = 7 : 2$
Найдите: $\angle CPA$



3 Найдите переменную, исходя из данных на рисунке (M– центр окружности).

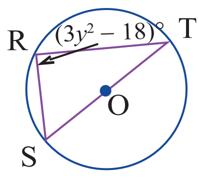


4 Найдите градусную меру углов, отмеченных цифрами.

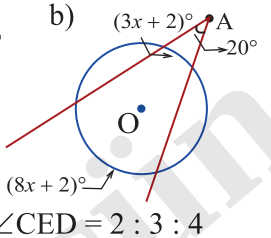


5 Найдите переменную, исходя из данных. O – центр окружности.

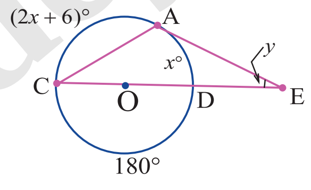
a)



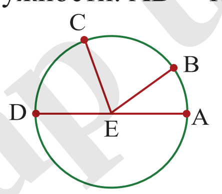
b)



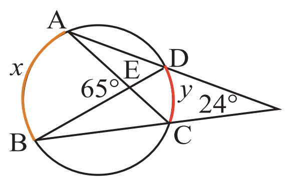
c)



6 $\angle AEB : \angle BEC : \angle CED = 2 : 3 : 4$
Найдите длину дуг, на которые опираются эти углы. E – центр окружности. AD = 12 см

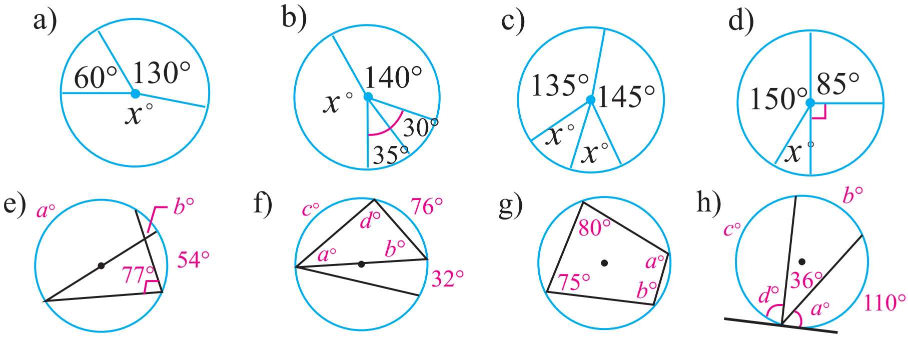


7 Найдите градусную меру дуг AB и CD, по данным рисунка.

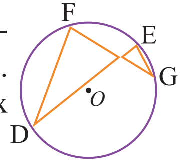


Обобщающие задания

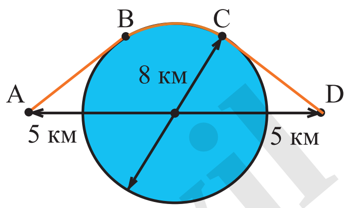
8 Найдите неизвестную, исходя из данных на рисунке. Центр окружности обозначен точкой.



9 В окружности с центром O хорды DF, FG, EG, ED изображены так, что $\smile DF : \smile FE : \smile EG : \smile GD = 5 : 2 : 1 : 7$. По рисунку определите конгруэнтные углы и найдите их градусные меры.

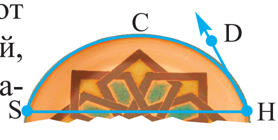


10 Каждый год муниципалитет с целью очистки озера на окраине города проводит благотворительное соревнование по велоспорту. За каждый преодоленный километр спортсмены добровольно платят определенное количество денег. Кянан в этом году также участвует в соревновании. Он заявил организаторам, что за каждый километр расстояния заплатит 5 манат. Гоночная дорога определена по траектории ABCD, показанной на рисунке. Точки A и D, находящиеся на разных сторонах круглого озера , находятся на расстоянии 5 км от центра. Диаметр озера 8 км. AB и CD – касательные, а путь BC – дугообразная дорога вдоль края озера.



a) Сколько километров длина гоночной дороги? Округлите ответ до десятых. б) Сколько (приблизительно) манат заплатит Кянан с целью благотворительности?

11 Во многих случаях археологи обнаруживают части предметов, затем, проведя ряд измерений, химических и физических исследований, восстанавливают их изначальную форму.



a) Если $\angle SHD$, показанный на посуде, изображенной на рисунке, равен 60°, найдите градусную меру дуги $\smile SCH$.

b) Допустим, измерив длину дуги SCH, вы определили, что ее длина равна 9,5 см. Как вы определите длину всей окружности посуды?

Раздел

2

1. Квадратичная функция
2. Уравнение окружности

График квадратичной функции
Нули квадратичной функции
Общий вид квадратичной функции
Решение задач с применением квадратичной функции
Функция $y=|x|$ и ее график

Расстояние между двумя точками
Уравнение окружности
Сектор и сегмент

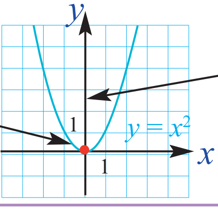
График квадратичной функции

Исследование. Расстояние между телом, брошенным вверх с высоты h_0 (м) со скоростью v_0 (м/сек), и поверхностью земли в момент времени t находится по формуле $h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Как найти наибольшую высоту подъема тела?

Квадратичная функция

При любом $a \neq 0$ функция вида $y = ax^2 + bx + c$ называется квадратичной функцией. Графиком квадратичной функции является парабола.
Если $a = 1, b = 0, c = 0$, квадратичная функция принимает вид $y = x^2$. Ее график показан на рисунке.

Вершиной параболы $y = x^2$ является точка O (0;0).

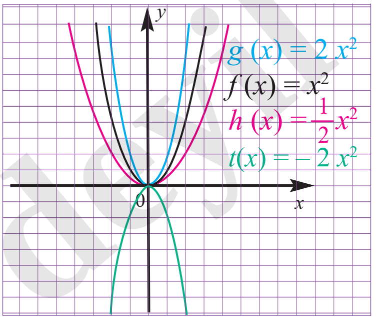


Ось симметрии делит параболу на две части, симметричные относительно оси y, и проходит через вершину параболы.

1. График функции $y = ax^2$

Пример 1. Исследуйте таблицу значений для функции $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$. Определите, к какой функции относится каждый график на рисунке.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = 2x^2$	$h(x) = \frac{1}{2}x^2$	$t(x) = -2x^2$
–3	9	18	4,5	–18
–2	4	8	2	–8
–1	1	2	0,5	–2
0	0	0	0	0
1	1	2	0,5	–2
2	4	8	2	–8
3	9	18	4,5	–18



Если увеличить ординату каждой точки параболы $y = x^2$ в 2 раза, не меняя абсциссу, то получатся точки графика функции $y = 2x^2$.

То есть, график функции $y = 2x^2$ получается растяжением параболы $y = x^2$ от оси абсцисс в два раза.

График функции $y = \frac{1}{2}x^2$ получается сжатием параболы $y = x^2$ к оси абсцисс в два раза.

Парабола $y = \frac{1}{2}x^2$ «шире» параболы, соответствующей функции $f(x) = x^2$. Парабола $y = -x^2$ получается от параболы $y = x^2$ преобразованием симметрии относительно оси абсцисс. Подобным образом параболы $y = -2x^2$ и $y = 2x^2$ симметричны относительно оси абсцисс.

График квадратичной функции

Графиком функции $y = ax^2$ является парабола с вершиной в начале координат и осью симметрии Оy.

- При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.
- При $|a| > 1$ парабола, растягиваясь от оси абсцисс в вертикальном направлении, становится «уже» параболы $y = x^2$.
- При $|a| < 1$ парабола, сжимаясь к оси абсцисс в вертикальном направлении, становится «шире» параболы $y = x^2$.

Обучающие задания

1 Какая из функций является квадратичной?

a) $y = 2x^2 + x - 3$ b) $y = 2x^2 - 5$ c) $y = 5x + 2$ c) $y = -x^2 + 2x$

2 Вычислите значение функции $y = x^2 - 2x + 1$ при:
a) $x = -1$; b) $x = -2$; c) $x = 0$.

3 При каких значениях аргумента значение функции $y = x^2 - x - 3$ равно: a) -1; b) 3; c) -3 ?

4 Используя график функции $y = x^2$, постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = -3x^2$, $y = -\frac{1}{3}x^2$.

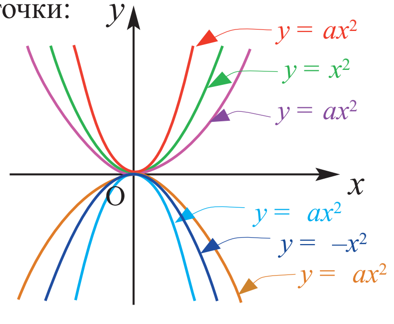
5 С помощью графика функции $y = x^2$ постройте графики нижеследующих функций. Постройте эти графики и с помощью графкалькулятора.

a) $f(x) = 3x^2$ b) $f(x) = -4x^2$ c) $f(x) = -\frac{3}{4}x^2$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

6 Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$, отметьте их точки пересечения.

7 Парабола $y = ax^2$ проходит через точку A(–6; 9).
1) Определите коэффициент a;
2) Проходит ли эта парабола через точки:
a) B(3; 5); b) C(–2; 1)?

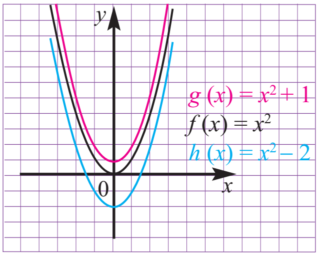
8 По графикам изображенным на рисунке, найдите интервал изменения значения a .



2. График функции $y = x^2 + n$

Пример 2. Функции $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 2$ представлены в виде таблицы и графика. Начертите таблицу и график в тетради. Выясните, как изменится график функции $y = x^2 + n$ в зависимости от значения n.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = x^2 + 1$	$h(x) = x^2 - 2$
–3	9	10	7
–2	4	5	2
–1	1	2	–1
0	0	1	–2
1	1	2	–1
2	4	5	2
3	9	10	7



Построим параболу $y = x^2$ и сдвинем ее на 1 единицу вверх вдоль оси Oy. Вершиной параболы будет точка $(0; 1)$, а Oy останется осью симметрии. Абсцисса каждой точки останется прежней, а ордината увеличится на одну единицу. То есть, ордината точки с абсциссой x новой параболы будет $y = x^2 + 1$

Парабола, соответствующая функции $y = x^2 + 1$ получается сдвигом параболы $y = x^2$ на 1 единицу вверх вдоль оси Oy. Вершина параболы $(0;1)$.

Сравним параболы, соответствующие функциям $y = x^2$ и $y = x^2 - 2$.

Парабола, соответствующая функции $y = x^2 - 2$, получается сдвигом параболы $y = x^2$ вдоль оси Oy на 2 единицы вниз. Вершина параболы $(0; -2)$.

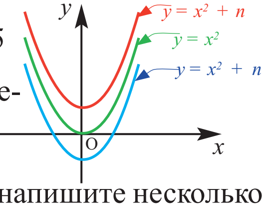
Следовательно, расположение параболы по отношению к n меняется по вертикали вдоль оси Oy. Важно правильно отметить точку вершины параболы.

> График функции $y = ax^2 + n$ получается сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль оси Oy.
> - Парабола сдвигается на $|n|$ единиц вниз вдоль оси Oy, если $n < 0$, а вверх– если $n > 0$.
> - Вершина параболы находится в точке $(0; n)$.

9 Изобразите, схематически, графики заданных функций, при помощи графика функции $y = x^2$.

a) $y = x^2 - 2$ b) $y = x^2 + 3$ c) $y = x^2 + 2$
d) $y = x^2 - 3$ e) $y = x^2 + 0{,}5$ a) $y = x^2 - 1{,}5$

10 По графикам, изображенным на рисунке определите знак n .

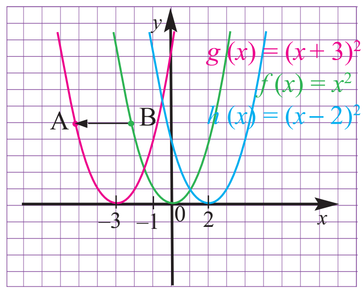


11 Задавая разные значения n в формуле $y = x^2 + n$, напишите несколько функций и постройте их графики с помощью графкалькулятора.

График квадратичной функции

Пример 3. Функции $y = x^2$, $y = (x + 3)^2$, $y = (x - 2)^2$ представлены в виде таблицы и графика. Начертите таблицу и график в тетради. Исследуйте, как изменится график функции $y = (x - m)^2$ в зависимости от значения m.

x	$f(x) = x^2$	$g(x) = (x + 3)^2$	$h(x) = (x - 2)^2$
– 5	25	4	49
– 4	16	1	36
– 3	9	0	25
– 2	4	1	16
– 1	1	4	9
0	0	9	4
1	1	16	1
2	4	25	0
3	9	36	1
4	16	49	4



3. График функции $y = (x - m)^2$

Сдвинем параболу $y = x^2$ на 3 единицы влево. Точкой вершины параболы будет (–3; 0). Точка A $(x_1;y_1)$ на сдвиженной параболе получается сдвигом на три единицы точки B на данной параболе. Поэтому абсцисса точки B будет $x_1 + 3$, а ордината будет такой же как и ордината точки A. Так как ордината произвольной точки на данной параболе равна квадрату абсциссы, то получим $y_1 = (x_1 + 3)^2$. То есть, для точки $(x_1; y_1)$ на сдвиженной параболе будет $y_1 = (x_1 + 3)^2$.

Если параболу $y = x^2$, сдвинем на 3 единицы влево, то получится парабола $y = (x + 3)^2$.

Если параболу $y = x^2$ сдвинем на 2 единицы вправо, то получится парабола, $y = (x - 2)^2$.

Число m меняет положение параболы вдоль оси Ox (по горизонтали).

График функции $y = a(x - m)^2$ получается сдвигом параболы $y = ax^2$ на $|m|$ единиц вдоль оси абсцисс.

- Если $m > 0$, парабола сдвигается вдоль оси Ox вправо, если $m < 0$ - влево.
- m соответствует абсциссе точки вершины параболы. Точкой вершины параболы будет $(m; 0)$.
- Прямая $x = m$ является осью симметрии параболы.

12 Пользуясь графиком функции $y = x^2$, постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = (x + 5)^2$ и $y = (x - 5)^2$.

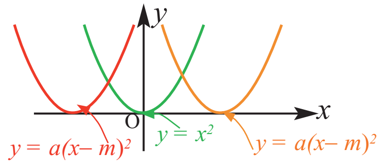
13 Изобразите, схематично, график функции.

a) $y = (x - 2)^2$ b) $y = (x + 4)^2$

c) $y = (x + 2)^2$ d) $y = (x - 4)^2$

e) $y = (x - 1{,}5)^2$ f) $y = (x + 1{,}5)^2$

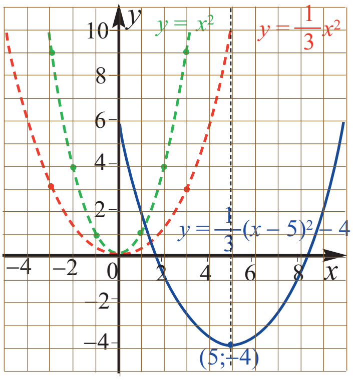
14 Определите знак m, по данным графиков на рисунке.



4. График функции $y = a(x - m)^2 + n$.

Обобщив рассмотренные построения, покажем построение параболы $y = a(x-m)^2 + n$ по графику функции $y = x^2$. Сначала рассмотрим примеры.

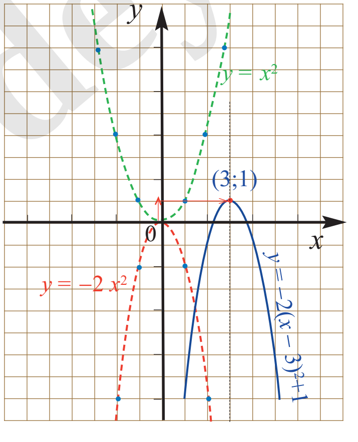
Пример 4. Исследуйте построение графика функции $f(x) = \frac{1}{3}(x-5)^2 - 4$ при помощи сдвига параболы $y = x^2$.



1. Постройте график функции $y = x^2$.
2. Так как $a > 0$, направление ветвей параболы не меняется. Поскольку $a < 1$, парабола «расширяется», потому что при одинаковом значении x значение y будет в 3 раза меньше. Например, точка (3; 9), данная на графике $y = x^2$, для данной функции ($\frac{1}{3}x^2$) будет (3; 3).
3. Отметьте точку (3; – 3), симметричную точке (3; 3) относительно оси Oy.
4. Начертите параболу, проходящую через точки (3; 3), (0; 0), (–3; 3). Это график функции $y = \frac{1}{3}x^2$.
5. Так как $m = 5$, $n = -4$, сдвиньте данную параболу на 5 единиц вправо и 4 единицы вниз. Полученная парабола является графиком функции $f(x) = \frac{1}{3}(x-5)^2 - 4$.

> Точка с координатами $(m; n)$ - вершина параболы $y = a(x-m)^2 + n$. Осью симметрии этой параболы является прямая $x = m$.

Пример 5. $y = -2(x-3)^2 + 1$



- Постройте график функции $y = x^2$.
- Так как $a = -2$ ветви параболы функции $y = -2x^2$, направлены вниз. График этой функции будет «уже» параболы, соответствующей функции $y = x^2$. Потому что при соответствующих значениях x значение y по модулю будет в 2 раза больше.

Например: $(1; 1) \to (1; -2)$; $(2; 4) \to (2; -8)$. Отметьте эти точки и постройте график функции $y = -2x^2$, соединив их сплошной кривой.

- Так как $m = 3$ и $n = 1$, то при сдвиге параболы $y = -2x^2$ на 3 единицы вправо и на 1 единицу вверх получится график функции $y = -2(x-3)^2 + 1$. Вершина параболы будет в точке (3; 1) .
- Прямая $x = 3$ является осью симметрии параболы.

График квадратичной функции

15 Постройте, схематически, графики нижеследующих функций сдвигом графика $y = x^2$.

a) $y = 2(x + 3)^2 - 1$ b) $y = -3(x + 1)^2 + 3$ c) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$

16 Постройте схематически графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 2x^2$ и перенесите точку вершины параболы в указанную точку. Запишите формулы функций, соответствующих новым графикам.

a) (0; –1) b) (3; 2) c) (–4; 1) d) (–2; –2)

Представление квадратичной функции в разных формах и ее графики

Квадратичная функция	Графики
1. Записью по точке вершины или выделением полного квадрата $y = a(x - m)^2 + n$	Точка вершины параболы: *(m; n)* Ось симметрии: $x = m$
2. Записью по точкам пересечения с осью абсцисс $y = a(x - p)(x - q)$	График пересекает ось Ox в точках p и q. Ось симметрии проходит через среднюю точку отрезка, соединяющего точки $(p;\ 0)$ и $(q;\ 0)$. Абсцисса точки вершины: $m = (p + q) : 2$

Во всех случаях, если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх; если $a < 0$, ветви параболы направлены вниз.

Точка вершины параболы и точки пересечения с осями координат – важные точки параболы.

Шаги построения параболы:

1. Находится точка вершины и отмечается на координатной плоскости.
2. Находятся точки пересечения с осью Оx (если есть) и осью Оy.
3. Определяется ось симметрии
4. Отмечаются несколько точек на параболе относительно оси симметрии.
5. Строится парабола, проходящая через отмеченные точки.

Пример 1. Построим график функции $y = -\frac{1}{2}(x + 3)^2 + 4$.

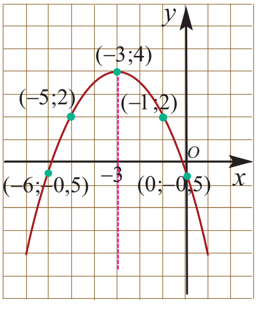
Так как $a < 0$, ветви параболы направлены вниз

1. Отметим точку вершины параболы: (–3; 4)

2. При $x = 0$ $y = -0{,}5$, то есть, парабола пересекает ось Оу в точке (0; –0,5).

3. Начертим ось симметрии $x = -3$ и отметим точку (–1;2), находящуюся на параболе .

4. Отметим точки (–6; – 0,5) ; (– 5; 2), симметричные точкам (0; – 0,5) и (– 1; 2) относительно прямой $x = -3$.



5. Построим параболу, проходящую через отмеченные точки.

График квадратичной функции

Пример 2. Построим график функции $y = -(x+2)(x-4)$.

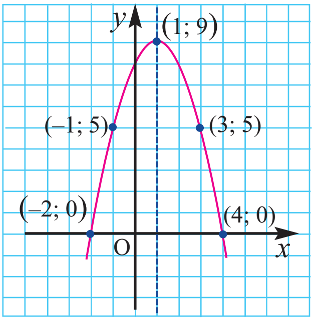
• $a = -1$, $p = -2$, $q = 4$; $(-2; 0)$ и $(4; 0)$ - точки пересечения с осью Ox.

• Ось симметрии проходит через точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от этих точек: $x = 1$.

• Абсцисса вершины параболы $x = 1$, ордината $y = -(1+2)(1-4) = 9$. Отметим точку вершины $(1; 9)$ на координатной плоскости.

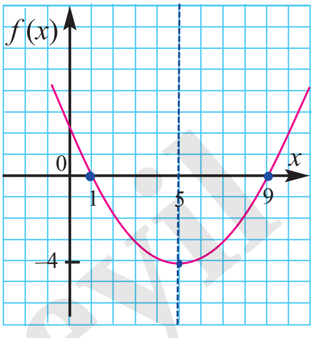
• Проведем ось симметрии $x = 1$. Отметим две точки, симметричные относительно оси симметрии. Например, при $x = 3$ и $x = -1$, $y = 5$. То есть, отметим точки $(3; 5)$ и $(-1; 5)$

• Построим параболу, проходящую через отмеченные точки.



Пример 3. Выразите функцию заданную графически и по кординатам вершины ($y = a(x-m)^2 + n$).

1. Как видно из рисунка, вершина параболы находится в точке $(5; -4)$. $m = 5$, $n = -4$.
2. Так как ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$. Учитывая значения m и n, функцию можно записать в виде $y = a(x-5)^2 - 4$.
3. Записав координаты любой точки графика, например, $(1; 0)$ или $(9; 0)$, в формулу функции, можно найти a. Учтем точку $(1; 0)$. $0 = a(1-5)^2 - 4$, $16a = 4$, $a = \frac{1}{4}$



Формулой функции является $y = \frac{1}{4}(x-5)^2 - 4$.

17 Постройте графики данных функций. Отметьте на графике координаты точки вершины и ось симметрии параболы.

1. $y = (x-3)^2$ 2. $y = (x+4)^2$ 3. $y = -(x+3)^2 + 2$
4. $y = 3(x-2)^2 - 1$ 5. $y = -2(x-2)^2 + 4$ 6. $y = -(x+1)^2 + 3$
7. $y = 2(x+1)^2 - 5$ 8. $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2$ 9. $y = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$

18 Постройте графики данных функций. Отметьте на графике точку вершины и ось симметрии параболы.

1. $y = (x+3)(x-3)$ 2. $y = -(x-1)(x+3)$ 3. $y = 2(x+2)(x+4)$
4. $y = 2(x-5)(x-1)$ 5. $y = -(x-4)(x-1)$ 6. $y = (x-3)(x+7)$

График квадратичной функции

19 **Логическое мышление.** a) Почему при построении параболы $y = x^2 + 3$ парабола $y = x^2$ сдвигается вдоль оси Oy вверх в положительном направлении, а при построении параболы $y = (x + 3)^2$ сдвигается влево вдоль оси Ox?

b) Число точек пересечения графика квадратичной функции с осью Ox не всегда одинаковое. Верно ли это утверждение и для оси Oy? Объясните.

20 По какой паре координат, расположенных на графике, можно написать уравнение оси симметрии графика квадратичной функции? Напишите уравнение оси симметрии, если это возможно.

a) (3; 10) и (7; 10) b) (4; 6) и (6; –2)

21 Исходя из данных, запишите квадратичную функцию в виде $y = a(x - m)^2 + n$:

a) с вершиной в точке (0; 0), проходящей через точку (6; 9);

b) с вершиной в точке (0; –3), проходящей через точку (3; 24);

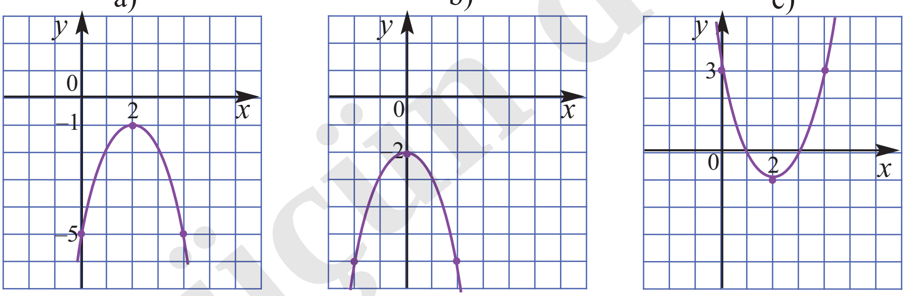
c) с вершиной в точке (2; 5), проходящей через точку (4; –11);

d) с вершиной в точке (–3; 10), проходящей через точку (2; –5).

22 Точки (2; 3) и (24; 3) находятся на графике квадратичной функции. По координатам этих точек определите уравнение оси симметрии параболы.

23 В результате каких сдвигов относительно параболы $y = x^2$ образованы графики функций? Напишите формулы этих функций.

a) b) c)



24 **Вопрос открытого типа.** Напишите формулу какой-либо квадратичной функции, «растянутой» относительно $f(x) = x^2$ и образованной сдвигом в горизонтальном и вертикальном направлениях. Изобразите график схематически.

Нули квадратичной функции

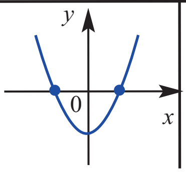
Пересечение графика квадратичной функции с осью абсцисс.

В точках графика, которые находятся на оси абсцисс значение функции равно 0. Значения аргумента, при которых функция равна нулю, называются **нулями функции**. Определим число нулей для функции $y = a(x - m)^2 + n$ по значениям a и n.

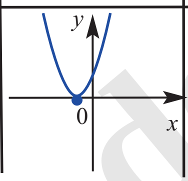
- По значению a можно определить, направлены ли ветви параболы вверх или вниз.
- По значению n можно определить, находится ли точка вершины параболы выше, ниже или на оси абсцисс.

По точке вершины параболы и направлению ее ветвей вниз или вверх определим число точек пересечения графика с осью абсцисс на примерах.

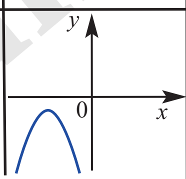
Пример 1. a) $f(x) = 0{,}8x^2 - 3$

Значение a	Значение n	График	Число точек пересечения с осью абсцисс
$a > 0$ Ветви параболы направлены вверх	$n < 0$ Точка вершины находится ниже оси Ox		2 График пересекает ось абсцисс в двух точках

Пример 2. b) $f(x) = 2(x + 1)^2$

Значение a	Значение n	График	Число точек пересечения с осью абсцисс
$a > 0$ Ветви параболы направлены вверх	$n = 0$ Точка вершины находится на оси Ox		1 График имеет одну общую точку с осью абсцисс и эта точка находясь на оси абсцисс, является вершиной параболы.

Пример 3. c) $f(x) = -3(x + 2)^2 - 1$

Значение a	Значение n	График	Число точек пересечения с осью абсцисс
$a < 0$ Ветви параболы направлены вниз	$n < 0$ Точка вершины находится ниже оси Ox		0 График не пересекается с осью абсцисс и, с направленными вниз ветвями, находится полностью ниже оси Ox

Обучающие задания

1 Определите число точек пересечения графиков нижеследующих функций с осью абсцисс.

a) $f(x) = 5x^2 - 7$ b) $f(x) = -2(x + 1)^2$ c) $f(x) = \frac{1}{4}(x - 5)^2 - 9$

2 a) $y = 5(x - 15)^2 - 100$ b) $y = -4x^2 + 14$ c) $y = (x + 18)^2 - 8$

Без построения графиков данных функций определите:

1) Направление ветвей параболы 2) Вершины параболы;
3) Уравнение оси симметрии; 4) Число точек пересечения с осью Оx;

3 a) Запишите данные функции в виде $y = a(x - p)(x - q)$ разложением квадратного трехчлена на множители; b) Определите точки пересечения с осями Ox и Оy; c) Постройте графики функций.

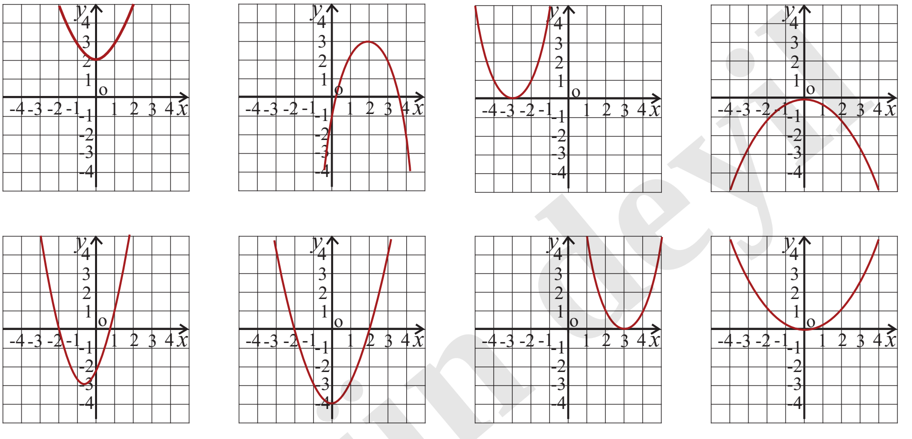
1) $f(x) = x^2 - 5x - 24$ 2) $g(x) = x^2 - 2x + 1$ 3) $p(x) = 4x^2 - 20x + 24$

4 Известно что ордината вершины равна -9 и парабола пересекается с осью абсцисс в точках (10; 0) и (4; 0). a) Напишите формулу функции. b) Напишите координаты трех точек параболы, симметричных относительно оси симметрии; c) Постройте графики функций.

5 Определите, к какой функции соответствует каждый график и начертите их в тетради.

$f(x) = -\frac{1}{4}x^2$ $g(x) = (x + 3)^2$ $k(x) = (x - 3)^2$ $h(x) = \frac{1}{4}x^2$

$t(x) = x^2 + 2$ $m(x) = x^2 - 4$ $p(x) = (x + 1)^2 - 3$ $u(x) = -(x - 2)^2 + 3$



6 Постройте графики функций. Найдите расстояние между точками пересечения с осью абсцисс. Запишите уравнение оси симметрии.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 8$
c) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$

7 Даны точки пересечения параболы с осями координат. Найдите координаты вершины параболы.

a) (3; 0), (–1; 0), (0; –6) b) (–2; 0), (–3; 0), (0; 4) c) (–3; 0), (1; 0), (0; 3)

Общий вид квадратичной функции

Любая квадратичная функция вида $y = ax^2 + bx + c$ может быть представлена в виде $y = a(x - m)^2 + n$ выделением полного квадрата.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Обозначив $m = -\frac{b}{2a}$, $n = \frac{4ac - b^2}{4a}$, получим $y = a(x - m)^2 + n$

Осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ является прямая $x = m$.

Точкой вершины будет $(m; n)$. $m = \frac{-b}{2a}$, $n = \frac{-D}{4a}$ Здесь, $D = b^2 - 4ac$

Пример 1: $y = -2x^2 + 4x + 3 = -2 \cdot (x^2 - 2x - 1{,}5) = -2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1 - 1{,}5)$

$= -2 \cdot ((x - 1)^2 - 2{,}5) = -2 \cdot (x - 1)^2 + 5$

Пример 2: $y = 4x^2 - 12x + 7$ $a = 4$, $b = -12$, $c = 7$, $D = b^2 - 4ac = 32$

$m = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot 4} = 1{,}5$ $n = \frac{-D}{4a} = \frac{-32}{4 \cdot 4} = -2$

Если в уравнение $y = a(x - m)^2 + n$ вписать значения m и n, то данная функция $y = 4x^2 - 12x + 7$ примет вид: $y = 4(x - 1{,}5)^2 - 2$.

Обучающие задания

1 Напишите данные квадратичные функции в виде $y = a(x - m)^2 + n$.

a) $y = x^2 + 8x + 8$ b) $y = 2x^2 - 16x + 21$ c) $y = -x^2 + 8x - 13$

2 Даны квадратичные функции.

a) Найдите координаты точек пересечения графика с осью абсцисс
b) Найдите координаты точек пересечения графика с осью ординат
c) Найдите координаты точки вершины параболы
d) Выразите квадратичную функцию по координатам точки вершины

1) $y = x^2 - 2x - 3$ 2) $y = -x^2 - 4x + 5$ 3) $y = x^2 + 6x + 5$

3 **Вопрос открытого типа.** a) Запишите две различные квадратичные функции, вершины соответствующих парабол которые находятся в точке (5; –3) и изобразите их графики схематично.

b) Запишите две квадратичные функции и постройте их графики, если осью симметрии является прямая $x = -3$, а наибольшее значение функции равно $y = 5$.

4 Постройте графики функций $f(x) = 2(x + 1)^2 + 2$ и $g(x) = 5(x + 1)^2 + 2$. Исследуйте общие и разные особенности этих графиков.

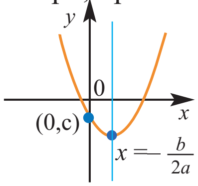
Общий вид квадратичной функции

$y = ax^2 + bx + c.$ $(a \neq o)$

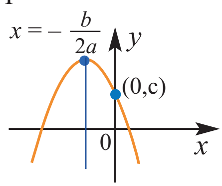
Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно обобщить нижеследующим образом.

• При $a > 0$ ветви параболы, являющейся графиком квадратичной функции, направлены вверх, при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

$a > 0$
$y = ax^2 + bx + c$



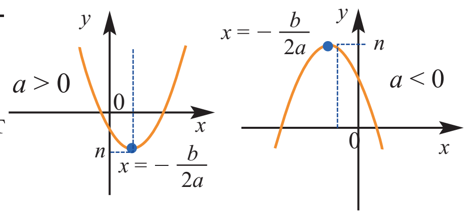
$a < 0$
$y = ax^2 + bx + c$



• Абсциссой точки вершины параболы будет $-\dfrac{b}{2a}$, а уравнением оси симметрии $x = -\dfrac{b}{2a}$

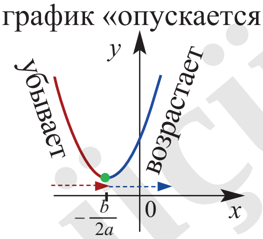
• Парабола пересекается с осью ординат в точке $(0; c)$.

• Значение ординаты (т.е. n) точки вершины графика функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ будет **наименьшим значением** (НмЗ) функции, а при $a < 0$ будет **наибольшим значением** (НбЗ) функции. Эти значения также называются максимальными и минимальными значениями функции.

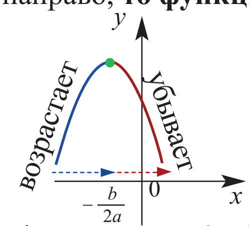


Множество значений, принимаемых аргументом (x), является областью определения функции. Областью определения квадратичной функции является множество всех действительных чисел. Значения, принимаемые функцией (y), образуют множество значений функции. Множеством значений функции $y = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$ является множество всех действительных чисел, меньших или равных максимальному значению функции $(y \leq n)$, а при $a > 0$ – множество всех действительных чисел, больших или равных минимальному значению функции $(y \geq n)$.

Если график «поднимается вверх» слева направо, **то функция возрастает.** Если график «опускается вниз» слева направо, **то функция убывает.**



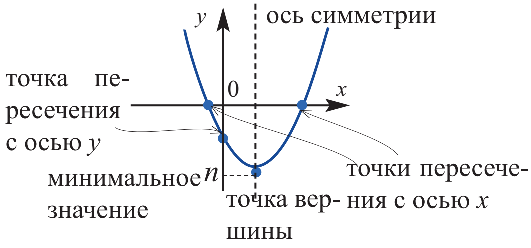
При $a > 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ убывает на промежутке $(-\infty; -\dfrac{b}{2a}]$, а на промежутке $[-\dfrac{b}{2a}; +\infty)$ возрастает.



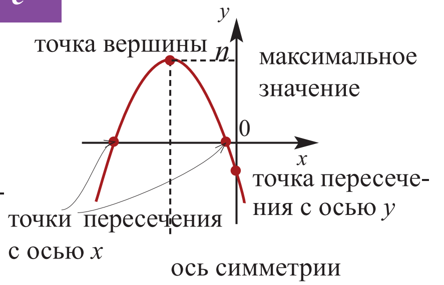
При $a < 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ возрастает на промежут ке $(-\infty; -\dfrac{b}{2a}]$, а на промежутке $[-\dfrac{b}{2a}; +\infty)$ убывает.

Общий вид квадратичной функции

Исследование функции $y = ax^2 + bx + c$



Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Множество значений: $[n; +\infty)$



Область определения: $(-\infty; +\infty)$.
Множество значений: $(-\infty; n]$

Обучающие задания

5 Для функции $y = -2x^2 + 4x + 6$ определите:

- направление ветвей параболы
- точки пересечения с осями координат
- уравнение оси симметрии
- точку вершины
- НбЗ или НмЗ (если имеется)
- область определения и множество значений

6 Выделите полный квадрат и выполните условия 5-го задания.

a) $g(x) = x^2 - 8x + 12$ d) $h(x) = x^2 + 4x - 5$ g) $n(x) = 2x^2 + 12x + 13$

b) $f(x) = 4x^2 + 16x + 19$ e) $p(x) = -3x^2 + 6x - 5$ h) $F(x) = 5x^2 + 10x + 5$

c) $k(x) = x^2 + 7x + 10$ f) $m(x) = x^2 - x - 6$ j) $Q(x) = -3x^2 + 12x$

7 Найдите НбЗ или НмЗ функции.

a) $f(x) = 3(x-5)^2 + 8$ b) $g(x) = -2(x-1)^2 + 4$ c) $t(x) = -3(x+7)^2$

d) $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{2}$ e) $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$ f) $f(x) = -5x^2 + \frac{1}{2}$

8 **Вопрос открытого типа.** Запишите такую квадратичную функцию, чтобы множеством значений было множество всех тех действительных чисел, которые не меньше данного числа.

9 Запишите квадратичную функцию в виде $y = a(x-m)^2 + n$, затем в общем виде, если наибольшее значение функции равно 20 и точками пересечения соответствующей параболы с осью абсцисс являются точки $(-15; 0)$ и $(25; 0)$.

10 Найдите координаты точек вершин парабол, соответствующих нижеследующим функциям.

a) $y = x^2 + 4x + 3$ b) $y = 2x^2 + 16x + 72$ c) $y = 5x^2 + 50x + 7$
d) $y = 7x^2 - 14x + 21$ e) $y = 3x^2 - 18x + 12$ f) $y = -6x^2 + 24x + 24$

Общий вид квадратичной функции

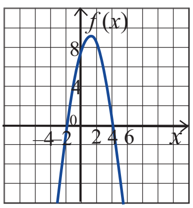
11 Координаты точки вершины (m,n) параболы, являющейся графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ можно найти следующим образом: $m = \frac{-b}{2a}$, $n = am^2 + bm + c$.

Можно ли определить функцию по координатам точки вершины? Если нет, то какие еще данные нужны, чтобы записать требуемую функцию? Ответы представьте в письменном виде на примерах.

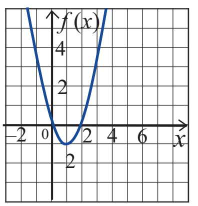
12 По графикам квадратичных функций определите:

- Уравнение оси симметрии
- Максимальное и минимальное значение
- Точку вершины параболы
- Точки пересечения с осями x и y
- Области определения и области значений функции
- Промежутки возрастания и убывания

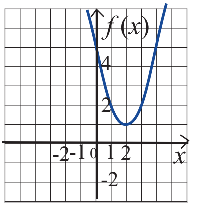
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$



b) $f(x) = x^2 - 2x$



c) $f(x) = x^2 - 4x + 5$



13 В заданной функции $y = x^2 + bx - 1$, b является действительным числом. Постройте график функции при значении $b = 1$ и при еще нескольких значениях $b > 1$. Исследуйте, как меняется график функции при изменении значения b. Как изменятся точки пересечения параболы с осями координат? Что вы можете сказать об изменении координат точек вершины параболы? Повторите задание для функции $y = x^2 - bx - 1$.

14 Какое из нижеследующих утверждений верно, а какое неверно?
1) Если график функции $y = x^2$ сдвинем на 2 единицы вправо и 1 единицу вниз, то получим график функции $y = x^2 - 4x + 3$.
2) График функции $y = x^2 - x + 3$ пересекает ось Оy ниже оси абсцисс.
3) Максимум функции $y = 14 - x^2 - 2x$ равен 15.

15 При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$:
a) пересекает ось абсцисс в точках $(-1; 0)$ и $(3; 0)$
b) пересекает ось абсцисс в точке $(1; 0)$, а ось ординат в точке $(0; 3)$
c) касается оси абсцисс в точке $(2; 0)$?

16 Мяч брошен вверх с начальной скоростью v_0 (м/сек). Высоту h (м), на которую поднимется мяч через t секунд, можно определить формулой $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$. Обоснуйте, то что мяч достигнет максимальной высоты в $t = \frac{v_0}{g}$ секунду.
Покажите, что мяч может достичь максимальную высоту $\frac{v_0^2}{2g}$.

Решение задач с применением квадратичной функции

Пример 1. Каковы должны быть измерения хлева прямоугольной формы с периметром 200 м, чтобы площадь его была наибольшей?

Решение:

1. Допустим, что длина хлева с периметром 200 м равна x. Запишем выражение, определяющее зависимость между шириной и длиной хлева. $b = (200 - 2x) : 2 = 100 - x$

2. Напишем функцию, определяющую зависимость площади хлева от его длины.

$$S(x) = x(100 - x) \text{ или } S(x) = -x^2 + 100x$$

3. Выделим полный квадрат функции $S(x) = -x^2 + 100x$:

$$S(x) = -x^2 + 100x - 2500 + 2500 = -(x - 50)^2 + 2500$$

4. Запишем координаты точки вершины и исследуем задачу.

Вершины находится в точке (50; 2500). Так как $a < 0$, эта точка является максимумом функции $S(x)$. То есть, функция получает максимальное значение при $x = 50$, и это значение равно 2500. Отсюда видно, что площадь прямоугольного хлева с периметром 200 м будет равна 2500 м^2, если его длина будет равна 50 м, ширина также равна 50 м (т.е. он должен иметь форму квадрата).

Пример 2. Группа студентов открыла компанию по производству компьютерных деталей. Прибыль, полученную от производства, можно выразить функцией $P(x) = -2x^2 + 100x - 800$. Здесь x показывает число деталей, произведенных за неделю.

a) Найдите координаты точек пересечения графика данной функции с осью Ox. Какую реальную информацию отражают эти координаты?
b) Найдите координаты точек пересечения графика данной функции с осью Oy. Какую реальную информацию отражают эти координаты?
c) Для функции, выражающей прибыль, найдите координаты точки вершины графика. Какую реальную информацию отражают эти координаты?
d) Представьте в виде графика функцию, выражающую прибыль.

Решение:

a) В точках пересечения графика с осью Ox значение функции $P(x) = 0$.

$$-2x^2 + 100x - 800 = 0$$
$$-2(x^2 - 50x + 400) = 0$$
$$-2(x - 10)(x - 40) = 0$$
$$x = 10 \text{ или } x = 40$$

(10; 0) и (40; 0) – точки пересечения графика с осью Оx. Ординаты этих точек показывают, что прибыль равна нулю. То есть, если число деталей 10 или 40, то прибыль равна нулю. В экономике эту точку называют точкой «поворота».

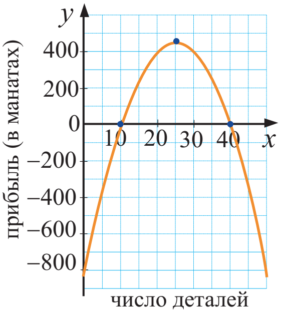
b) Точка пересечения с осью Оy:

$P(0) = -2\cdot 0 + 100\cdot 0 - 800 = -800$. Точка пересечения с осью Оy (0;–800). То есть, если компания не будет производить никаких деталей, то еженедельные потери будут составлять 800 ман.

c) Абсцисса точки вершины графика функции: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{100}{2\cdot(-2)} = 25;$

Ордината: $P(25) = -2\cdot 25^2 + 100\cdot 25 - 800 = 450$

Координаты точки вершины:(25; 450).Эти данные показывают, что компания может получать максимальный доход 450 ман. в неделю. А это возможно в случае производства 25 деталей.



d) График функции $P(x) = -2x^2 + 100x - 800$

Пример 3. Если цена одной спортивной рубашки 8 манат, то магазин продаст 10 рубашек в день. Владелец магазина считает, что снижение цены одной рубашки каждый раз на 2 маната может привести к ежедневному увеличению продажи рубашек на 5 штук. Какова должна быть цена рубашки, чтобы поступление от продажи было максимальной?

1. Примем число снижений цен на 2 маната за x. Тогда цена одной рубашки будет $(8 - 2x)$.

2. Количество рубашек, проданных ежедневно будет $(10 + 5x)$.

3. **Прибыль от продажи = цена одной рубашки × количество рубашек.**

$$S(x) = (8 - 2x)(10 + 5x) = 80 + 40x - 20x - 10x^2$$

Функция $S(x) = -10x^2 + 20x + 80$ выражает поступление от продажи.

Координаты точек вершин этой функции: $m = -\dfrac{b}{2a} = 1$

$S(1) = -10\cdot 1^2 + 20\cdot 1 + 80 = 90$

(1; 90) – координаты точки вершины. Значит, если одна спортивная рубашка продается за $8 - 1\cdot 2 = 6$ манат, то ежедневное поступление от продажи будет максимальным и составит 90 манат (если расчеты владельца магазина верны).

Полезные знания:

Себестоимость = себестоимость одной единицы × количество товара.

Общая прибыль(доход) = цена продажи одного товара × количество проданных товаров.

Прибыль = общая прибыль – себестоимость

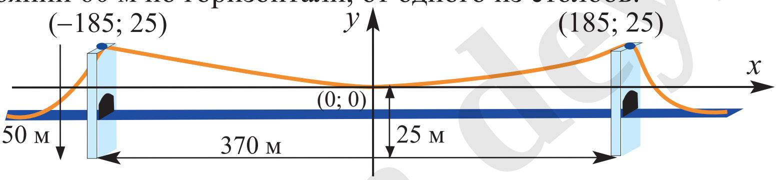
Решение задач с применением квадратичной функции

1 **Площадь.** Эльдар чертит разные прямоугольники. Сумма длины и ширины этих прямоугольников всегда равна 12 см.
a) Составьте таблицу с различными значениями ширины и длины.
b) Приняв за x ширину прямоугольника, запишите выражение, показывающее его площадь. c) Запишите в виде функции зависимость площади прямоугольника от его ширины. d) При скольких сантиметрах ширины площадь прямоугольника имеет максимальное значение?

2 **Бизнес. Максимальный доход.** Транспортная компания, занимающаяся перевозкой пассажиров, предоставляет услуги 200 пассажирам в день. Цена одного билета 5 манатов. Владелец компании считает, что каждые 50 копеек повышения платы приводит к уменьшению числа пассажиров на 10 человек. a) Сколько раз повысив цены, компания может получить максимальный доход от продажи билетов?
b) Сколько манатов может быть максимальный доход при таком повышении цен?

3 **Исследование.** Дома или в классе посмотрите по данным ссылкам фильмы, касающиеся конструкции мостов:
http://questgarden.com/127/37/4/110617141445/process.htm и
http://passyworldofmathematics.com/sydney-harbour-bridge-mathematics.

Пример 4. Трос (провод), поддерживающий вес моста, прикреплен к двум столбам, расстояние между которыми 370 м. Самая нижняя точка провода, являющегося по форме параболой, находится на расстоянии 25 м от земли. Высота каждого столба 50 м. На какой высоте от земли находится точка на проводе крепления, расположенная на расстоянии 60 м по горизонтали, от одного из столбов.

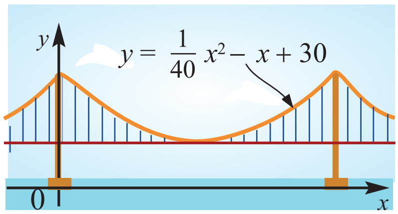


Решение: a) Нарисуйте схематично соответствующую параболу. Отметьте на ней данные из задачи. Расположите начало координат (0;0) в точке вершины параболы, в самой низкой точке. Данные, соответствующие расстоянию от начала координат до столбов и высоте столбов: (–185; 25), (185; 25)
b) Форму провода крепления можно выразить формулой $f(x) = ax^2$.
По точке (185; 25) найдите a. $25 = a \cdot 185^2$, $a = \dfrac{25}{185^2}$, $f(x) = \dfrac{1}{1369}x^2$
c) Точка, находящаяся на расстоянии 60 м от одного из столбов, будет находится на расстоянии 185 – 60 =125(м) от точки вершины параболы.
Так как $f(125) = \dfrac{1}{1369} \cdot 125^2 = \dfrac{15625}{1369} \approx 11{,}4$ м, то указанная точка находится на расстоянии приблизительно 36,4 м от земли.

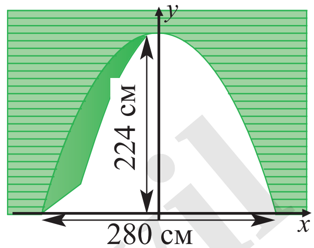
4 **Движение.** Высоту мяча через t секунд после броска вверх можно найти по формуле $h = -5t^2 + 20t + 1$.
a) Через сколько секунд мяч достигнет высоты 16м?
b) На какую максимальную высоту поднимется мяч?
c) Сколько секунд мяч пробудет в воздухе?

5 Зависимость между количеством билетов (N), проданных на концерт и днями (n) продаж определяется как $N(n) = -10n^2 + 60n + 200$. В какой день продано наибольшее количество билетов? Найдите число билетов, проданных в этот день.

6 Трос поддерживающий вес моста между двумя опорами имеет форму параболы заданную формулой $y = \frac{1}{40}x^2 - x + 30$ в выбранной системе координат, как показано на рисунке (x, y в метрах). Самая низкая точка троса находится на мосту. На какой высоте от поверхности воды находится мост?

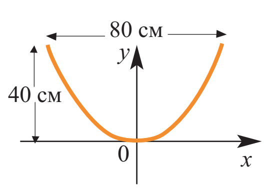


7 1) Выбрав координатную систему как показано на рисунке, запишите квадратичную функцию по данным измерениям арки.
2) Найдите высоту арки в точках находящихся на расстоянии:
a) 70 см; b) 1м 20 см от края арки



8 **Олимпийские традиции.** *Согласно традиции, олимпийское пламя зажигается в городе Олимпия, перед руинами храма Геры, в параболическом зеркале. Это воспринимается как символ огня, взятого от Солнца. Первый факел зажигают девушки в специальных одеждах.*

По данным рисунка напишите функцию, показывающую параболу, образованную в осевом сечении зеркала. Начало координат выберите в точке, расположенной в середине, на самой глубине вогнутого зеркала.



Функция $y = |x|$ и ее график

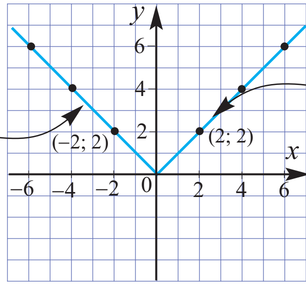
Известно, что абсолютная величина x равна : $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Построим график функции $y = |x|$.

График функции $y = |x|$ состоит из двух лучей, являющихся биссектрисами I и II четвертей. Точка (0; 0) является точкой вершины графика.

x	$y = \lvert x\rvert$
-6	$\lvert -6\rvert = 6$
-4	$\lvert -4\rvert = 4$
-2	$\lvert -2\rvert = 2$
0	0
2	$\lvert 2\rvert = 2$
4	$\lvert 4\rvert = 4$
6	$\lvert 6\rvert = 6$

При $x \le 0$ график функции находится на прямой $y = -x$

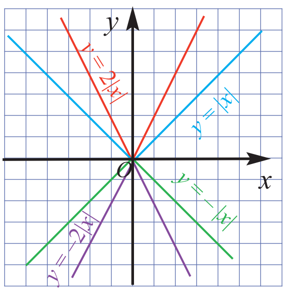


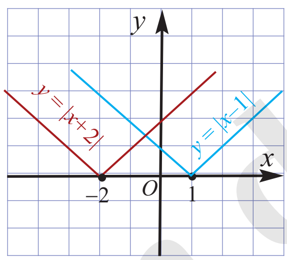
При $x \ge 0$ график функции находится на прямой $y = x$.

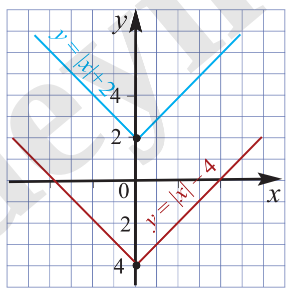
График функции $y = |x|$ симметричен относительно оси Oy, так как каждая точка $(-x; y)$ графика симметрична каждой точке $(x; y)$ на графике относительно оси Oy.

a) Исследуйте графики функций $y = |x|$, $y = 2|x|$ и $y = -|x|$, $y = -2|x|$, построенных на одной координатной плоскости.

b) Исследуйте графики функций $y = |x + 2|$ и $y = |x - 1|$, а также функций $y = |x| + 2$ и $y = |x| - 4$.







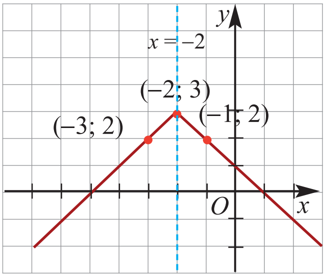
Исходя из этих графиков, можно подвести нижеследующие обобщения.

Основные свойства функции $y = a|x - m| + n$:

- График функции $y = a|x - m| + n$ получается сдвигом графика $y = a|x|$ на $|m|$ единиц горизонтально (при $m > 0$ направо, при $m < 0$ налево) и $|n|$ единиц вертикально (при $n > 0$ вверх, при $n < 0$ вниз).
- $(m; n)$ - точка вершины графика, симметричного относительно прямой $x = m$.
- При $a > 0$ лучи, образующие график, направлены вверх, а при $a < 0$ направлены вниз.

Функция $y = |x|$ и ее график

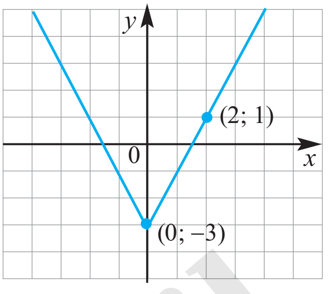
Пример 1. Постройте график функции $y = -|x + 2| + 3$.



Решение:

1. Отметьте точку вершины графика (–2; 3) на координатной плоскости.
2. Отметьте какую-либо другую точку, например, (–3; 2), соответствующую функции.
3. Отметьте точку (–1; 2), симметричную точке (–3; 2) относительно оси симметрии $x = -2$
4. Учитывая, что лучи направлены вниз, при $a = -1 < 0$, постройте график по трем отмеченным точкам.

Пример 2. Напишите соответствующую функцию по графику и данным точкам. **Решение:**



1. Вершина графика находится в точке (0, –3).
2. В уравнении $y = a|x - m| + n$ вместо m и n напишем соответственно значение 0 и –3:

$y = a|x - 0| + (-3)$; $y = a|x| - 3$

Запишем координаты точки (2; 1) в формуле:

$y = a|x| - 3$: $1 = a|2| - 3$;

$1 = 2a - 3$; $4 = 2a$; $a = 2$

Функция, соответствующая графику будет: $y = 2|x| - 3$.

✓**Проверка:** Постройте график функции $y = 2|x| - 3$. Обратите внимание, на то, что ветви графика направленные вверх, более сжаты к оси ординат, чем у графика $y = |x|$.

Обучающие задания

1 По графику функции $y = |x|$ постройте графики функции $y = |x + 2|$, $y = |x - 2|$, $y = |x| + 2$, $y = |x| - 2$.
Обобщив представьте результаты.

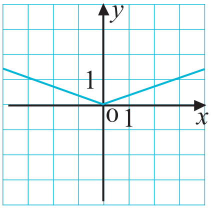
2 a) Определите «сжаты», «растянуты» или имеют одинаковую «ширину» графики данных функций относительно графика функции $y=|x|$
b) Определите как направлены ветви графика: вверх или вниз?
c) Постройте графики данных функций по графику функции $y=|x|$:

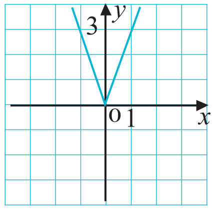
1) $y = \frac{1}{2}|x|$
2) $y = |x| + 4$
3) $y = |x + 5|$
4) $y = 2|x + 6| - 10$
5) $y = |x| - 6$
6) $y = -|x - \frac{1}{4}| - 8$

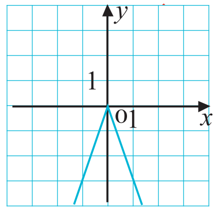
Функция $y = |x|$ и ее график

3 Какой функции соответствует каждый график?

$f(x) = 3|x|$ $\qquad$ $f(x) = -3|x|$ $\qquad$ $f(x) = \frac{1}{3}|x|$

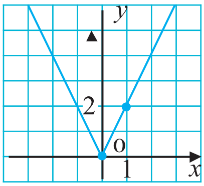




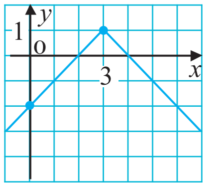


4 Запишите функции, соответствующие графикам.

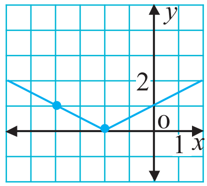
a)



b)



c)



5 Во многих графкалькуляторах знак модуля обозначается как ***abs***. Постройте графики функций с помощью графкалькулятора.

$y = -|x - 2| + 5;$ $\qquad$ $y = -3{,}2|x| + 7$ $\qquad$ $y = |0{,}05x - 3| + 0{,}02$

$y = -3{,}75|x + 1{,}5| - 5;$ $\qquad$ $y = 1{,}5|x - 3| + 6$ $\qquad$ $y = 1{,}27|2x - 3|$

6 Продажа нового альбома музыкальной группы сначала повышалась в устойчивом темпе, затем с той же скоростью снизилась. Если число проданных альбомов обозначим через n (сотни), то изменение n можно написать как: $n = -2|t - 20| + 40$. Здесь t показывает время (в неделях) a) Постройте график функции при значениях $0 \le t \le 40$
b) На какой неделе было продано наибольшее число альбома? Сколько альбомов продано на этой неделе?

7 Доход (в тысяча манат), полученный магазином спортивных товаров с продажи плавательных костюмов и оборудования, определяется функцией $M(t) = -0{,}9|t - 6| + 5$. Здесь t показывает время (в месяцах).
a) Постройте график этой функции при значениях $0 \le t \le 12$.
b) В каком месяце доход от продажи был максимальным?

8 Выполните задания по заданным функциям:
1) Определите точки пересечения с осями Ox и Oy.
2) Постройте графики на одной координатной плоскости.
3) Определите область определения и множество значений функций.

a) $y = |3x|$ и $y = 3|x|$ $\qquad$ b) $y = |-4x|$ и $y = 4|x|$

c) $y = |x - 6|$ и $y = |x| - 6$ $\qquad$ d) $y = |x + (-2)|$ и $y = |x| + 2$

Обобщающие задания

1 При каких значениях b и c парабола $y = x^2 + bx + c$ проходит через точки A (–1; 6) и B (0; 2)?

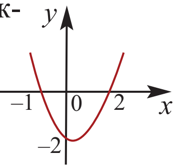
2 В каких точках график функции $y = x^2 – 2x – 15$ пересекает координатные оси?

3 График какой функции получается при сдвиге параболы $y = x^2$ на 3 единицы влево и 2 единицы вниз?

4 При каком значении k наименьшее значение функции $y = x^2 + 6x + k$ равно 1?

5 Покажите множество значений функции $y = x^2 – 2x + 3$.

6 Найдите b и постройте график, если ордината точки вершины параболы $y = x^2 + bx + 3$ равна –1. Сколько возможных случаев?

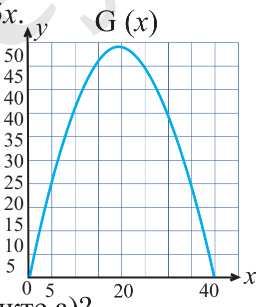


7 Запишите квадратичную функцию, соответствующую параболе, данной на рисунке.

8 Зависимость высоты h (м) от времени t (сек) мяча, брошенного вверх от земли со скоростью $v_0 = 20$ м/см, задается формулой $h(t) = – 5t^2 + 20t$. Найдите наибольшую высоту подъема мяча.

9 **Физиология.** Ученые определили, что энергию, затрачиваемую во время ходьбы, можно определить функцией
$y = 0{,}00849(x– 90{,}2)^2 + 51{,}3$ $(50 \le x \le 150)$. Здесь x показывает скорость человека (м/мин). Постройте график, соответствующий данной области определения функции. Как изменится затрата энергии при увеличении скорости движения? При какой скорости затрата энергии минимальна?

10 **Бизнес. Максимальный доход.** Исследования выявили, что доход издательства меняется по закону $G(x) = –\frac{1}{8}x^2 + 5x$.
Здесь x показывает количество проданных книг (в тысячах), $G(x)$-соответствующую прибыль (в тысяча манат)



a) От продажи скольких книг издательство получило 32 тысячи манат прибыли?
b) От продажи скольких книг издательство получило максимальную прибыль?
c) Как вы объясните два ответа, полученные в пункте a)?

11 Вид палатки спереди можно выразить функцией $y = – \frac{3}{4}|x – 2| + 1{,}5$.
x и y показывают измерения в метрах. За ось Ox примем основание палатки на поверхности земли. Найдите размеры палатки спереди

12 Найдите значение a и b, если график функции $f(x) = |ax + b|$ пересекает ось абсцисс в точке $(\frac{3}{2}; 0)$, а ось ординат – в точке (0; 6).

Расстояние между двумя точками

Расстояние между двумя точками

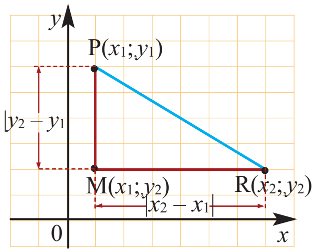
• На числовой оси

PR = |a – b| или
PR = |b – a|

• На координатной плоскости

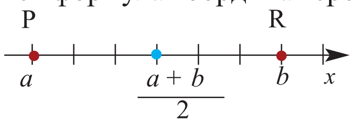
Расстояние между точками P и R, то есть длину отрезка PR, можно найти из ΔMPR, применяя теорему Пифагора. Так как длины катетов MR и MP равны соответственно $|x_2 - x_1|$ и $|y_2 - y_1|$, то

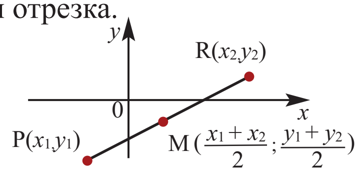
$$PR = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



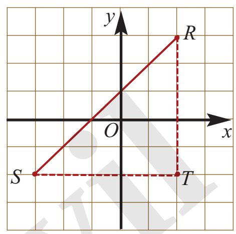
Это формула расстояния между двумя точками.

При решении задач на расстояние между двумя точками часто используется формула координат средней точки отрезка.





1 Вычислите расстояние между точками R и S двумя способами:
1) Подсчетом единичных квадратов на координатной плоскости и применением теоремы Пифагора. 2) Определением по рисунку координат соответствующих точек и применением формулы расстояния между двумя точками.

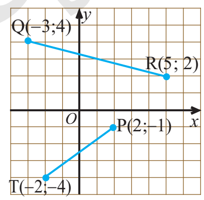


2 Вычислите на числовой оси расстояние между данными точками.

a) A и D b) B и E c) C и F

3 Вычислите расстояние между данными точками. a) 1) A(–1; 3) и B(5; 11);
2) C(–3; 2) и D(1; 5);
3) E (6,5; –2,4) и F (–5,5; 2,6).

b)



4 Найдите периметр фигур, вершины которых расположены в данных точках.

a) Треугольник A(–2; –1), B(2; 2) и C(6;–1)
b) Квадрат A(–4; –3), B(0;–2), C(–1; 2), D(–5; 1)

5 Найдите длину медианы CM треугольника с вершинами в точках A(–3; 3), B (1; 7), C(2; 1)

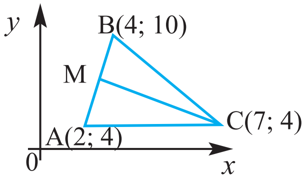
6 Ниже даны координаты конца точки R отрезка RT и координаты средней точки S. 1) Определите координаты точки T по данным координатам. 2) Найдите длину отрезка RT различными способами.

a) R(–1; –3), S(–1; 2) b) R(2; 6), S(–1; 2) c) R(–3; 0), S(2; 12)

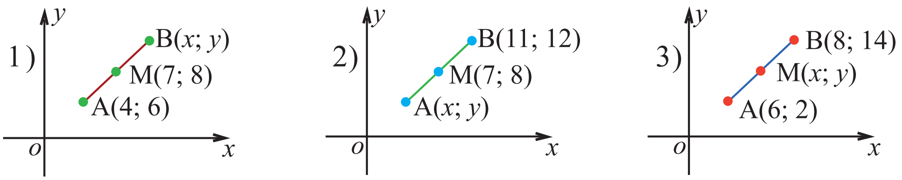
Расстояние между двумя точками

7 L (–5; –6) и M (7; 10) – координаты конечных точек отрезка LM. Точка X находится на отрезке LM и $LX = \frac{1}{4}LM$. Определите координаты точки X.

8 Точка M – средняя точка стороны AB. Найдите расстояние между точками C и M.



9 Точка M – средняя точка отрезка AB. По данным найдите:
a) значения переменных; b) длину отрезка AB.



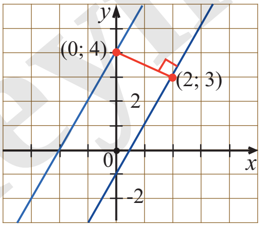
10 Ниже даны координаты точек вершин треугольников. Какой треугольник является прямоугольным? Объясните. Обоснуйте свое мнение, написав уравнение прямых, содержащих стороны треугольника.

a) (1; 2), (2; 3), (5; 0) b) (2;1), (4; 2), (2; 6) c) (3; 2), (5; 1), (2; 5)

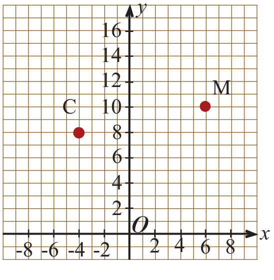
11 При каких значениях *к* расстояние между точками A(6; –4) и B(2; *к*) равно 5 единицам? Сколько таких точек?

12 Найдите на оси O*x* точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от точек (0; 2) и (8; 6).

13 Выполните задания по изображению на координатной плоскости.
a) Напишите уравнение прямых
b) Объясните по уравнениям параллельность данных прямых
c) Найдите расстояние между прямыми.



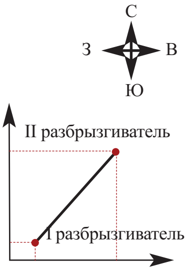
14 Расположение дома Мехрибан отмечено на координатной плоскости точкой M(6; 10). Дом Джалила находится на 2 единицы к югу и 10 единиц к западу от дома Мехрибан. Школа находится на одинаковом расстоянии от дома каждого из них.
a) Отметьте дом Джалила на координатной плоскости
b) Представьте возможные варианты месторасположения школы. Подтвердите рассуждения вычислениями.



Указание: Используйте свойство серединного перпендикуляра отрезка на координатной плоскости.

Расстояние между двумя точками

15 Мастер должен установить оросительную систему методом дождевания в различных местах участка прямоугольной формы. Для этого он должен купить трубу, соединяющую первый и второй разбрызгиватели. Он забыл измерить это расстояние и направился в магазин. Но мастер запомнил несколько измерений. Первый разбрызгиватель находится в 3 м к востоку, и в 1 м к северу, второй – в 15 м к востоку и в 10 м к северу от зеленого участка. Какие математические знания, изученные в школе, может применить мастер для вычисления расстояния между двумя разбрызгивателями, чтобы не было необходимости возвращаться домой? Запишите на плане данные сведения и решите задачу.

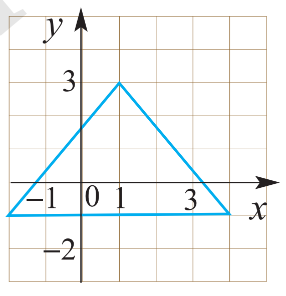


16 **Масштаб.** Вершины ΔABC находятся в точках (1; 4), (5; 4) и (5; 1).
a) Найдите периметр ΔABC
b) Увеличьте значение координат точек вершин в 2 раза; в 3 раза и снова вычислите периметр треугольника.
c) Объясните зависимость между увеличением координат точек вершин треугольника и увеличением периметра.

17 Два всадника выехали на прогулку на лошадях. Они начали движение из одной точки, в одно и то же время. Один из них поскакал на 2 км к западу и 3 км к югу, а другой на 4 км к востоку и 5 км к северу. Найдите расстояние между всадниками?

18 Начертите на координатной плоскости четырехугольник с вершинами в точках A(1; 1), B(5; 9), C(2; 8) и D(0; 4)
a) Обоснуйте, что данный четырехугольник является трапецией.
b) Обоснуйте, что данный четырехугольник является равнобедренной трапецией.

19 a) Начертите рисунок в тетради
b) Найдите длины сторон треугольника
c) Определите координаты средней точки каждой стороны.
d) Начертите новый треугольник, соединив последовательно средние точки.
e) Сравните периметры двух данных треугольников.

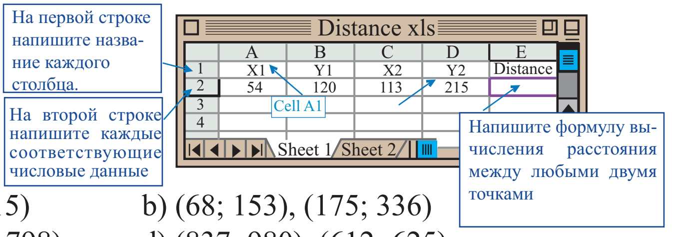


20 По координатам вершин определите вид треугольников: равносторонний, равнобедренный, разносторонний.

a) (2; 0), (0; 8), (–2; 0) b) (4; 1), (1; 2), (6; 4)
c) (1; 9), (4; 2), (–3; 2) d) (2; 5), (8; 2), (4; 1)
e) (5; 1), (4; 0), (3; 5) f) (4; 4), (8; 1), (6; 5)

Расстояние между двумя точками

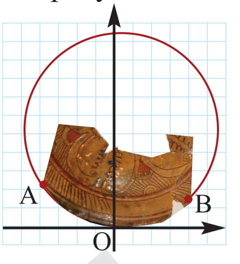
21 С помощью программы Excel вычислите расстояние между двумя данными точками.



a) (5; 120), (113; 215) b) (68; 153), (175; 336)

c) (421; 454), (502; 798) d) (837; 980), (612; 625)

22 **Археология. Работа над небольшим проектом.** Ниже даны шаги решения проблемы нахождения изначального размера посуды по обломкам, найденным во время раскопок археологов. Решите задачу по этим этапам. Составьте, по возможности обширный список применяемых математических понятий. Создайте толковый словарь этих понятий. Запишите их определения в виде примеров и рисунков.



1. Обломок посуды размещается на координатной системе. Отметьте три точки (A, O, B) на круговой части.

2. Чтобы определить центр окружности:

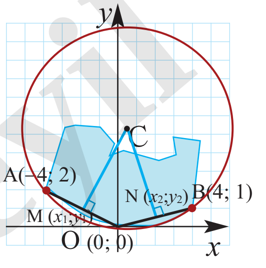
a) Начертите серединные перпендикуляры отрезков AO и OB.

b) Напишите уравнения прямых, содержащих серединные перпендикуляры.

♦ Чтобы написать уравнение прямой, содержащей серединный перпендикуляр отрезка OA:

• Найдите координаты средней точки M.

• Определите угловой коэффициент прямой, содержащей отрезок OA.



• Основываясь на том, что серединный перпендикуляр MC и эта прямая являются взаимно перпендикулярными, найдите угловой коэффициент прямой, содержащей серединный перпендикуляр MC и напишите ее уравнение.

♦ Чтобы написать уравнение прямой, содержащей серединный перпендикуляр отрезка OB:

• Найдите координаты средней точки N.

• Определите угловой коэффициент прямой, проходящей через OB.

• Найдите угловой коэффициент прямой, содержащей серединный перпендикуляр NC и напишите уравнение этой прямой.

♦ Центр окружности является пересечением серединных перпендикуляров. Значит, решением системы, состоящей из уравнений прямых, содержащих серединные перпендикуляры, являются координаты центра C окружности.

♦ Найдите радиус данной окружности, вычислив расстояние от точки C до каждой отмеченной точки. Напишите приблизительное значение диаметра посуды.

Уравнение окружности

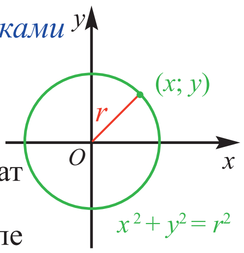
Уравнение окружности

Используя формулу расстояния между двумя точками, можно написать уравнение окружности с радиусом r и с центром в начале координат. Расстояние между центром окружности (0; 0) и ее любой точкой $(x; y)$ равно радиусу r окружности.

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$ *Расстояние между двумя точками*

$\sqrt{x^2+y^2}=r$ *Упрощение*

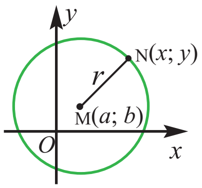
$x^2+y^2=r^2$ *Возведение обеих частей в квадрат*



Уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r: $\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$

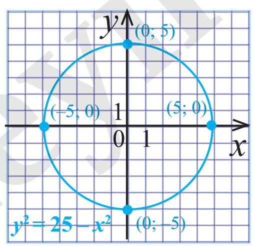
Например, уравнение окружности с центром в начале координат (0; 0) и радиусом 2 имеет вид: $x^2+y^2=4$.

По формуле расстояния между центром окружности M $(a; b)$ и точки N $(x; y)$ на окружности радиуса r имеем: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$. Возведя в квадрат обе части получаем уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r: $\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$



Например, уравнение окружности с центром в точке (3; 2) и радиусом 4 имеет вид: $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=4$; $\quad (x-3)^2+(y-2)^2=16$

Пример 1: Постройте на координатной плоскости окружность, заданную уравнением $y^2=25-x^2$. **Решение:** Напишем уравнение в виде $x^2+y^2=5^2$. Как видно, $r=5$.
Отметим 4 точки, находящиеся на расстоянии 5 единиц от начала координат. Например, (5; 0), (–5; 0), (0; 5), (0; –5). Проведем окружность через эти точки.



Пример 2: Точка A(2; 3) находится на окружности, центром которой является начало координат. Напишите уравнение этой окружности.
Решение: Записав координаты точки A в уравнении $\boldsymbol{x^2+y^2=r^2}$ получим: $2^2+3^2=r^2$, $r^2=13$

Уравнение этой окружности: $x^2+y^2=13$

Обучающие задания

1 Запишите уравнение окружности с данным радиусом и центром в начале координат.

a) 3 b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{15}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $\sqrt{22}$

Уравнение окружности

2 Напишите уравнение окружности по данному центру и радиусу (или диаметру).

a) $(2; –11)$, $r = 3$ b) $(–4, 2)$, $d = 2$ c) $(0; 0)$, $r = \sqrt{5}$

d) $(6, 0)$, $r = \frac{2}{3}$ e) $(–1; –1)$, $d = \frac{1}{4}$ f) $(–5, 9)$, $d = 2\sqrt{20}$

3 На окружности заданный уравнением $x^2 + y^2 = 169$:

a) найдите ординату точки с абсциссой 5;

b) найдите абсциссу точки с ординатой 0.

4 По данным уравнениям определите координаты центра окружности и радиус. Постройте окружность.

a) $x^2 + y^2 = 36$ c) $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

b) $(x – 1)^2 + (y – 2)^2 = 16$ d) $(x + 4)^2 + (y – 2)^2 = 9$

5 По данным уравнениям окружностей определите координаты центра и радиус.

Пример: Найдем центр и радиус окружности, заданной уравнением $x^2 – 2x + y^2 + 4y – 4 = 0$

Решение: $(x^2 – 2x + 1) – 1 + (y^2 + 4y + 4) – 4 – 4 = 0$

$(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ $(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

Центр окружности – точка M$(1; –2)$. Радиус $R = 3$.

a) $x^2 – 2x + y^2 + 4y – 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 16x + 40y – 20 = 0$

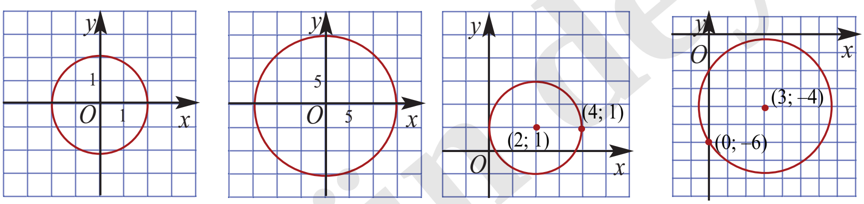
c) $x^2 + y^2 – 2x + 6y – 10 = 0$

d) $x^2 + y^2 – 4x + 2y + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 – 6y – 5 = 0$

f) $x^2 + y^2 – 2x + 6y – 15 = 0$

6 Исходя из данных на рисунке, напишите уравнение окружностей.



7 a) Напишите уравнение окружности с координатами концов диаметра $(2; –1)$, $(4; 7)$. Найдите точки с абсциссами $–1$, находящиеся на этой окружности.

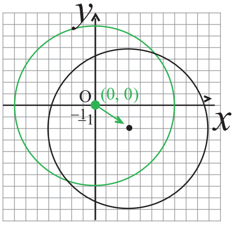
b) Напишите уравнение окружности с диаметром 12 см и центром в начале координат. Сдвиньте эту окружность на 6 единиц вправо и на 5 единиц вниз. Напишите уравнение новой окружности.

c) Центр окружности $(x – 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ перенесен на 6 единиц влево и на 3 единицы вниз. Напишите уравнение соответствующее конечному положению окружности.

8 Напишите уравнение окружности, исходя из данных.

Центр окружности	(0; 0)	(1; 2)	(–3; 5)	(–13; π)	(9; 10)
Точка на окружности	(0; 6)	(4; 2)	(1; 8)	(2; π)	(–7; 3)

9 a) Напишите уравнение окружности с радиусом 7 и центром в точке (3; –2); b) Определите координаты конечных точек горизонтального диаметра данной окружности.



Указание: Решите двумя способами.

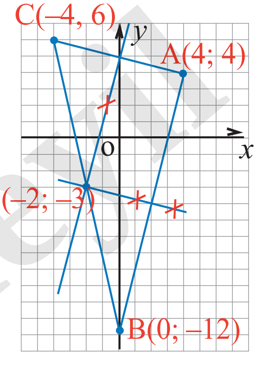
1) Сравните координаты сдвига относительно окружности с центром в точке (0; 0).

2) Впишите в уравнение окружности значение $y = –2$.

10 Найдите точки пересечения окружности $x^2 + y^2 – 6x + 9y + 8 = 0$ с осями координат.

11 Исследуйте пример, относящийся к уравнению окружности, проходящей через три данные точки.

a) **Пример.** Мобильные телефоны работают с помощью передачи сигналов посредством спутников из одной передающей станции в другую. Компания мобильного оператора старается расположить передающую станцию так, чтобы обслуживать больше пользователей. Представим, что три больших города находятся в точках A(4; 4), B(0, –12), C(–4; 6). На координатной плоскости 1 единица равна расстоянию в 100 км. Передающая станция должна быть расположена в точке, находящейся на одинаковом расстоянии от этих городов. Напишите координаты этой точки и уравнение соответствующей окружности.



Решение: Сначала соединим эти точки и найдем точку пересечения серединных перпендикуляров сторон полученного треугольника. Эта точка (–2; –3). Эта точка, являясь центром окружности, показывает месторасположение станции. Расстояние между центром и любой из заданных точек является радиусом окружности.

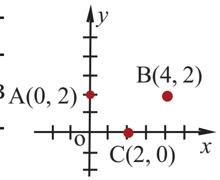
$r = \sqrt{(-2-0)^2 + (-3-(-12))^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$

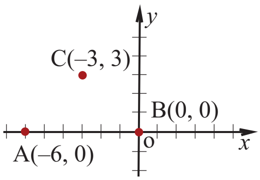
Уравнение окружности: $(x – (–2))^2 + (y – (–3))^2 = (\sqrt{85}\,)^2$,

$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 85$

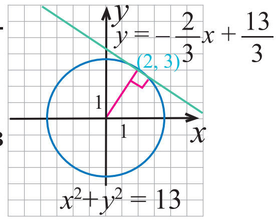
Заметка. Определив линейные уравнения, соответствующие серединным перпендикулярам, можно найти координаты центра окружности решением системы уравнений.

b) Начертите рисунки в тетради. Напишите уравнение окружности, проходящей через три отмеченные точки, и постройте окружность.





12 Исследуйте пример. Напишите уравнение касательной, проведенной к данной окружности из заданной точки.



Пример: Напишите уравнение касательной, проведенной к окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 13$ в точке (2; 3).

Угловой коэффициент прямой, проходящей через точку d касания и содержащий радиус, равен:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

Так как радиус и касательная, проходящие через точку (2;3), взаимно перпендикулярны, то угловой коэффициент касательной будет $-\frac{2}{3}$.

Уравнение касательной: $y - 3 = -\frac{2}{3}(x-2)$; $\quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

a) $x^2 + y^2 = 13$; (2; 3) b) $x^2 + y^2 = 41$; (–4; –5)

c) $x^2 + y^2 = 65$; (–8, 1) d) $x^2 + y^2 = 40$; (–2, 6)

13 Какие из точек A(2; 3), B(3; 4), C(4; 4), D(4; –3), E(–3; 4) принадлежат окружности с уравнением $x^2 + y^2 = 25$?

14 Исследуйте задачу, решенную в качестве примера и решите задачи.

Пример. Радиосигналы с передающей станции могут передаваться на расстояние 90 км. Дом Ляман находится на расстоянии 45 км к востоку и 56 км к северу.

a) Определите область распространения сигналов передатчика с помощью неравенства; b) Может ли Ляман пользоваться этим передатчиком? Определите внутреннюю и внешнюю область окружности $x^2 + y^2 = r^2$ с помощью следующих неравенств.

Внутренняя область: $x^2 + y^2 < r^2$. Внешняя область: $x^2 + y^2 > r^2$. Область распространения сигналов: $x^2 + y^2 < r^2$. Так как $45^2 + 56^2 < 90^2$, т.е. $5161 < 8100$, то Ляман может пользоваться этим передатчиком.

a) Землетрясение почувствовалось на расстоянии 110 км от эпицентра. Почувствуете ли вы землетрясение, если ваше место проживания находится на расстоянии 50 км к востоку и 30 км к северу от эпицентра?

b) Свет морского маяка распространяется на 20 км. Виден ли свет маяка с корабля, находящегося в 10 км к востоку и в 16 км к северу от маяка?

15 Найдите расстояние от точки A(10; 7) до центра окружности, заданной уравнением $(x-2)^2+(y-1)^2=4$

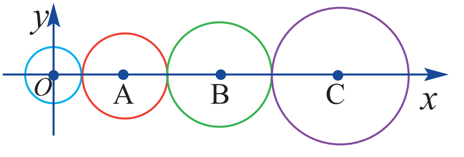
16 Найдите расстояние от точки C(5; –2) до окружности $(x+3)^2+(y-4)^2=25$.

17 Определите, является ли прямая касательной к окружности или секущей, или не является ни той, ни другой.

a) $x^2+y^2=36$, $y=6$ b) $x^2+y^2=100$, $y=14-x$ c) $x^2+y^2=4$, $x+y=7$

d) $x^2+y^2=10$, $y=3x$ e) $x^2+y^2=9$, $y=x-3$ f) $x^2+y^2=9$, $y=x$

18 Центры четырех касающихся окружностей находятся на оси Ox. Радиус окружности A больше радиуса окружности O в 2 раза, радиус окружности B больше радиуса окружности O в 3 раза, радиус окружности C больше радиуса окружности O в 4 раза. Известно, что BC = 28. Напишите уравнение окружности A.



19 Можно ли сказать, что следующие уравнения являются уравнениями какой-либо окружности? Обоснуйте ответ.

1) $x^2+y^2=-16$ 3) $x^2+4x+4+y^2-2y+1=25$

2) $x^2+y^2+4x=0$ 4) $x^2+10x+y^2-8y+8=0$

20 a) Покажите, что уравнение $(x-2)(x-6)+(y-5)(y-11)=0$ является уравнением окружности.

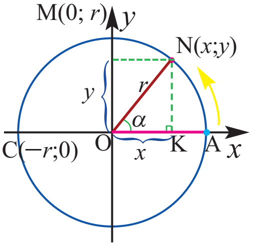
b) Покажите, что уравнение окружности с координатами концов диаметра $(a; b)$ и $(c; d)$ можно представить в виде $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$.

21 a) Найдите расстояние между центрами окружностей, заданных уравнениями: $(x-2)^2+(y+2)^2=4$; $(x+4)^2+(y-6)^2=1$

b) Постройте эти окружности на координатной плоскости. Покажите две самые близкие друг к другу точки, находящиеся на окружностях, и найдите расстояние между этими точками.

Уравнение окружности

Практическое задание. 1) На оси абсцисс правее от начала координат отметьте точку A и проведите окружность с центром в точке O, радиусом $r = OA$.
2) Поверните радиус OA на острый угол α вокруг точки O против движения часовой стрелки и обозначьте точку, в которую перешла точка A при этом повороте, через N $(x; y)$.



3) По рисунку, напишите синус и косинус острого угла α в прямоугольном треугольнике ONK : $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$.

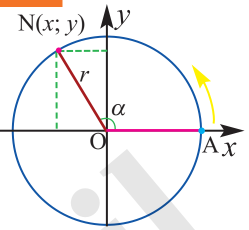
4) Примените эти формулы для точки M$(0; r)$ при $\alpha = 90^\circ$ и для точки C $(-r; 0)$ при $\alpha = 180^\circ$

$$\sin 90^\circ = \frac{r}{r} = 1 , \quad \cos 90^\circ = \frac{0}{r} = 0 \quad \sin 180^\circ = \frac{0}{r} = 0 , \quad \cos 180^\circ = \frac{-r}{r} = -1$$

Координаты точек, находящихся на окружности, и тригономические отношения

Если точка A$(r; 0)$ при повороте радиуса OA вокруг точки O против движения часовой стрелки на угол α преобразуется в точку N$(x; y)$, то

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} , \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} .$$



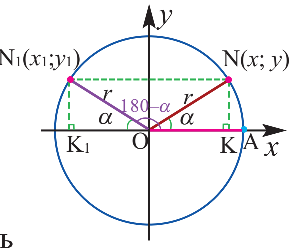
Для координат точки N$(x; y)$, соответствующей углу поворота α на окружности, верны формулы $\boldsymbol{x = r \cdot \cos\alpha}$, $\boldsymbol{y = r \cdot \sin\alpha}$.
В этих формулах **α** - угол отсчитываемый от положительной оси x против движения часовой стрелки. Если точка N$(x; y)$ не находится на оси ординат, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{r \cdot \sin\alpha}{r \cdot \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

22 a) На бумаге в клетку начертите окружность с центром в начале координат и радиусом $r = 10$. По координатам точки N$(x; y)$ в которую перешла точка A (10; 0) при повороте на угол $\alpha = 30^\circ$ вокруг начала координат, найдите приблизительные значения *sin* α, *cos* α и tg α.
b) Задание выполните и для углов поворота 45°, 60°, 120°, 150°. Проверьте результаты с помощью калькулятора.

23 Отметьте точку A (5; 0) на окружности с центром в начале координат и радиусом 5. Найдите координаты точки N, в которую перешла точка A при повороте вокруг начала координат на угол:
1) $\alpha = 40^\circ$ 2) $\alpha = 100^\circ$ 3) $\alpha = 120^\circ$

Уравнение окружности

Практическое задание. 1) На окружности с центром в начале координат и радиуса r отметьте точки N $(x; y)$ в которую перешла точка A при повороте на острый угол α и точку $N_1(x_1; y_1)$ соответствующую углу поворота $180° - \alpha$. Относительно какой оси симметричны точки N и N_1.



2) Исходя из рисунка, обоснуйте конгруэнтность ΔONK и ΔON_1K_1 и на основании этого объясните соотношения $y_1 = y$, $x_1 = -x$ между координатами точек N и N_1.

3) Исследуйте равенства:

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y_1}{r} = \frac{y}{r} = \sin\alpha, \qquad \cos(180° - \alpha) = \frac{x_1}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha$$

4) Выразите мнение о синусе и косинусе смежных углов.

Синусы смежных углов равны, а косинусы взаимно противоположны.

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

Из этих формул при $\cos\alpha \neq 0$ почленным делением получаем:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

С помощью формул приведенных выше вычисление синуса, косинуса, тангенса для тупого угла можно свести к вычислению синуса, косинуса, тангенса острого угла, соответственно.

24 Вычислите синус, косинус и тангенс углов 120°, 135°, 150°.

25 Какие из равенств верны?

a) $\sin 40° = \sin 140°$ b) $\cos 140° = -\cos 40°$ c) $\cos 46° = \cos 134°$

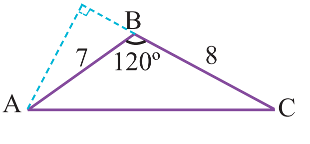
d) $\sin 130° = \sin 50°$ e) $\sin 120° = -\sin 60°$ f) $\cos 150° = -\cos 30°$

26 a) Разделив обе части уравнения окружности $x^2 + y^2 = r^2$ на r^2 и учитывая равенства $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ покажите, что тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ верно для любого угла α.

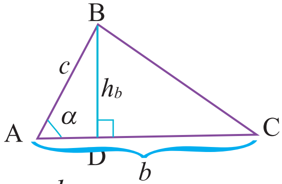
b) Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}6$ и α острый угол

c) Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и α тупой угол.

27 По данным на рисунке найдите длину стороны AC и синус угла C.
Указание: Проведите высоту из вершины A как показано на рисунке.

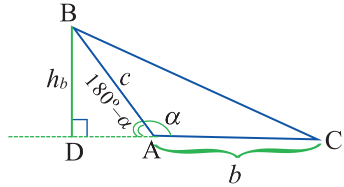


28 **Исследование:** Исследуйте формулу площади треугольника для различных случаев.



$\sin\alpha = \dfrac{h_b}{c}$ $\quad h_b = c \cdot \sin\alpha$

$S = \dfrac{1}{2}\, b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$



$\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha) = \dfrac{h_b}{c}$

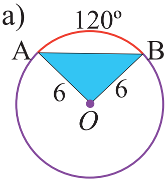
$h_b = c \cdot \sin\alpha$

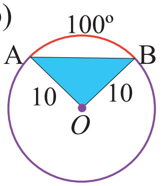
$S = \dfrac{1}{2}\, b \cdot h_b = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$

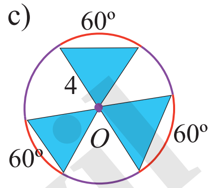
2) Перепишите утверждение в тетрадь, вписав пропущенные слова. Площадь треугольника равна половине произведения ... сторон на ... угла ... ними.

3) Установите, что утверждение верно и при $\alpha = 90°$.

29 Исходя из данных на рисунке, найдите площадь закрашенной части. O – центр окружности.

a)


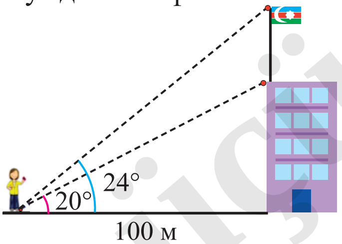
b)


c)


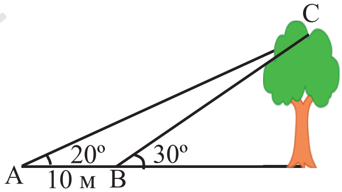
30 Диагонали параллелограмма 6 см и 8 см, а угол между ними 45°. Найдите площадь параллелограмма.

31 Найдите площадь равнобокой трапеции, длина диагонали которой равна 18 см, а угол между диагоналями 30°.

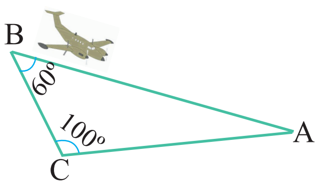
32 По данным на рисунке найдите высоту здания и флага.



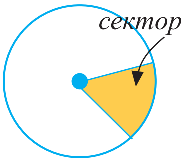
33 По данным рисунка найдите расстояния AC и BC.



34 Самолет летит по замкнутому маршруту ABC $\angle B = 60°$, $\angle C = 100°$. Если самолет преодолеет за 1 час путь BC длиной 600 км, то за сколько часов он пролетит один круг с той же скоростью?



Сектор и сегмент

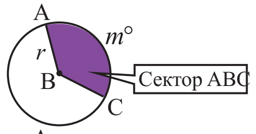


Сектор – часть круга, ограниченная центральным углом, образованным двумя радиусами и соответствующей этому углу дугой. Площадь сектора, соответствующего центральному углу, составляет ту часть площади круга, которую составляет центральный угол от полного угла.

Например, часть круга, соответствующая центральному углу 60°, составляет $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$ часть всего круга. Так как площадь круга πr^2, то площадь этого сектора будет $\frac{1}{6}\pi r^2$. **Сегмент** – часть круга, ограниченная хордой и соответствующей дугой.

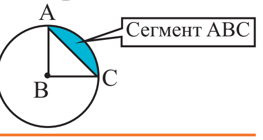
Площадь сегмента = площади сектора ± площадь треугольника.

Площадь сектора



Площадь сектора: $S_{ABC} = \frac{m}{360}\pi r^2$

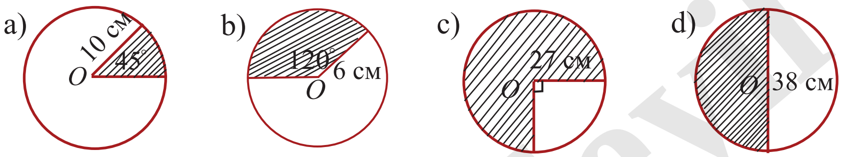
Площадь сегмента: $S_{сегментаABC} = S_{сектораABC} - S_{\Delta ABC}$



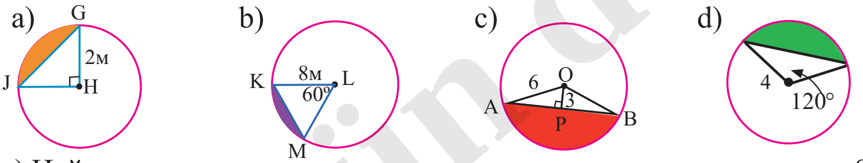
Указание: При нахождении площади сегмента, соответствующего большей дуге, к площади соответствующего сектора прибавляется площадь ΔABC

Обучающие задания.

1 Найдите площадь секторов, изображенных на рисунке. Результат округлите до сотых.

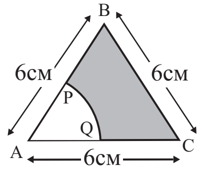


2 Найдите площадь сегментов,изображенных на рисунке. Результат округлите до сотых.



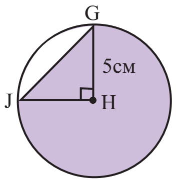
3 a) Найдите площадь сектора, соответствующего дуге окружности 80° с радиусом 12 см.
b) Площадь сектора с центральным углом 72° составляет 16π. Найдите радиус окружности с точностью до сотых.
c) Найдите центральный угол круга с радиусом 8 см, соответствующий сектору с площадью 20π см².

4 ΔABC равносторонний. Точка P – середина стороны AB. APQ – сектор круга с центром в точке A. Найдите площадь закрашенной части.

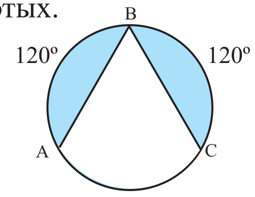


Сектор и сегмент

5 Найдите площадь закрашенной части.

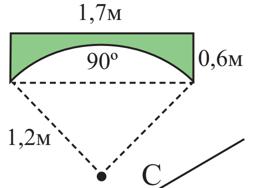


6 Длина окружности на рисунке 12π мм. Вычислите площадь закрашенной части с точностью до сотых.



7 Представьте, что в столовой вам предлагают два вида пирога. Пироги одинаковой толщины имеют форму круга с диаметрами 24 см и 32 см. Каждый пирог разрезан на 8 равных кусков. В каком случае вы съедите больше пирога: если съедите 1 кусок пирога с радиусом 16 см или 2 куска пирога с радиусом 12 см?

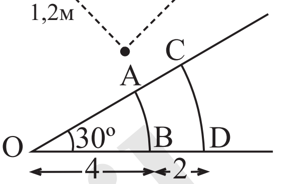
8 Часть оконной рамы, изображенной на рисунке, должна быть покрашена. Для этого сначала нужно вычислить ее площадь. Выполните это вычисление, исходя из данных рисунка.



9 Исходя из данных на рисунке, найдите:

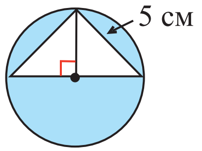
a) Длину ⌣AB и ⌣CD;

b) Площадь секторов AOB и COD.

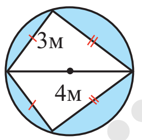


10 Исходя из данных на рисунке, найдите площадь закрашенной части.

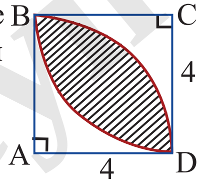
a)



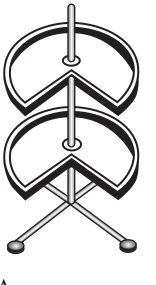
b)



11 ABCD – квадрат. Найдите площадь заштрихованной части, полученной пересечением дуг окружностей с центрами в точках A и C.



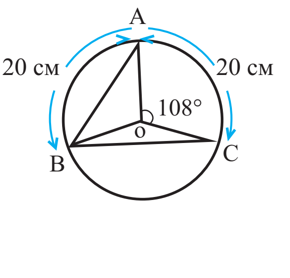
12 Изображенные на рисунке полки были изготовлены путем вырезания частей из кругов с радиусом 40см под углом 90°. Сколько приблизительно бумаги понадобится, чтобы накрыть поверхность каждой полки?



13 O – центр окружности. Длины дуг ⌣AB и ⌣BC равны 20 см.

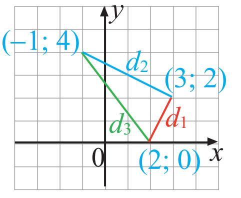
Найдите:

a) ∠AOB b) ⌣BC c) $S_{\text{сектор } AOC}$



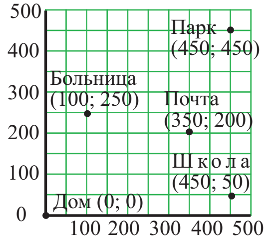
Обобщающие задания

1 Проверьте, являются ли точки (3; 2), (2; 0), и (–1; 4) вершинами прямоугольного треугольника.

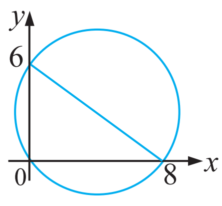


2 На рисунке представлен план расположения дома, предложенного в аренду туристам . На плане сторона каждой клетки обозначает расстояние в 50 м.

1) Какое наименьшее расстояние от дома до школы?
2) Представьте, что вы отдыхаете здесь. Какое расстояние вы преодолеете , если самым коротким путем пойдете на почту, оттуда в парк и вернетесь домой? 3) Чтобы пройти все объекты, указанные на плане существуют два возможных коротких пути. Определите их через последовательность объектов.

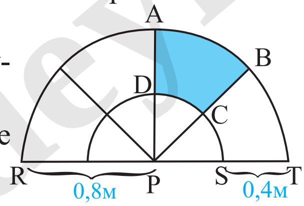


3 Окружность проходит через точки (0; 0), (0, 6), (8, 0).
a) Найдите координаты центра окружности
b) Выразите через π площадь части круга, лежащей в I четверти координатной плоскости. c) Выразите через π длину дуги окружности, между координатными осями в I четверти. d) Прямая, проходящая через начало координат, является касательной к окружности. Найдите угловой коэффициент этой прямой и напишите ее уравнение.



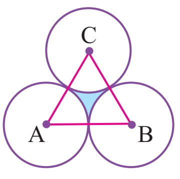
4 Напишите уравнение окружности с центром в точке M(–2; 3), проходящей через точку A(–5; –1). Найдите точки пересечения этой окружности с осью абсцисс.

5 На рисунке дана схема окна в форме полуокружности с радиусом 80 см.
Длина ST– 40 см, а дуга AB– 45°. Найдите площадь стекла части ABCD.



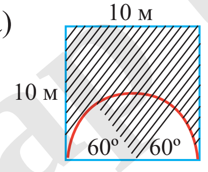
6 Окружность с центром в точке (0; 4) проходит через точку A(8; 10). Найдите площадь сектора, соответствующего центральному углу 45°.

7 На рисунке изображены три окружности, касающиеся друг друга. Радиусы окружностей 4 см. Найдите площадь закрашенной части.

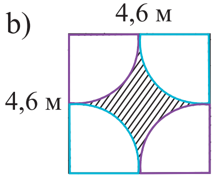


8 Найдите площадь закрашенной части.

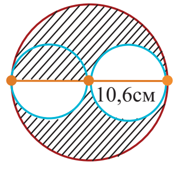
a)



b)



c)



Раздел 3

1. Уравнения и системы уравнений
2. Многоугольники

Решение уравнений высших степеней
• Разложением на множители
• Введением нового переменного
Решение рациональных уравнений и уравнений, содержащих переменную под знаком модуля
• графическим способом
• алгебраическим способом
Решение системы уравнений
• В которой одно уравнение первой, а другое второй степени
• графическим способом
• алгебраическим способом
• Решение системы уравнений в которой оба уравнения второй степени
• графическим способом
• алгебраическим способом
Решение задач с помощью систем уравнений

Многоугольники
• Ломанная, многоугольник
• Правильные многоугольники
• Внутренние и внешние углы многоугольника
Многоугольники вписанные и описанные около окружности
• Окружность вписанная и описанная около треугольника и четырехугольника.
• Свойства четырехугольника вписанного и описанного около окружности.
Площадь правильного многоугольника.

Решение уравнений высших степеней

Способ разложения на множители

Уравнением n-ой степени с одним переменным называется уравнение $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, левой частью которого является многочлен n-й степени от x, а правой - нуль.

Примеры: $x^3 - x^2 + 3x - 2 = 0$ *уравнение третьей степени*

$3x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x - 4 = 0$ *уравнение четвертой степени*

Формулы для нахождения корней уравнений третьей и четвертых степеней известны, однако эти формулы очень сложные. Уравнения высших степеней удобно решать применяя определенные способы. Один из таких способов разложение на множители

Пример: $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$. Разложим левую часть на множители сгруппировав члены как показано ниже:
$(x^3 - x^2) - (4x - 4) = 0$; $x^2(x - 1) - 4(x - 1) = 0$; $(x^2 - 4)(x - 1) = 0$
$(x - 2)(x + 2)(x - 1) = 0$;
Для того, чтобы произведение было равным нулю, необходимо, чтобы хотя-бы один из множителей был равным нулю. Поэтому $x - 2 = 0$ или $x + 2 = 0$ или $x - 1 = 0$. Отсюда $x = 2$; $x = -2$; $x = 1$.

Обучающие задания

1 Решите уравнения, воспользовавшись формулами сокращенного умножения:

a) $x^3 - 27 = 0$; b) $16x^3 = -2$ c) $x^3 - 64 = 0$;
d) $5x^3 + 40 = 0$ e) $x^4 - 1 = 0$; f) $16x^4 = 81$;

2 Решите уравнения вынесением общего множителя за скобки.

a) $16x^5 = x$ b) $2x^4 = 16x$ c) $2x^3 - 7x = x$
d) $5x^3 - 320 = 0$ e) $x^3 - 16x = 0$ f) $x^4 + 125x = 0$
g) $5x^3 - 20x^2 = 0$ h) $5x^4 - 20x^2 = 0$ i) $x^3 + x^2 = 2x^2$

3 Решите уравнения, сгруппировав члены и разложив на множители:

1) $x^3 + x^2 = 20x$
2) $x + 1 = 9x^3 + 9x^2$
3) $4y^3 - 2 = y - 8y^2$
4) $2x - 3 = 8x^3 - 12x^2$
5) $x^3 + 2x^2 - 9x = 18$
6) $9y^3 + 8 = 4y + 18y^2$
7) $3x^3 + 2x^2 = 12x + 8$
8) $4x^3 - 12x^2 = 9x - 27$
9) $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$
10) $2x^3 - 3x^2 = 18x - 27$
11) $3x^3 + 7x^2 - 12x = 28$
12) $4x^3 + 16x^2 + x + 4 = 0$
13) $2x^3 - 3x^2 - 10x + 15 = 0$
14) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$
15) $9x^4 - 12x^2 + 4 = 0$
16) $4x^4 - 12x^2 + 9 = 0$

4 Сколько действительных корней имеет уравнение $x^3 - x^2 - kx + k = 0$, если:
a) $k = 0$?
b) $k = -1$?
c) $k = 4$?

5 Решите уравнения методом разложения на множители:

a) $3x^5 - 48x = 0$	d) $x^3 + x^2 - 2x = 0$	g) $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$
b) $x^4 + 4x^2 = 32$	e) $8x^3 + 4x^2 - 18x - 9 = 0$	h) $x^3 + 5x^2 = 4x + 20$
c) $x^4 - 3x^2 = 4$	f) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 = -16x$	i) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

6 Найдите a и решите уравнение $x^3 + ax^2 - 5x + 6 = 0$, если один из корней равен 3.

7 Найдите нули функций.
a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 16x - 80$ b) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$
c) $f(x) = x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ d) $f(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$

8 **Бизнес.** Математическую модель прибыли собственника, занимающегося малым бизнесом можно записать следующим образом: $R = 5t^3 + 250t^2 + 2000t$. Здесь t показывает количество годов начиная с 2000-го года. Через сколько лет прибыль собственника будет равна 50 000 манат?

Уравнения, приводимые к квадратным

Ряд уравнений можно привести к квадратным, вводя новую переменную. Например, уравнение $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ заменой $x^n = u$ можно привести к уравнению $au^2 + bu + c = 0$. В частном случае, при $n = 2$ получается уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$, которое называется биквадратным уравнением и для его решения пользуются заменой $x^2 = u$.

Например: $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ *данное уравнение*
$(x^2)^2 - 4(x^2) - 5 = 0$ *свойство степени*
$u^2 - 4u - 5 = 0$ *замена $x^2 = u$*
$(u - 5)(u + 1) = 0$ *разложение на множители*
$u - 5 = 0$ или $u + 1 = 0$ *равенство произведения нулю*
$u = 5$ или $u = -1$ *правило нахождения неизвестной*
$x^2 = 5$, или $x^2 = -1 \rightarrow \varnothing$ *замена $u = x^2$*
$x = \pm\sqrt{5}$ *нахождение квадратного корня*

Решение уравнений высших степеней

Обучающие задания

9 Решите уравнения введением новой переменной.

a) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ d) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$ g) $8x^6 - 7x^3 + 1 = 0$

b) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ e) $27x^6 - 26x^3 + 1 = 0$ h) $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$

c) $16y^4 - 8y^2 + 1 = 0$ f) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ i) $\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2 - \dfrac{x+2}{x-1} - 2 = 0$

10 Решите уравнения.

a) $(2x^2 - 3)^2 - 4(2x^2 - 3) = 5$ b) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) = 3$

c) $(x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 + 3x - 3) = 5$ d) $(2x^2 + x - 5)(2x^2 + x - 6) = 20$

e) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) + x^2 - 3 = 0$ f) $(x^2 + 1)^2 + x^2(x^2 - 1) - 4 = 0$

g) $\left(x + \dfrac{6}{x}\right)^2 - 12\left(x + \dfrac{6}{x}\right) + 35 = 0$ h) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 3 = 0$

11 Если число $\dfrac{1}{x}$ является средним арифметическим чисел $\dfrac{1}{a}$ и $\dfrac{1}{b}$, то число x называется средним гармоническим чисел a и b.

a) Выразите это в виде рационального равенства и найдите x.

b) Среднее гармоническое двух положительных чисел равно 6, а разность этих чисел равна 8. Найдите эти числа.

12 Найдите коэффициент k из тождества.

a) $\dfrac{x^2 + kx - 3}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{x - 1}{x + 2}$ b) $\dfrac{2x^2 + kx - 10}{2x^2 + 7x + 6} = \dfrac{2x - 5}{2x + 3}$

13 Представьте, что вы выполняете оценочные задания, еженедельный максимальный балл которых равен 60. По результатам 6 недель ваш средний бал равен 48. a) Каким должен быть средний был за следующие 2 недели, чтобы ваш средний бал за восемь недель был равен 50. b) Если в первые 6 недель средний бал равен 50, то при каких возможным условиях средний бал за 10 недель составит 85 % максимального бала.

14 Выразите требуемую переменную:

a) $P = \dfrac{A}{1 + rt}$, $r = ?$ b) $V = \dfrac{mv}{m + M}$, $m = ?$

c) $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{s}$, $q = ?$ d) $S = v_0 t + \dfrac{1}{2} g t^2$, $v_0 = ?$

15 При нажатии на педаль тормоза пройденный автомобилем путь (тормозной путь) определяется зависимостью $d \approx \dfrac{v^2}{2a}$

a) Известно, что после нажатия тормоза ускорение a автомобиля равно 10 м/сек². Выведите формулу для скорости автомобиля.

b) Найдите тормозной путь автомобиля, движущийся со скоростью 90 км/ч, если ускорение равномерно-замедленного движения равно 10 м/сек².

Рациональные уравнения и решение задач

1 Решите рациональные уравнения. Напишите ДЗП.

a) $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{6x}{4-x^2} = 0$ b) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{4}{x-2}$

c) $\dfrac{5}{x^2-7x+12} = \dfrac{2}{x-3} + \dfrac{5}{x-4}$ d) $\dfrac{9}{x^2+7x+10} = \dfrac{5}{x+2} - \dfrac{3}{x+5}$

e) $\dfrac{12}{x+5} - \dfrac{12}{x} = \dfrac{2}{x+5}$ f) $\dfrac{25}{y} - \dfrac{25}{y-2} = \dfrac{2}{y}$

g) $\dfrac{1}{4}a - 4a^{-1} = 0$ h) $\dfrac{1}{2}t - 18t^{-1} = 0$ i) $8t^{-1} + 2 = 3t^{-1}$

2 Решите уравнения используя свойство пропорции.

a) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{x+2}$ b) $\dfrac{-2}{x-1} = \dfrac{x-8}{x+1}$ c) $\dfrac{x}{x^2-8} = \dfrac{2}{x}$

d) $\dfrac{8(x-1)}{x^2-4} = \dfrac{4}{x-2}$ e) $\dfrac{x^2-3}{x+2} = \dfrac{x-3}{2}$ f) $\dfrac{2(x-2)}{x^2-10x+16} = \dfrac{2}{x+2}$

g) $\dfrac{-1}{x-3} = \dfrac{x-4}{x^2-27}$ h) $\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{3}{x}$ i) $\dfrac{3x}{x+1} = -\dfrac{12}{1-x}$

3 Решите уравнения.

a) $\dfrac{3x+6}{x^2-4} = \dfrac{x+1}{x-2}$ d) $\dfrac{x-4}{x^2-3x-54} = \dfrac{2}{x^2-12x+27}$

b) $\dfrac{x-4}{x} = \dfrac{6}{x^2-3x}$ e) $\dfrac{3}{2x+1} - \dfrac{x+3}{2x^2+7x+3} = \dfrac{5}{x+3}$

c) $\dfrac{2x}{4-x} = \dfrac{x^2}{x-4}$ f) $1 = \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{3}{x^2+3x-4}$

4 Выразите искомую переменную через другие.

a) $h = \dfrac{2A}{b}$ $b = ?$ b) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{2}{b} = 3$ $a = ?$

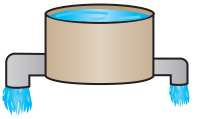
c) $\dfrac{x}{3r} + \dfrac{y}{4r} = 1$ $r = ?$ d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$ $c = ?$

e) $1 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $d = ?$ f) $x = \dfrac{a+b}{a-b}$ $a = ?$

5 Работая вместе Рагим и Джамиль скосят всю траву с поля за 2 часа. Джамиль, работая один может выполнить эту работу на 3 часа быстрее, чем Рагим. За сколько часов смог бы скосить все поле каждый из них?

Рациональные уравнения и решение задач

6 Бассейн может опорожняться одновременно двумя трубами разного диаметра за 3 часа. Труба с меньшим диаметром опорожняет бассейн на 8 часов позже, чем труба с большим диаметром. За сколько часов опорожнит бассейн каждая труба в отдельности?



7 Фирма, производящая велосипеды определила первоначальный стабильный расход в 90 000 манат и на производство каждого велосипеда 45 манат. Сколько велосипедов должна произвести фирма, чтобы на изготовление одного велосипеда в среднем было потрачено 55 манатов.

8 Представьте, что вы планируете прочитать книгу в 480 страниц за 10 дней. После того как, вы прочитали половину книги оказалась, что для того, чтобы прочесть книгу в срок, вам нужно читать каждый день на 20 страниц больше. По сколько страниц в день вы читали первую половину книги?

9 Туркан думает о том, какую из предложенных работ ей выбрать. Месторасположение одной из работ очень близко к её дому и работа почасовая. На другой работе ей предлагают за каждый час работы на 2,25 манатов больше, чем на первой. Если она выберет эту работу, то работая на 10 часов меньше может заработать 980 манат вместо 900 манат, которые ей предлагают на первой работе. Сколько манат было предложено Туркан за 1 час на каждой работе?

10 **Химия.** Новую концентрацию раствора соли и воды можно вычислить по формуле $C = \dfrac{A}{s+v}$, здесь A - количество соли в растворе, S - первоначальное количество раствора, v - добавленное количество воды. a) Какое количество воды необходимо добавить к 2 кг 30 %- го раствора соли, чтобы получить 10 %-ый раствор.

Указание: Здесь C = 0,1; A = 0,6; s = 2 кг. Найдите v.

b) Какое количество воды необходимо добавить к 0,5 кг 10%-го раствора, чтобы получить 2 %-ый раствор?

11 Сумма обратных значений двух чисел (отличных от нуля) равна отношению их суммы на произведение. Напишите тождество, показывающее верность этого утверждения и упрощая обоснуйте её.

12 Из 20 проведенных игр команда выиграла 12. Сколько игр подряд должна выиграть команда в последующих играх, чтобы выигранные игры составляли 80 % всех игр?

13 Если к первому из 2-х последовательных чисел прибавить 6, а из второго вычесть 2, то частное полученных чисел будет $\dfrac{6}{5}$. Найдите эти числа.

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

При решении уравнений содержащих переменную под знаком модуля рассматриваются два случая. **1-ый случай:** выражение стоящее под знаком модуля положительное или равно нулю.

2-ой случай: выражение стоящее под знаком модуля отрицательное. По определению абсолютной величины числа: $|x| = \begin{cases} x & \text{если } x \geq 0 \\ -x & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Пример 1. $|3x - 2| + 11 = 5$

В левой части этого равенства оставим только выражение с модулем: $|3x - 2| = 5 - 11$; $|3x - 2| = -6$. Это противоречит определению модуля, так как модуль числа должен быть или положительным числом или равным нулю. Решением таких уравнений будет пустое множество. **Ответ:** $\varnothing$

Пример 2. $|x - 3| = 6$

Алгебраический способ решения:

$x - 3$ должен равняться или 6, или же –6.

Если $x - 3 = 6$ то, $x = 9$

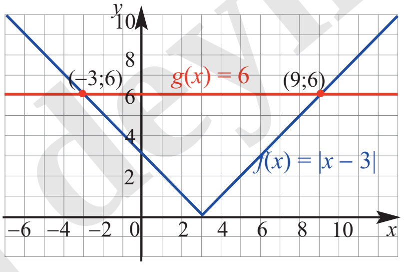
Если $x - 3 = -6$ то, $x = -3$.

Проверим, удовлетворяют ли данному уравнению найденные значения $x = 9$ и $x = -3$: При $x = 9$, $|9 - 3| = 6$; $6 = 6$. При $x = -3$, $|-3 - 3| = 6$; $|-6| = 6$

Ответ: Данное уравнение имеет два корня: 9 и –3.

Графический способ решения

В одной и той же координатной плоскости построим графики функций $f(x) = |x - 3|$ и $g(x) = 6$. По графику определим точки (–3; 6) и (9; 6). Получаем, что значения $x = -3$ и $x = 9$ являются корнями уравнения.



Пример 3. $|x^2 - 2x| = 3$

Данное уравнение приводится к совокупности. $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = 3 \\ -(x^2 - 2x) = 3 \end{array} \right.$

1-ый случай. $x^2 - 2x = 3$ $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(x - 3)(x + 1) = 0$ $x_1 = 3$ или $x_2 = -1$

Проверка: $x = 3$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|3^2 - 2 \cdot 3| = 3$; $|3| = 3$, значит $x = 3$ корень уравнения. $x = -1$: $|x^2 - 2x| = 3$; $|(-1)^2 - 2 \cdot (-1)| = 3$; $|3| = 3$, значит $x = -1$ корень уравнения.

2-ой случай. $-(x^2 - 2x) = 3$; $-x^2 + 2x - 3 = 0$; $x^2 - 2x + 3 = 0$. Дискриминант отрицательный. Решений нет.

Итак, решением данного уравнения будет: $\{-1; 3\}$.

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

Пример 4. $|2x-4| = 1-3x$

По определению абсолютной величины числа: $|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, \text{ если } x \geq 2 \\ -(2x-4), \text{ если } x < 2 \end{cases}$

I случай. Если $x \geq 2$ то, $|2x-4| = 2x-4$ и данное уравнение преобразуется к виду: $2x-4 = 1-3x$. Это записывается так:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2x-4 = 1-3x \end{cases}$$

Из уравнения $2x-4 = 1-3x$ находим $5x = 5$, $x = 1$. А это значение не удовлетворяет условию $x \geq 2$. То есть в этом случае уравнение не имеет корней.

II случай. Если $x < 2$, то $|2x-4| = -(2x-4)$ и данное уравнение примет вид: $-(2x-4) = 1-3x$. В этом случае получаем систему:

$$\begin{cases} x < 2 \\ -(2x-4) = 1-3x \end{cases}$$

Из уравнения $-(2x-4) = 1-3x$ находим $x = -3$, а это значение удовлетворяет условию $x < 2$. Таким образом данное уравнение имеет один корень. Ответ: $\{-3\}$

Обучающие задания

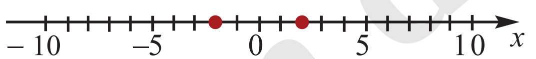
1 Представьте решения (если есть) уравнений на числовой оси.

a) $|x| = 4$ b) $|x| - 3 = 10$ c) $|x| + 5 = 5$ d) $|x| = -4$

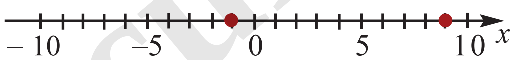
2 Решите уравнения графическим способом.

a) $|x-4| = 10$ b) $|x+3| = 2$ c) $|x-1| = 0$ d) $|x+9| = -3$

3 По решениям данным на числовой оси напишите уравнения вида $|ax+b| = c$.

a) 

b) 

c) 

4 Решите уравнения.

a) $|1-2x| + 6 = 9$ b) $|-2x| = 8$ c) $|-x| = 1$

d) $4 - |2x| = 3$ e) $5 - |\frac{1}{2}x| = 4$ f) $|x-2| = -\frac{1}{2}$

g) $|x^2 - 9| = 0$ h) $|x^2 - 2x| = 3$ i) $|x^2 + x| = 12$

j) $|x-1| = 2x-1$ k) $|2x-3| = x-1$ l) $|x+1| = 3x-1$

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

5 Изучите пример и решите уравнения.

Пример: $|2x-4| = |5x+2|$

$2x-4=5x+2$ или $2x-4=-(5x+2)$

$-3x=6$ или $7x = 2$; $x=-2$ или $x=\frac{2}{7}$

Проверка. $x=-2$: $|2\cdot(-2)-4| = |5\cdot(-2)+2|$; $|-8|=|-8|$

$x=\frac{2}{7}$: $|2\cdot\frac{2}{7}-4| = |5\cdot\frac{2}{7}+2|$; $|-\frac{24}{7}| = |\frac{24}{7}|$

Решение уравнения: $\{-2; \frac{2}{7}\}$

a) $|6x-3| = |-15|$

b) $|9x+7| = |-7|$

c) $-|3-4x| = |5-x|$

d) $|5n-4| = |7-5n|$

e) $|14y+5| = |7-14y|$

f) $\left|\frac{4p-1}{6}\right| = \left|\frac{2}{3}p+\frac{5}{6}\right|$

g) $|4{,}8m-1{,}8| = |2{,}2m+6|$

i) $|6{,}5n-1{,}4| = |3{,}5n-8{,}6|$

j) $|2y+1| = |2y-7|$

k) $|6y+10| = |7y-16|$

l) $|12a+1| = |12a-25|$

m) $\left|\frac{5p+3}{6}\right| = \left|\frac{1}{3}p-3\right|$

Прикладные задания

6 Махир решил уравнение $|x-2| = x^2$ графическим, Лейла алгебраическим способом. Чьё решение правильное?

Лейла:

$|x-2| = x^2$

1. $x-2=x^2$

$x^2-x+2=0$

Нет решений

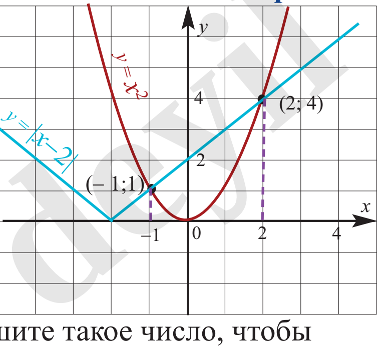
2. $-x+2=x^2$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2$; $x=1$

Махир:



7 В уравнении $|x^2-1| = k$, вместо k напишите такое число, чтобы уравнение:

a) не имело решений;

b) имело два действительных корня;

c) имело три действительных корня;

d) имело четыре действительных корня.

8 a) Напишите уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, чтобы точки на числовой оси, соответствующие его решению, были на расстоянии 6 единиц от нуля.

b) Напишите уравнение, содержащее переменную под знаком модуля, чтобы точки на числовой оси, соответствующие его решению, были на расстоянии $\frac{11}{2}$ единиц от нуля.

Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля

9 Сабухи и Камран по заданным вопросам в интернете проверили свои IQ (интеллектуальные способности). Сабухи говорит, что его IQ отличается от IQ Камрана на 15 баллов. IQ Камрана было оценено на 110 баллов. Представьте баллы, показывающие уровень способности Сабухи в виде уравнения, содержащей переменную под знаком модуля.

10 Напишите и изобразите на числовой оси уравнение с модулем, соответствующее каждому из заданных условий:

a) Число k находится на расстоянии 4 единиц от 2.

b) Число m находится на расстоянии 5 единиц от -3.

c) Число $2x$ находится на расстоянии 3 единиц от 5.

d) Число $3t$ находится на расстоянии 4 единиц от -2.

11 Наименьшее из 2-х действительных чисел (минимум) n и m удовлетворяет следующему условию:

$$\min(m, n) = \frac{m + n - |m - n|}{2}$$

Проверьте равенство для нескольких значений m и n.

12 Масса Гасана 48 кг. Врач говорит что, эта масса отличается от идеальной массы на 5 %. Напишите идеальную массу, которую имел в виду врач с помощью уравнения, содержащего переменную под знаком модуля .

13 Решите уравнения.

a) $11 + |x| = 3$ b) $|x| - 22 = -3$ c) $7 - 3|x + 4| = -8$

d) $|4x - 3| = |5x + 3|$ e) $|x - 8| = |8 - x|$ f) $|x - 6| = 3 - 4x$

g) $4 - \frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}x - 5\right| = 3$ h) $\left|\frac{7}{4} - x\right| = \left|4 - \frac{1}{4}\right|$ i) $\left|x - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}\right|$

14 Докажите, что если $|x - a| = |x - b|$ (здесь $a < b$),

то $x = \frac{a + b}{2}$ (то есть x средняя точка отрезка $[a; b]$).

15 a) Постройте графики функций $f(x) = |3x - 2|$ и $g(x) = |-3x + 2|$ Выразите свое мнение по поводу этих графиков.

b) Напишите функцию вида $g(x) = |ax + b|$, график которой совпадет с графиком функции $f(x) = |2x + 1|$.

Системы уравнений

Уравнения с двумя переменными. Системы уравнений

Примеры уравнений с двумя переменными

$2x - 3y = 1$ $\qquad$ $3x^2 - 2xy + y = 0$ $\qquad$ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных $(x_0; y_0)$, обращающая уравнение в верное равенство.

Например, пара чисел $(-2; 5)$, первое из которых означает значение переменной x, а второе переменной y является решением уравнения $y - x^2 = 1$ (т.к. верно равенство $5 - (-2)^2 = 1$). Графиком уравнения с двумя переменными является множество точек на координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения. Например, графиком уравнения $y - 2x = 3$ является прямая, графиком уравнения $y = x^2 - 2x$ парабола, а графиком уравнения $x^2 + y^2 = 3$ является окружность.

Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких уравнений с двумя (или более) переменными - значит нужно решить систему. Пару $(x_0; y_0)$ являющую решением каждого уравнения системы называют решением системы, а совокупность всех пар называют множеством решений системы.

Обучающие задания

1 Проверьте какая из пар является решением уравнения $x^2 - y + 2 = 0$.

a) $x = 1, y = 3$ $\qquad$ b) $x = -2, y = 2$ $\qquad$ c) $x = -2, y = 6$

2 Покажите любые три решения уравнения.

$x - 2y = 3$ | $x^2 + 2y = 1$ | $(x-1)(y+2) = 0$ | $(x^2+4)(y-3) = 0$

3 Постройте графики уравнений.

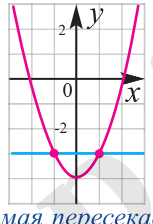
a) $xy = 6$ $\qquad$ b) $x^2 + y^2 = 16$ $\qquad$ c) $y = x^2 - 2x$

4 Являются ли a) $(-8; 6)$; b) $(-5; 3)$ решением системы: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = -2 \end{cases}$

Системы уравнений, в которых одно уравнение первой, а другое второй степени

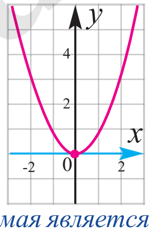
Графический способ. Решение системы можно определить построив графики обеих уравнений в одной координатной плоскости и найдя координаты точек пересечения (хотя бы приблизительно). Обычно, решение системы графическим способом удобно, когда нужно найти количество корней.

$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3 \end{cases}$



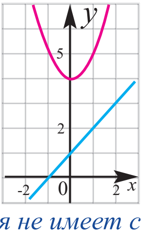
Прямая пересекает параболу в двух точках. Система имеет два решения

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$



Прямая является касательной к параболе. Система имеет одно решение

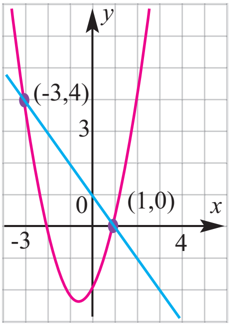
$\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = x + 1 \end{cases}$



Прямая не имеет с параболой общих точек. Система не имеет решений.

Система уравнений

Пример 1. $\begin{cases} y = x^2 + x - 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$

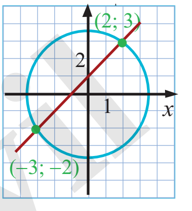


В одной системе координат построим графики соответствующие каждому уравнению системы. Графиком уравнения $y = x^2 + x - 2$ является парабола, а графиком уравнения $y = -x + 1$ прямая. Определим координаты точек пересечения графиков: (1; 0) и (–3; 4). Подставив эти значения в уравнения системы можно проверить, что в этом случае решения были найдены точно.

	1. уравнение		**2. уравнение**
	левая правая		левая правая
(1; 0)	$0 = 1^2 + 1 - 2,\ 0 = 0;$		$0 = -1 + 1,\quad 0 = 0.$
(–3; 4)	$4 = (-3)^2 - 3 - 2,\ 4 = 4;$		$0 = 1 + 1,\quad 0 = 0.$
Ответ: (1; 0), (–3; 4)			$4 = -(-3) + 1 = 4$

Пример 2.

Определите сколько решений имеет система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ y = x + 1 \end{cases}$



Решение: Построив окружность с заданным уравнением $x^2 + y^2 = 13$ и прямую $y = x + 1$ в одной системе координат, можно увидеть что они пересекаются в двух точках. Пара $(x; y)$ - координаты этих точек являются решениями данной системы уравнения.

Ответ: Данная система имеет два решения

5 Решите систему уравнений графическим способом. Определите сколько решений имеет каждая система.

a) $\begin{cases} y = 3 - x \\ y = (x + 3)^2 + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x - 3)^2 + 2 \\ y + x = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y + 3 = x^2 \\ y = 2x \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 + 8x + 11 \\ y = 5 \end{cases}$

6 Построив окружность и прямую в одной системе координат определите сколько решений имеет каждая система уравнений.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - 5 = 0 \end{cases}$

Система уравнений

Решение системы уравнений, в которой одно уравнение первой, а другое второй степени алгебраическим путем.

Способ подстановки.

1) Из уравнения первой степени выражается одна переменная через другую.
2) Полученное выражение подставляется в другое уравнение системы и получается уравнение с одним неизвестным.
3) Решив это уравнение, находится значение неизвестного.
4) По найденному значению одного неизвестного находится другое неизвестное.

Пример 1. $\begin{cases} y = x^2 + 6x - 9 \\ -3x + y = -5 \end{cases}$

1) Выразим y через x из уравнения $-3x + y = -5$: $y = -5 + 3x$
2) Подставим в уравнение $y = x^2 + 6x - 9$ выражение $y = -5 + 3x$ получим:
$-5 + 3x = x^2 + 6x - 9$; $x^2 + 3x - 4 = 0$; $(x - 1)(x + 4) = 0$; $x_1 = 1, x_2 = -4$
3) Подставим значения $x_1 = 1, x_2 = -4$ в выражение $y = -5 + 3x$ и найдем. $y_1 = -5 + 3 \cdot 1 = -2$, $y_2 = -5 + 3 \cdot (-4) = -17$.
4) Ответ: $(1; -2)$, $(-4; -17)$.

Способ почленнего сложения (или вычитания)

Пример 2. $\begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$ Выполним последовательно решение системы.

1) Вычтем из первого уравнения второе, $-\begin{cases} y = x^2 - 8x - 5 \\ y = -4x + 7 \end{cases}$

$$0 = x^2 - 4x - 12$$

2) Решим полученное уравнение:
$x^2 - 4x - 12 = 0$: $(x - 6)(x + 2) = 0$; $x_1 = 6, x_2 = -2$
3) Подставим значения $x_1 = 6, x_2 = -2$ в одно из уравнений системы получим: $y_1 = -4 \cdot 6 + 7 = -17$; $y_2 = -4 \cdot (-2) + 7 = 15$
4) Ответ: $(6; -17)$, $(-2; 15)$

Обучающие задания

7 Решите системы уравнений способом подстановки.

a) $\begin{cases} x = y + 3 \\ y \cdot x = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 6 - x \\ x^2 - y^2 = 12 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ y^2 - x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ y + xy = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y - x = 4 \\ xy = -3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y + x = 3 \\ x^2 + xy = 12 \end{cases}$

8 Решите систему уравнений способом сложения (вычитания).

a) $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x - 11 \\ y = x^2 - 4x - 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - x^2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y - 11 = 0 \\ 2x + 5y - y^2 - 6 = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^2 + 4y = 10 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

9 Решите систему уравнений алгебраическим способом. Определите количество общих точек окружности и прямой. Проверьте графкалькулятором.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = x - 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

Система уравнений

10 При помощи дискриминанта определите число решений системы.

Пример. Как можно определить число решений системы

$\begin{cases} y = x^2 + 3x + 3 \\ y = -2 \end{cases}$?

Применив способ почленного вычитания получим квадратное уравнение $x^2 + 3x + 5 = 0$. Определим знак дискриминанта:
$D = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0$ Так как дискриминант отрицательный, то данная система не имеет решений.

a) $\begin{cases} y = x^2 + 3x + 3 \\ y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 - 5 \\ y = 4x \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = x^2 - 5x - 3 \\ y = -3x \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2x^2 - 2x + 1 \\ y = 3x - 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = -x^2 + 3x - 5 \\ y = -x - 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = x^2 + 5 \\ y = x + 2 \end{cases}$

11 Прямая с угловым коэффициентом $k = 2$ имеет с параболой $y = 2x^2 + 6x + 5$ общую точку. Определите ординату точки пересечения прямой с осью Oy.

Решение: Так как $k = 2$, то уравнением прямой будет $y = 2x + b$.

Из системы уравнений: $\begin{cases} y = 2x + b \\ y = 2x^2 + 6x + 5 \end{cases} \Rightarrow 2x + b = 2x^2 + 6x + 5$

$$\overset{a}{2}x^2 + \overset{b}{4}x + \overbrace{(5 - b)}^{c} = 0$$

Так как, по условию система имеет одно решение, то дискриминант уравнения равен 0.
$D = 0;\ 16 - 4 \cdot 2 \cdot (5 - b) = 0;\quad 16 - 40 + 8b = 0;\quad 8b = 24;\quad b = 3$

Уравнение прямой будет: $y = 2x + 3$. Значение b определяет точку пересечения прямой с осью Oy. Другими словами, при $x = 0$ прямая пересекает ось Oy. Если $x = 0$, то $y = 3$. Ответ: 3

12 a) Прямая $y = 4x + b$ и парабола $y = -3x^2 - 2x + 4$ не имеют общих точек. Какие значения может принять b?

b) Прямая $y = 3x + b$ и парабола $y = 2x^2 - 5x + 3$ имеют одну общую точку. Найдите значение b .

13 Уравнение прямой имеет вид $y = kx - 5$. При каком значении k эта прямая будет касательной к графику квадратичной функции $y = 3x^2 + 4x - 2$?

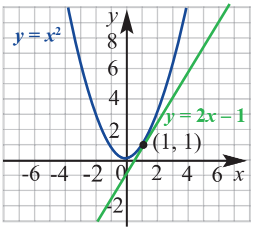
14 При каком значении параметра b система, составленная из уравнений $y = x^2 + 1$ и $y - 2x = b$, не имеет решения?

15 Найдите точку пересечения.

a) Гиперболы $y = \dfrac{8}{x}$ с прямой $y = x - 2$;

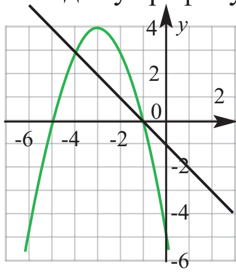
b) Окружности $x^2 + y^2 = 5$ с прямой $3y + x = 5$.

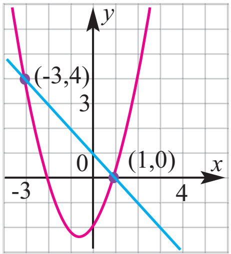
16 Напишите систему уравнений, соответствующую каждому графику.

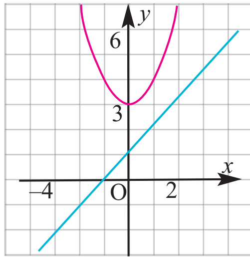
1) 

Пример:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

2) 

3) 

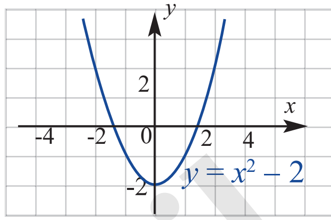
4) 

17 Напишите такое уравнение прямой, чтобы оно составило систему с уравнением, график которого изображен на рисунке, при условии что, система должна:

a) иметь два решения;

b) иметь одно решение;

c) не иметь решений.



18 **Вопрос открытого типа**: Напишите систему уравнений для каждого случая и представьте графически.

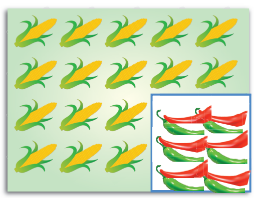
a) парабола и горизонтальная линия

b) парабола и прямая с угловым коэффициентом $k > 0$.

19 Самир изо всех сил бросил футбольный мяч вверх. Зависимость расстояния от земной поверхности h (в метрах), от времени t (сек.) задается формулой: $h(t) = 24t - 5t^2 + 1$.

Одновременно из гнезда на высоте 16 м со скоростью 4 м/сек вылетела птичка. Через сколько секунд мяч и птичка окажутся на одинаковой высоте?

20 На посевной площади прямоугольной формы для кукурузы, фермер запланировал выделить участок для посадки перца. Для ограждения этого участка он использовал материал длиной 32 метра, которым огородил прямоугольной участок площадью 64 м². Найдите размеры посевной площади перца.



21 Напишите систему уравнений, если одно уравнение системы имеет вид $y = x^2 - 6x - 10$, а другое уравнение, будучи линейным, пересекает параболу в точках $x = 3$ и $x = 2$.

Система уравнений

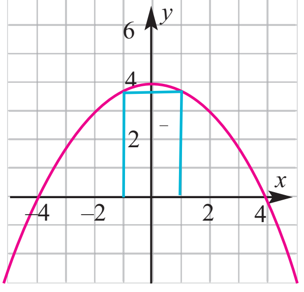
22 Движение до момента раскрытия парашюта определяется формулой: $h(t) = -5t^2 + 5000$, а после раскрытия парашюта определяется формулой $h(t) = -5t + 4000$. Здесь t (сек) означает время, h расстояние (в метрах) парашютиста до земли.

a) На каком расстоянии от земли парашют раскрылся?

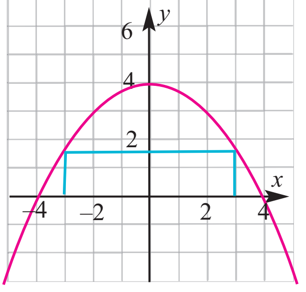
b) Через сколько секунд парашют раскрылся?

23 Две вершины прямоугольника данные на рисунке лежат на оси абсцисс, а две другие на параболе $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$. Найдите площадь прямоугольника.

a)

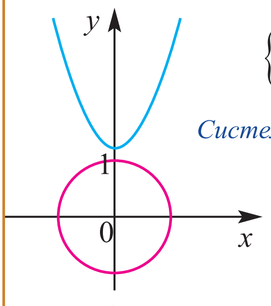


b)



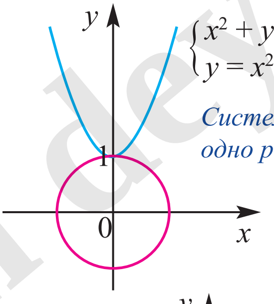
Системы уравнений, в которых оба уравнения второй степени

Количество решений системы уравнений, в которых оба уравнения второй степени можно определить графическим способом



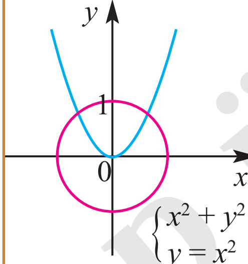
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 + 2 \end{cases}$$

Система не имеет решений



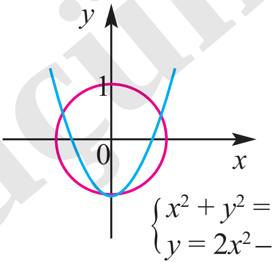
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$$

Система имеет одно решение



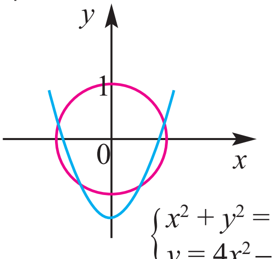
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Система имеет два решения



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

Система имеет три решения



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 4x^2 - 2 \end{cases}$$

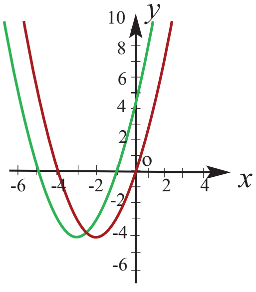
Система имеет четыре решения

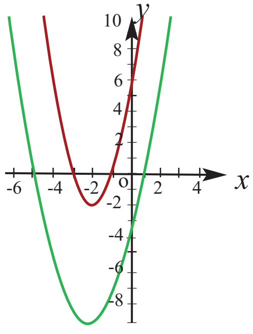
24 Решите систему уравнений графическим способом.

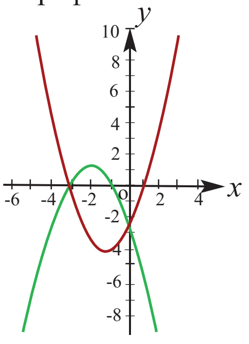
a) $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 9 - x^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2(x-3)^2 + 4 \\ y = -2(x-3)^2 + 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x+2)^2 - 4 \\ y = (x-4)^2 - 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 2x^2 - 4x + 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^2 - 7 \end{cases}$ f) $\begin{cases} xy = 3 \\ y - x^2 = 2 \end{cases}$

25 Составьте систему уравнений, соответствующую графикам.







26 $\begin{cases} y = (x+3)^2 - 1 \\ y = x^2 + 6x + 8 \end{cases}$ Если упростить правую часть первого уравнения системы, то можно заметить, что оба уравнения одинаковы. Графики уравнения совпадают и система имеет бесконечно много решений. Напишите системы уравнений, которые будут иметь бесконечно много решений.

27 Зная, что точки $(-1;\ 2)$ и $(2;\ 5)$ являются решением системы уравнений, выполните задания.

a) Напишите такую систему уравнений, чтобы одно уравнение было линейным, а другое - второй степени и, чтобы только данная пара была бы решением системы.

b) Напишите систему уравнений, в которой оба уравнения второй степени и, чтобы только данная пара была бы решением системы.

c) Напишите такую систему уравнений, в которой оба уравнения второй степени и, чтобы вместе с данными парами система имела бы бесконечно много решений.

28 Решите систему уравнений алгебраическом способом.

a) $\begin{cases} x^2 = xy + 3 \\ xy = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x + 5xy + y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

29 Изобразив схематически графики уравнений, входящих в системы, определите какая система имеет два решения, одно решение, не имеет решений или же имеет бесконечно много решений.

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x^2 + 3 \\ y = -2x - 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = (x-3)^2 - 3 \\ y = \dfrac{1}{3}(x-3)^2 - 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = 2(x+2)^2 - 3 \\ y = -2(x+2)^2 - 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y = 2(x-3)^2 + 1 \\ y = -2(x-3)^2 - 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = (x+4)^2 - 1 \\ y = x^2 + 8x + 15 \end{cases}$

Решение задач с помощью систем уравнений

1 На премьеру спектакля было продано 560 билетов. Цена одного билета 6 манат. Студентам продают билеты со скидкой в 30 %-тов. Сколько билетов было куплено студентами, если от продажи билет поступило 2586 манат?

2 Джалиль и Самед купили для одноклассников в буфете бутерброд и лимонад. Джалиль за 5 бутербродов и 2 бутылки лимонада заплатил 7,1 манат, а Самед за 4 бутерброда и 7 бутылок лимонадов - 10 манат. Сколько стоит 1 лимонад и 1 бутерброд?

3 Гюляндам имеет два банковских счета: с простой процентной ставкой 4,5 % и 6 % соответственно. Сумма на 6 %-ом счету в три раза больше 4,5%-ом. Если через год сумма денег на обеих счетах составит 4225 манат, то сколько денег на каждом счету?

	4,5%	6%
Первоначальная сумма	x	y
Годовой рост	$0{,}045x$	$0{,}06y$
Всего	4225	

Исследуйте таблицу и нарисуйте ее в тетради. Решите задачу при помощи системы уравнений.

4 Банк предлагает две различные услуги. Если сумму поместить без страховки, то прибыль составит 5,5 %, а если застраховать, то прибыль составит 3,5 % простого процентного роста.
Сардар поместил деньги на два счета. На незастрахованный счет он поместил на 700 манат больше, чем на застрахованный. Сколько денег поместил Сардар на каждый счет, если к концу года прибыль с обоих счетов составила 250 манат?

5 Чистящее средство А содержит 25 % кислоты, а чистящее средство В содержит 50 % кислоты. Сколько литров каждого средства нужно взять, чтобы получить 10 л чистящего средства с 35 % содержанием кислоты.
Указание. Обозначим количество 25% -го чистящего средства через x, а 50% -го через y, запишем данные в таблицу.

	25%	50%	35%
Количество средства	x	y	$x+y=10$
Количество кислоты	$0{,}25x$	$0{,}5y$	$0{,}25x+0{,}5y$

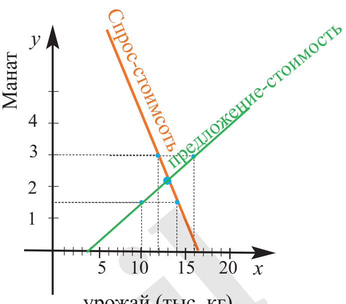
Решив систему уравнений $\begin{cases} x+y=10 \\ \dfrac{0{,}25x+0{,}5y}{x+y}=0{,}35 \end{cases}$ можно получить то, что требуется в задаче.

Решение задач с помощью систем уравнений

6 На фабрике по производству шелковой одежды используются нитки-чисто шелковые и с 85 %-ым содержанием шелка. Сколько килограмм каждого вида нитей нужно взять, чтобы получить 120 кг ниток с 96%-ым составом шелка?

7 Сколько килограм 15%-го и 22%-го темьянового чая нужно взять, чтобы при перемешивании получить 5 кг 18 %-го темьянового чая.

8 Когда один килограмм черешни стоил 3 манат, то спрос на нее составил 12 000 кг при наличии 16 000 кг урожая на базаре. После снижения цены до 1,5 манат, спрос на черешню увеличился до 14 000 кг при имеющихся 10 000 кг в наличии. Если условиться, что между стоимостью спроса и предложения и количеством (спрос- стоимостью, предложение – стоимостью) существует линейная зависимость, найдите количество проданной черешни и стоимость 1 килограмма черешни и когда спрос и предложение совпадают.



Указание: Обозначьте через *x* (тыс. кг) вес черешни, через *y* - стоимость 1 кг черешни (манат). Запишите зависимость (предложение -стоимость) учитывая координаты точек. (16; 3) и (10; 1,5) в линейном уравнении $y - y_1 = k(x - x_1)$. Аналогично, по координатам точек (12; 3) и (14; 1,5) проверьте зависимость спрос-стоимость.

9 Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 17 см. Если каждый из катетов уменьшить на 3 см, то гипотенуза уменьшится на 4 см. Найдите площадь первоначального треугольника.

10 Две трубы, работая вместе наполняют бак за 12 минут. Если сначала первая труба наполнит первую половину бака, а затем вторая труба наполнит вторую половину бака, то бак наполнится за 25 минут. За какое время наполнится бак каждой трубой в отдельности?

11 Из двух городов A и B, расстояние между которыми 80 км, одновременно навстречу друг-другу выехали два автомобиля. После того, как они встретились, один из автомобилей прибыл в B через 20 минут, а другой в A через 45 минут. Найдите скорости автомобилей.

12 Шагая по движущемуся вниз эскалатору, пассажир спускается в метро за 24 секунды, а по недвижущемуся эскалатору за 42 секунды. За сколько секунд спустится пассажир, если он будет стоять на движущемся эскалаторе?

Обобщающие задания

1 Решив системы уравнений определите количество точек пересечения графиков.

1) $\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ -3x + y = -7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x - y = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -3x^2 + y^2 = 9 \\ -2x + y = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ -x + y = -4 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = -2x \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + 2y^2 = -6 \\ x + 8y = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 5x^2 + 3y^2 = 17 \\ -x + y = -1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 4x^2 - 5y^2 = 16 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = 15 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ y = x - 4 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 3x + 5 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 = 6y \\ y = -x \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ y = x - 7 \end{cases}$

16) $\begin{cases} (x-4)(y-5) = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ 17) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$ 18) $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y \\ y^2 - y + 1 = x \end{cases}$

2 Имеются 20 %-ый и 10%-ый растворы солей. Сколько граммов 10 %-го раствора нужно добавить в 100 г 20%-го раствора, чтобы получить 12,5%-ый раствор?

3 Решите уравнения.

a) $x^5 - x^3 = 0$ b) $x^4 = 16x^2$

c) $x^3 - x^2 = 4(x-1)^2$ d) $2x^3 + 2x^2 = (x+1)^2$

e) $(x-2)(x+2)(x^2+4) = 25x^2 - 16$ f) $(x-1)(x+1)(x^2+1) = 6x^2 - 1$

g) $(x^2+6x)^2 - 24 = x^2 + 6x$ h) $(x^2+2x)(x^2+2x+2) = 3$

4 Из двух пунктов, расстояние между которыми 18 км, одновременно навстречу друг-другу вышли две группы туристов и встретились через 2 часа. Найдите скорость каждой группы, если время потраченное на расстояние между пунктами первой группой на 54 минуты больше чем второй.

5 Доход фирмы можно определить с помощью формулы:
$P = 200n - n^2$. Здесь n количество работников.

a) При каком количестве работников прибыль фирмы будет наибольшей?

b) Найдите область определения и множество значений данной функции.

c) Выразите переменную n через P. Какое ограничение должно быть отмечено для выражения, стоящего под знаком квадратного корня в равенстве?

Обобщающие задания

6 Решите систему уравнений способом почленного сложения.

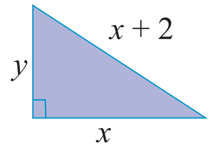
a) $\begin{cases} x^2+y^2 = 12 \\ xy = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2 = 18 \\ xy = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+xy = 8 \\ y^2+xy = 8 \end{cases}$

7 Решите систему уравнений способом почленного деления.

a) $\begin{cases} xy-x = 2 \\ xy^3-xy^2 = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y = 3 \\ x^3+x^2y = 12 \end{cases}$ c) $\begin{cases} xy^2-x = 9 \\ xy^3-xy = 18 \end{cases}$

8 Представьте, что скорость движущегося автомобиля 90 км/ч. Автомобиль обогнал полицейскую машину, стоящую на обочине дороги. Для того, чтобы остановить нарушителя, полицейский двигаясь равноускоренно увеличивает скорость. Зависимость пройденного пути (м) от времени (мин) можно выразить формулой $d = 375t^2$. За какое время полицейский сможет догнать нарушителя?

9 Периметр треугольника равен 24 см. По данным рисунка найдите длины сторон треугольника.



10 Решите уравнения.

a) $x^3 + 5x^2 + 15x + 27 = 0$

b) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$

c) $\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{x-1} = 12$

d) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = 2\dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{x+6}{x+7} - \dfrac{5}{x-7} = \dfrac{3x-7}{x^2-49}$

f) $\dfrac{x+4}{x-6} - \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{x+25}{x^2-4x-12}$

11 Из вершины прямого угла, вдоль его катетов начали одновременно двигаться два тела. Через три секунды расстояние между ними стало 15 метров. Зная, что расстояние пройденное первым телом за 3 секунды равно расстоянию, пройденному вторым телом, за 4 секунды, найдите скорости этих тел.

12 Докажите, что парабола $y = x^2 + 4$ и прямая $y - x + 3 = 0$ не пересекаются.

13 Участок прямоугольной формы имеет длину равную 60 м и ширину 8 м. На сколько метров нужно уменьшить длину и ширину этого участка, чтобы площадь уменьшилась в 2 раза, а периметр на 44 метра.

14 При каких значениях параметра a система уравнений имеет единственное решение?

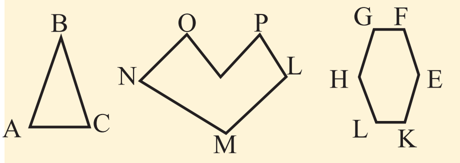
a) $\begin{cases} y + 2x = a \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = a \\ yx = 9 \end{cases}$

Многоугольники

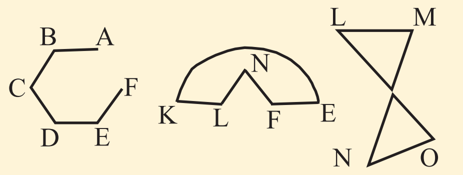
Ломаная линия, многоугольники

Ломаная линия состоит из таких нескольких последовательно-соединенных отрезков, таких что: конец первого является началом второго, конец второго является началом третьего и т.д. Если конечная точка последнего отрезка совпадает с начальной точкой первого отрезка, то ломаная называется замкнутой. Многоугольник - это фигура, образованная замкнутой ломаной линией, в которой смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные - не пересекаются.

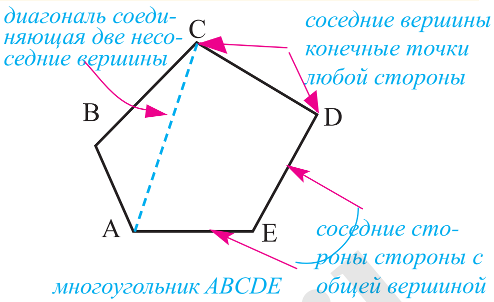
Многоугольники



Не являются многоугольниками

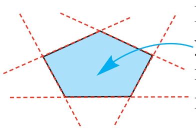


- Многоугольник - это плоская фигура.
- Стороны состоят из конечного числа отрезков.
- Многоугольник это замкнутая фигура, делящая плоскость на 2 части: внутреннюю замкнутую область и внешнюю бесконечную область.
- Многоугольник обозначают буквами, указывающими его вершины.



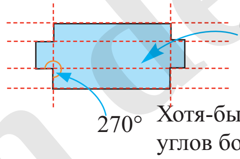
Многоугольники бывают выпуклые и вогнутые. Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой содержащей его сторону. Если не лежит в одной полуплоскости - вогнутым.

Выкуплый многоугольник



В выкуплых многоугольниках все диагонали лежат внутри него

Вогнутый многоугольник

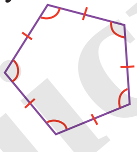


Диагональ лежит вне многоугольника

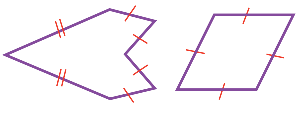
Хотя-бы один из внутренных углов больше 180°.

Многоугольник называется правильным, если у него все стороны и все углы конгруэнтны.

Правильный многоугольник



Неправильные многоугольники

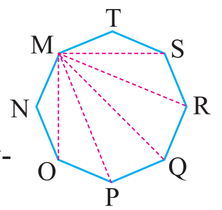


В многоугольнике количество вершин, сторон и углов одинаковые. Многоугольник с n - сторонами называют еще и n - угольным.

Соответственно количеству сторон, многоугольники называются треугольными, четырехугольными, пятиугольными, шестиугольными т.д. Из любой вершины выпуклого n - угольника выходят $(n-3)$ диагонали.

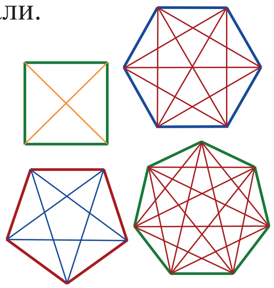
Многоугольники

1 По рисунку напишите названия: a) сторон; b) пяти вершин несмежных с какой-либо вершиной; c) двух смежных сторон; d) пяти диагоналей фигуры.



2 a) Нарисуйте в тетради два выпуклых и два вогнутых многоугольника
b) Нарисуйте в тетради один выпуклый и один вогнутый пятиугольник и покажите все диагонали.

3 В тетради, нарисуйте многоугольники и их диагонали как показано на рисунке. Составьте таблицу, показывающую число сторон, возможное число диагоналей проведенных из одной вершины и общее число всех диагоналей много угольника. Обоснуйте формулу $\dfrac{n(n-3)}{2}$,

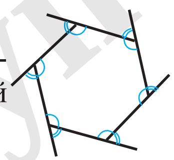


показывающую количество всех диагоналей выпуклого n-угольника.

4 a) Сколько диагоналей имеет выпуклый восьмиугольник и двенадцатиугольник?
b) Сколько сторон у многоугольника с общим числом диагоналей 35; 90?

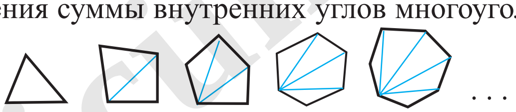
5 a) Число диагоналей многоугольника в 2 раза больше числа сторон. Сколько сторон у многоугольника?
b) Число диагоналей в 6 раз больше числа сторон. Сколько диагоналей выходят из одной вершины этого многоугольника ?

Внутренние и внешние углы многоугольника



Угол, образованный двумя сторонами, исходящими из данной вершины называется внутренним углом при данной вершине выпуклого многоугольника. Угол, смежный с внутренним углом многоугольника называется внешним. Сумма внутренних и внешних углов (взятых по одному при каждой вершине) многоугольника при любой вершине равна 180°.

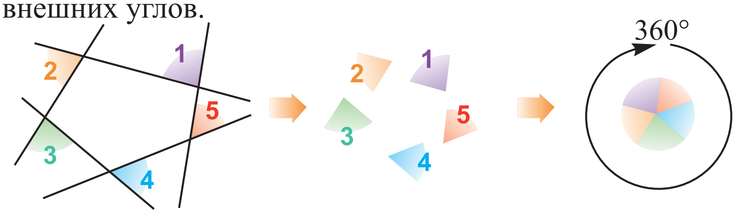
Исследование 1. Заполните нижеприведенную таблицу. Напишите формулу для вычисления суммы внутренних углов многоугольника с n сторонами.



Количество сторон многоугольника	3	4	5	6	7	. . .	n
Диагонали исходящие из одной вершины	0	1				. . .	
Количество треугольников	1	2					
Сумма внутренних углов	$1\cdot180^\circ$ 180°	$2\cdot180^\circ$ 360°					

Многоугольники

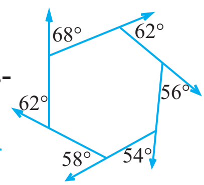
Исследование 2. На листе бумаги нарисуйте любой многоугольник, закрасив внешний угол при каждой вершине, как показано на рисунке. Вырежьте внешние углы и приклейте на другую бумагу так, чтобы не прикрывая друг-друга все вершины были в одной точке. Выразите свое мнение о сумме внешних углов.



Внутренние и внешние углы многоугольника

Теорема 1. Сумма внутренних углов выкуплого n - угольника ($n \geq 3$) равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

Следствие: Каждый внутренний угол правильного n - угольника равна $\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$



Теорема 2. Сумма внешних углов выкуплого многоугольника равна 360°.

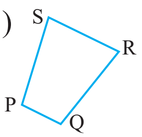
Сумма внешних углов = сумма развернутых углов - сумма внутренних углов: $180^\circ \cdot n - 180^\circ(n-2) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ$

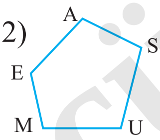
Следствие 2. Каждый внешний угол правильного n- угольника равна $\dfrac{360^\circ}{n}$.

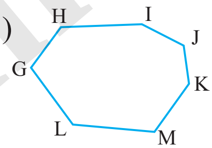
Пример 1. Один из внешних углов правильного многоугольника равен 60°.
a) найдите градусную меру внутреннего угла многоугольника;
b) найдите число сторон многоугольника.

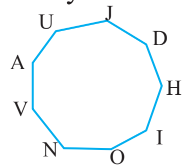
Решение: a) Внутренний угол + Внешний угол = 180°;
Внутренний угол: $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ b) $\dfrac{360^\circ}{n} = 60^\circ$ $n = \dfrac{360^\circ}{60^\circ} = 6$

6 По рисунку найдите сумму внутренних углов каждого многоугольника.

1) 

2) 

3) 

4) 

7 1) Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника равна 1800°. Найдите сколько: a) сторон; b) диагоналей имеет многоугольник.

2) Найдите градусные меры внутренних и внешних углов правильного: a) шестиугольника, b) десятиугольника.

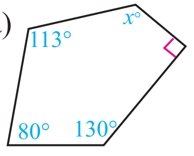
3) Сумма внутренних углов правильного многоугольника равна 1080°. Найдите градусные меры каждого внутреннего и внешнего угла многоугольника.

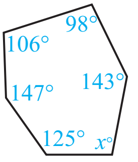
8 Найдите градусные меры внутренних и внешних углов правильного многоугольника с числом сторон $n = 8$; $n = 9$; $n = 12$; $n = 15$.

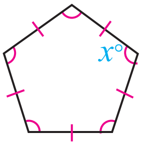
9 Выпуклый многоугольник имеет 27 диагоналей. Найдите сумму внутренних углов этого многоугольника.

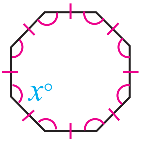
10 Внешний угол правильного многоугольника составляет 25% внутреннего угла. Найдите число сторон многоугольника.

11 Найдите неизвестный угол многоугольника.

a) 

b) 

c) 

d) 

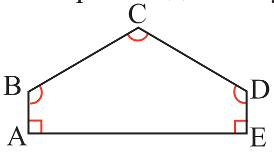
12 Внутренние углы выпуклого пятиугольника равны 60°, 80°, 120°, 140°. Найдите градусную меру пятого угла.

13 Внутренние углы выпуклого шестиугольника равны 90°, 110°, 120°, 124° и 116°. Найдите внешний угол при вершине шестого угла шестиугольника.

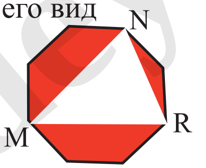
14 По данному внутреннему углу, найдите число сторон правильного многоугольника. 1) 120° 2) 150° 3) 140° 4) 160°

15 По данному внешнему углу, найдите число сторон правильного многоугольника. 1) 72° 2) 40° 3) 36° 4) 30°

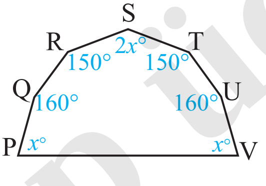
16 a) На рисунке изображен вид крыши дома спереди. По отмеченным знакам напишите градусные меры каждого из углов.



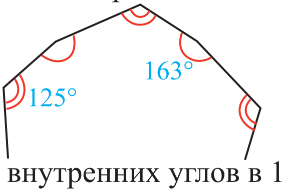
b) На знаке STOP , имеющего вид правильного шестиугольника, изображен треугольник MNR . По сторонам этого треугольника определите его вид



17 a) На рисунке изображен вид палатки спереди. Найдите градусные меры неизвестных углов.

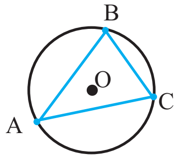


b) Внутренние углы многоугольника, градусные меры которых указаны на рисунке, состоят из последовательности конгруэнтных углов. Воспользовавшись внешними углами многоугольника, найдите число его сторон.

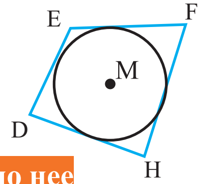


18 В правильном многоугольнике сумма внутренних углов в 11 раз больше суммы внешних углов. Сколько сторон у многоугольника?

Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности

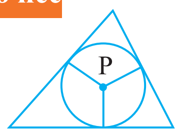


Определение 1. Многоугольник называется вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности, а окружность называется описанной около многоугольника. На рисунке треугольник ABC вписан в окружность.

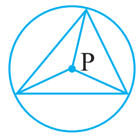


Определение 2. Многоугольник называется описанным около окружности, если все его стороны касаются окружности, а окружность называется вписанной в многоугольник. На рисунке четырехугольник DEFH описан около окружности.

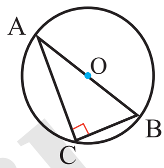
Окружности вписаные в треугольник и описанные около нее



Теорема 1. В любой треугольник можно вписать окружность. Центром этой окружности будет точка пересечения биссектрис углов треугольника.

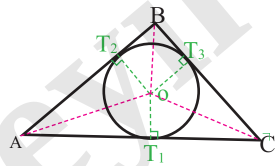


Теорема 2. Около любого треугольника можно описать окружность. Центром этой окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

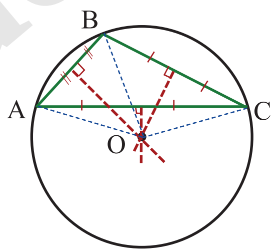


Теорема 3. Если в окружность вписан прямоугольный треугольник, то гипотенуза является диаметром этой окружности.

Обратная теорема. Если сторона треугольника, вписанного в окружность является диаметром, то этот треугольник - прямоугольный.



Доказательство 1-ой теоремы. (текстовое). Проведем биссектрисы углов треугольника ABC и точку пересечения обозначим буквой O. Произвольная точка, взятая на биссектрисе находится на одинаковом расстоянии от сторон угла. Поэтому $OT_1 = OT_2 = OT_3$. Нарисуем окружность с центром в точке O и радиусом $r = OT_1$. Так как стороны треугольника перпендикулярны радиусам OT_1, OT_2, OT_3, то в точках T_1, T_2, T_3 они касаются окружности. А значит, эта окружность является вписанной в треугольник.

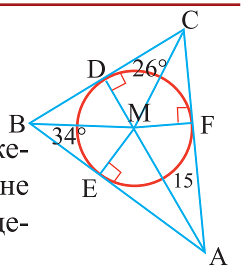


Доказательство 2-ой теоремы: Через середины сторон AB и AC треугольника ABC, проведем перпендикуляры и точку их пересечения обозначим буквой O. По свойству серединного перпендикуляра к отрезку $OA = OB = OC$. Так как ΔAOC равнобедренный, то точка O находится и на серединном перпендикуляре стороны AC. Окружность с центром в точке O и радиусом $R = AO$, пройдя через все вершины треугольника, будет описанной около нее.

Замечание: Около данного треугольника можно описать только одну окружность. В данную окружность можно вписать бесконечное количество треугольников.

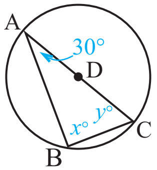
Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности

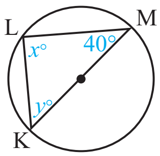
1 Точка M - центр вписанной окружности. $\angle MBA = 34^o$, $\angle MCB = 26^o$, $MA = 15$. Найдите:
a) $\angle MAC$; b) MF.

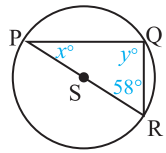


2 Впишите в окружность треугольник. По расположению центра окружности - внутри треугольника, вне треугольника или на стороне треугольника - определите вид треугольника.
a) Остроугольный треугольник b) Прямоугольный треугольник
c) Тупоугольный треугольник

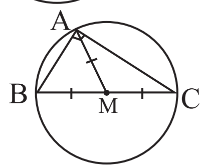
3 Найдите градусные меры углов обозначенных переменными для треугольника, вписанного в окружность.

a) 

b) 

c) 

4 Длина медианы AM треугольника ΔABC, вписанного в окружность равна 10 см. Найдите площадь треугольника ABC, если AB = 12 см, M - центр окружности.

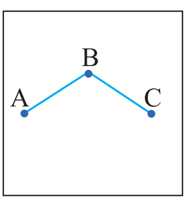


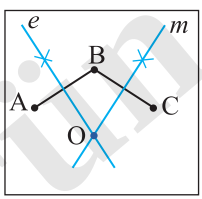
5 Построение окружности проходящей через три точки не лежащих на одной прямой.

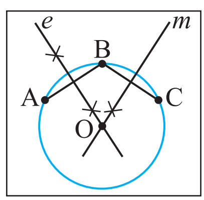
1. Отметьте точки A, B, C не лежащие на одной прямой и проведите отрезки AB и BC соединяющие их.

2. Постройте серединные перпендикуляры отрезков AB и BC. Точку пересечения серединных перпендикуляров обозначьте буквой O.

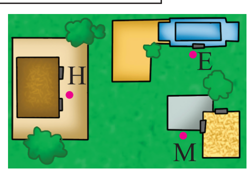
3. Так как центр окружности совпадает с точкой пересечения серединных перпендикуляров, то принимая точку O за центр проведем окружность проходящую через точки A, B, C .







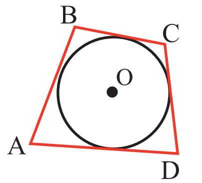
6 Фирма, занимающаяся программным обеспечением и технической поддержкой, оказывает в плановом порядке услугу фирмам H, M и E и планирует арендовать новое офисное здание. Перечертите план в тетради и разместите на плане новый офис фирмы так, чтобы он находился на одинаковом расстоянии от всех трех фирм.



Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности

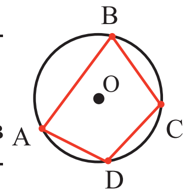
Свойство четырехугольников вписанных в окружность и описанных около нее

В отличии от треугольников не во всякий четырехуголь-ник можно вписать или описать окружность.



Теорема 4. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.
$AB + CD = BC + AD$

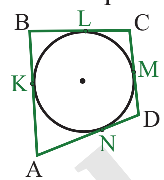
Обратная теорема. Если суммы противоположных сторон четырехугольника равны, то в этот четырех-угольник можно вписать окружность.



Теорема 5. Сумма двух противоположных углов четырех-угольника, вписанного в окружность, равна 180°.
$\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$

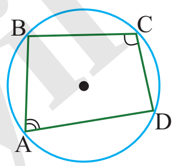
Обратная теорема. Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180°, то около этого четырех-угольника можно описать окружность.

Доказательство теоремы 4: Пусть точки K, L, M, N будут точками касания сторон четырехугольника. По свойству касательных прове-денных из данной точки к окружности



$AK = AN$, $BK = BL$, $CM = CL$, $DM = DN$
Если сложить почленно эти равенства, получим:
$AK + BK + CM + DM = AN + BL + CL + DN$
или же $AB + CD = BC + AD$.

7 Завершите доказательство теоремы 5:

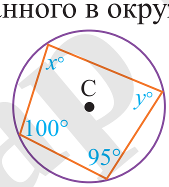


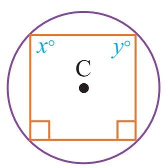
Предложение	Обоснование
1. $\angle A = \dfrac{\cup BCD}{2}$, $\angle C = \dfrac{\cup DAB}{2}$	1. ....
2. $\angle A + \angle C = \dfrac{\cup BCD + \cup DAB}{2}$	2. Почленное сложение
3. $\angle A + \angle C = \dfrac{360^\circ}{2} = 180^\circ$	3. ....

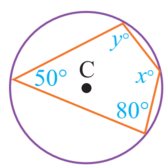
8 Сумма противоположных сторон четырехугольника описанного около окружности равна 12 см. Найдите периметр четырехугольника.

9 Длины трех сторон описанного четырехугольника 4 см, 6 см, 7 см. Найдите периметр этого четырехугольника. Исследуйте возможные варианты.

10 Найдите градусные меры неизвестных углов четырехугольника вписанного в окружность.

a) 

b) 

c) 

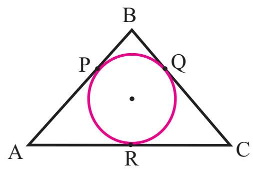
Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности

11 a) Докажите, что вписанная трапеция равнобедренная.

b) Нарисуйте параллелограмм, вписанный и описанный около окружности. В каком случае это возможно? Определите вид параллелограмма.

12 Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, точкой касания делит боковую сторону на отрезки равные 3 см и 4 см. Найдите периметр треугольника. Сколько решений имеет задача.

13 Вписанная окружность касается сторон треугольника ΔABC в точках P, Q и R.

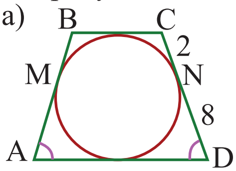


a) По рисунку назовите конгруэнтные отрезки.

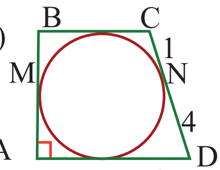
b) Если AB=10 см, BC=12 см, AC=5 см найдите, длины отрезков AP, PB, BQ, QC, AR, RC.

c) Пусть AB = a, BC = b, AC = c. Выразите отрезки AP, BP, CR через переменные a, b, c.

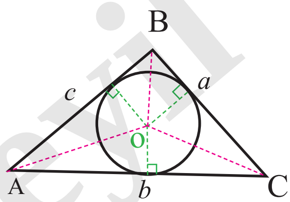
14 По данным рисункам найдите периметр и площадь описанной трапеции. a)



b)



15 a) Покажите справедливость формулы нахождения радиуса окружности вписанной в треугольник: $r = \dfrac{2S}{P}$ (S - площадь треугольника, P - его периметр)



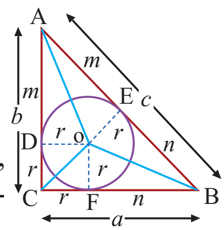
Указание: Выразите $S_{\Delta ABC}$ через $S_{\Delta AOC}$, $S_{\Delta AOB}$, $S_{\Delta BOC}$.

b) Покажите, что эта формула справедлива для радиуса окружности вписанного в четырехугольник.

c) Найдите радиус окружности вписанной в треугольник со сторонами 10; 10; 12.

d) Около окружности радиуса 5 см описан четырехугольник, сумма длин противоположных сторон которого 26 см. Найдите площадь четырехугольника.

16 a) Пользуясь рисунком покажите справедливость формулы $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ для радиуса окружности вписанной в прямоугольный треугольник.

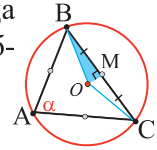


b) В прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, вписана окружность и около него описана окружность. Найдите их радиусы.

Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности

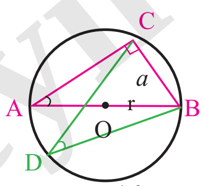
17 Отношение стороны треугольника вписанного в окружность, к синусу противолежащего угла равно диаметру этой окружности: $d = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

а) Исследуйте данное доказательство для случая когда центр окружности расположен внутри треугольника, обсудите и напишите в тетради.



Доказательство: Предложение	Основа
1. $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$	1. Дано
2. $\angle BOC = 2\alpha$	2. Свойства вписанного угла
3. ΔBOC равнобедренный.	3. BO = OC - радиусы окружности.
4. $\angle BOM \cong \angle MOC = \alpha$	4. Свойство биссектрисы угла равнобедреннего треугольника.
5. ΔBOM и ΔMOC конгруэнтные прямоугольные треугольники.	5. Свойство конгруэнтности ССС.
6. $\sin\alpha = \dfrac{BM}{OB}$	6. Определение синуса угла прямоугольного треугольника BOM
7. $\sin\alpha = \dfrac{BM}{OB} = \dfrac{2BM}{2OB}$	7. Свойство дроби
8. $\sin\alpha = \dfrac{2BM}{2OB} = \dfrac{BM + MC}{2r} = \dfrac{a}{d}$	8. Так как $\Delta BOM \cong \Delta MOC$ $BM \cong MC$, аксиома сложения отрезков, определение диаметра
9. $\sin\alpha = \dfrac{a}{d}$ $\quad d = \dfrac{a}{\sin\alpha}$	9. Упрощение по свойству равенства.

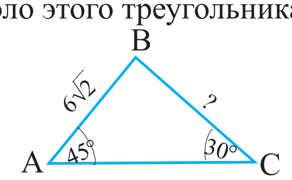
b) Сначала выполните предложенное доказательство для прямоугольного треугольника вписанного в окружность. Затем, воспользуясь данным рисунком, обобщите для всех треугольников.



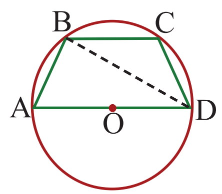
18 Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см. Угол, образованный боковыми сторонами 120°. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

19 Длина стороны треугольника, лежащая против угла 30° равна 8 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

20 Дано: ΔABC
$\angle A = 45°$, $\angle C = 30°$, $AB = 6\sqrt{2}$
Найдите: 1) Радиус описанной окружности:
2) Длину стороны BC.



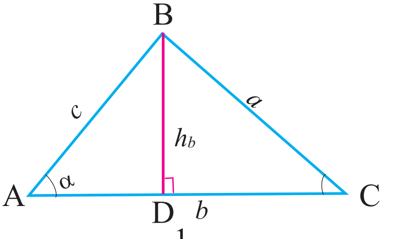
21 Найдите площадь трапеции ABCD, вписанной в окружность с центром в точке O, если BC = 6 см, $\angle CBD = 30°$.



22 Покажите справедливость формулы радиуса окружности, описанной около треугольника:

$$R = \frac{abc}{4S}$$

S - площадь треугольника,
a,b,c - его стороны.



Решение: По формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot sin\alpha$

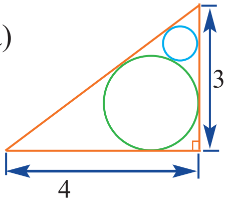
$$R = \frac{d}{2} = \frac{a}{2sin\alpha} = \frac{a \cdot b \cdot c}{2 \cdot b \cdot c \cdot sin\alpha} = \frac{abc}{4S}$$

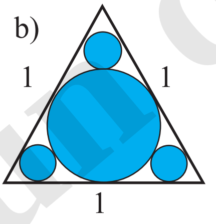
учитывая что $d = \frac{a}{sin\alpha}$ *Знаменатель и числитель дроби умножается на* $(b \cdot c)$ *Учитывается формула площади треугольника*

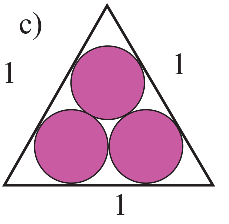
23 a) Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей около треугольника со сторонами 13 см, 14 см и 15 см.
b) Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей около равнобедренного треугольника, в котором высота опущенная к основанию равна 20 см, а отношение основания к боковой стороне равно 4 : 3.

24 a) Докажите, что центры описанных и вписанных окружностей равностороннего треугольника находятся в точке пересечения медиан.
Покажите справедливость формул. $R = \frac{2}{3}h$ $r = \frac{1}{3}h$
Здесь - R радиус описанной окружности,
r - радиус вписанной окружности, *h* - высота треугольника.
b) Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей около равностороннего треугольника с периметром равным 9 см.

25 По данным рисунка найдите радиус каждой окружности.

a) 

b) 

c) 

26 Покажите, что средняя линия трапеции, описанной около окружности равна боковой стороне.

27 Найдите диаметр окружности, вписанной в ромб, с диагоналями равными 6 см и 8 см.

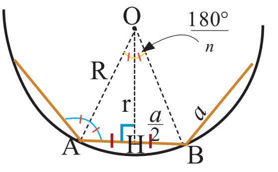
28 Найдите длину окружности, вписанной в трапецию с основаниями 6 см и 1 см и боковой стороной 4 см.

Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности

В любой правильный многоугольник можно вписать и описать окружность. Центры этих окружностей совпадут. Биссектрисы углов правильного многоугольника пересекаются в точке O и образуют равнобедренные треугольники конгруэнтные показанному на рисунке ΔAOB (по признаку УСУ). Нарисуем окружность радиусом OA с центром в точке O. Эта окружность, пройдя через все вершины, будет описанной окружностью. А окружность с радиусом OH, касаясь всех сторон многоугольника, будет вписанной окружностью.

R- радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, r-радиус вписанной окружности, a-сторона правильного, n-угольника,

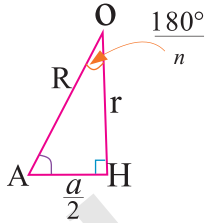
$\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{n}$ - центральный угол



$OA = R,\ OH = r,\ AH = \dfrac{a}{2},\quad \angle AOH = \dfrac{180^\circ}{n}$

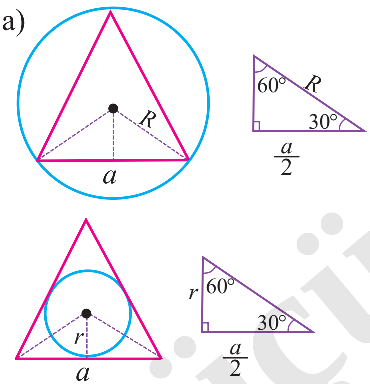
$\Delta AOH \quad \dfrac{AH}{OA} = \dfrac{\frac{a}{2}}{R} = \sin\dfrac{180^\circ}{n} \qquad R = \dfrac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$

$\Delta\ AOH \quad \dfrac{AH}{OH} = \dfrac{\frac{a}{2}}{r} = \operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n} \qquad r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$

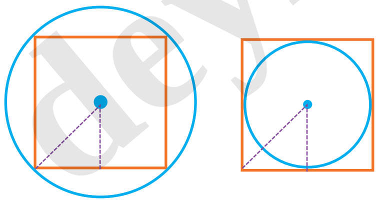


29 Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей со стороной a правильного: a) треугольника; b) четырехугольника; c) шестиугольника (для решения пункта a) изображен соответствующий рисунок)

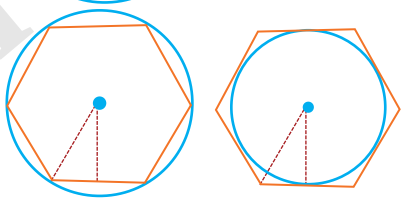
a)



b)



c)



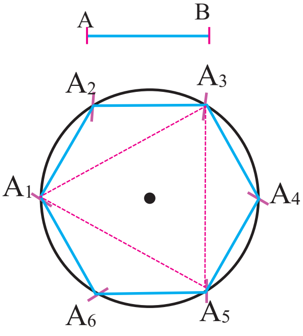
30 a) На рисунке покажите, что большая диагональ правильного шестиугольника, является диаметром описанной окружности. Результат обобщите для правильного $2n$ - угольника.

b) Найдите периметр правильного шестиугольника вписанного в окружность радиуса R. Выразите длины большей и меньшей диагоналей этого шестиугольника через R.

Многоугольники вписанные в окружность и описанные около окружности

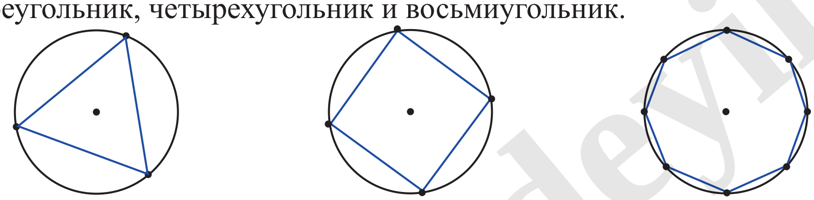
Задача на построение: Постройте правильный шестиугольник.

1. Нарисуйте отрезок AB, равный стороне правильного шестиугольника.
2. Циркулем нарисуйте окружность радиус которой равен длине этого отрезка.
3. Не меняя раствора циркуля разбейте всю окружность на части одинаковой длины и отметьте их точками.
4. Соедините последовательно отмеченные точки. Получится правильный шестиугольник вписанный в окружность.



Если соединить попарно некоторые вершины правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, например вершины A_1, A_3, A_5, то получится правильный треугольник. Чтобы построить правильный четырехугольник, нужно провести два взаимно перпендикулярных диаметра и последовательно соединить их концы. Если в окружность вписан правильный n - угольник, то отметив точки пересечения серединных перпендикуляров с окружностью, получим точки являющиеся вершинами правильного $2n$ -угольника.

31 Воспользовавшись рисунками постройте в тетради правильный треугольник, четырехугольник и восьмиугольник.

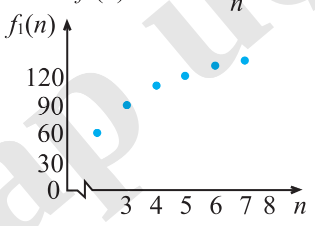


Исследование 3. Найдите градусную меру внешнего и внутреннего угла правильного многоугольника при $n = 10$; $n = 30$; $n = 50$. На рисунке изображены графики функций:

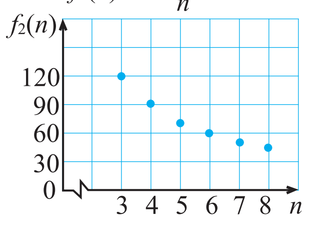
$$f_1(n) = \frac{180°n - 360°}{n} \quad \text{и} \quad f_2(n) = \frac{360°}{n}.$$

Представьте изменения внутренних и внешних углов правильного многоугольника с увеличением значения n.

$f_1(n) = \dfrac{180°n - 360°}{n}$



$f_2(n) = \dfrac{360°}{n}$



Площадь правильного многоугольника

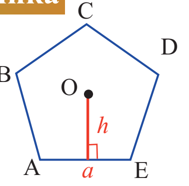
Центр правильного многоугольника. Центр окружности описанного около правильного многоугольника или вписанного в него является центром правильного многоугольника. Центр правильного многоугольника находится на одинаковом расстоянии от всех вершин и всех сторон многоугольника.

Апофема правильного многоугольника. Перпендикуляр, проведенный из центра многоугольника к его стороне называется апофемой**.**

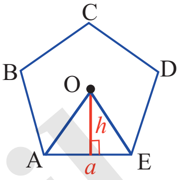
Апофема правильного многоугольника равна радиусу вписанной окружности.

Выполните следующее упражнение по шагам и выведите формулу зависимости площади правильного многоугольника от апофемы.

Упражнение. Апофема и площадь многоугольника

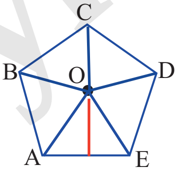


1. Нарисуйте правильный пятиугольник ABCDE.
2. Из центра O проведите перпендикуляр делящий сторону AE пополам.
3. Соедините точки A и E с центром O.
4. Выразите площадь треугольника AOE переменными a и h. Обратите внимание какому измерению многоугольника соответствует высота треугольника.



5. Соедините точки B, C, D с точкой O. Сравните площади полученных треугольников.
6. Обратите внимание на то, что площадь пятиугольника равна сумме площадей этих треугольников.

Площадь пятиугольника:



$$S = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}ah =$$

$$= \frac{1}{2}(ah + ah + ah + ah + ah) = \frac{1}{2}\cdot 5ah$$

7. Какому измерению соответствует выражение $5a$? Выразите площадь многоугольника через его периметр.

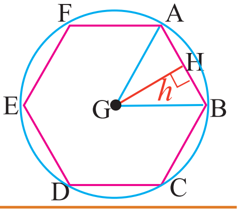
Площадь правильного многоугольника

Соединив центр правильного n-угольника с вершинами, получится n-е количество равнобедренных конгруэнтных треугольников.

Площадь правильного многоугольника = количеству треугольников × площадь одного треугольника

$$S = n\cdot \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} = (a\cdot n)h$$

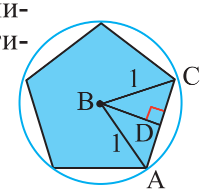
$$S = \frac{1}{2}Ph \quad \text{или} \quad S = \frac{1}{2}anh$$



a - длина стороны мноугольника, n - число сторон, h - апофема.

Площадь правильного многоугольника

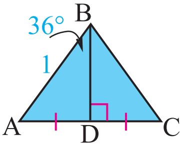
Пример 1. В окружность радиусом равным единице, вписан правильный пятиугольник. Найдите площадь пятиугольника. Решение:



Площадь многоугольника: $S = \dfrac{1}{2}\ Ph$

Нужно найти апофему h и периметр P.

Центральный угол $\angle ABC$ равен $\dfrac{360^o}{5} = 72°$. ΔABC - равнобедренный треугольник, а значит его высота BD является и медианой, и биссектрисой.



Тогда $\angle ABD = 36°$. Чтобы найти стороны треугольника ΔABD воспользуемся тригонометрическими соотношениями .

$\cos 36° = \dfrac{BD}{AB}$ $\qquad\qquad$ $\sin 36° = \dfrac{AD}{AB}$

$BD = AB \cos 36° \approx 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}8$ $\qquad$ $AD = AB \sin 36° \approx 1 \cdot 0{,}6 = 0{,}6$

BD - апофема пятиугольника, $h = BD \approx 0{,}8$;

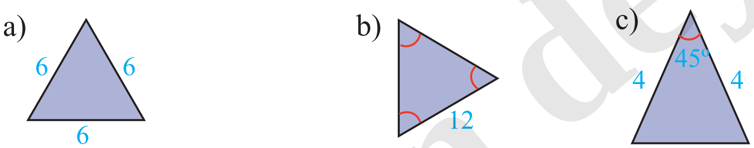
Сторона пятиугольника: $AC = 2 \cdot AD = 2 \cdot 0{,}6 = 1{,}2$

$$S = \frac{1}{2} h \cdot P \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 \cdot 5 \cdot 1{,}2 = 2{,}4 \text{ (квадратных единиц)}$$

Обучающие задания

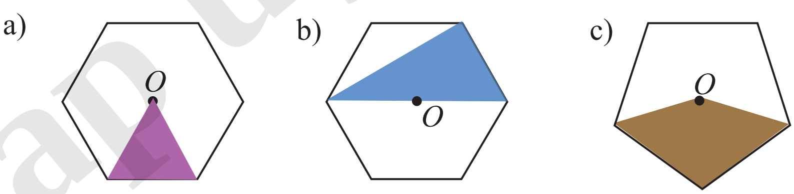
1 Покажите, что площадь равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

2 Найдите площади треугольников.

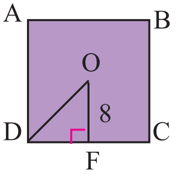


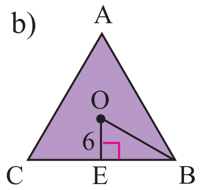
3 Докажите, что если стороны правильного шестиугольника и правильного треугольника равны, то площадь шестиугольника в шесть раз больше площади треугольника.

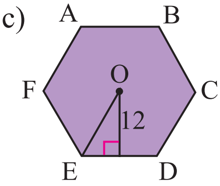
4 Найдите площадь правильного многоугольника, если известно, что площадь закрашенной части 8 см^2 . O - центр многоугольника.



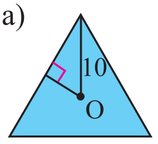
5 По рисунку найдите площадь правильного многоугольника. Точка О центр многоугольника.

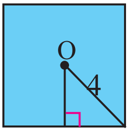
a) 

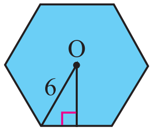
b) 

c) 

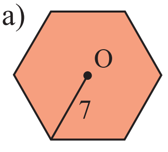
6 По рисунку найдите периметр и площадь правильного многоугольника. Точка О - центр многоугольника.

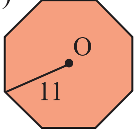
a) 

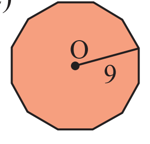
b) 

c) 

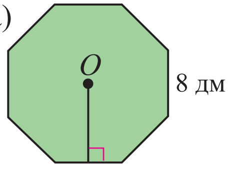
7 По рисунку найдите периметр и площадь правильного многоугольника.

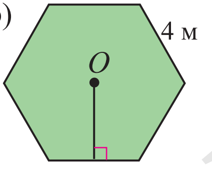
a) 

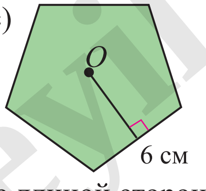
b) 

c) 

8 По длине стороны вычислите площадь правильных многоугольников. Точка O - центр правильного многоугольника.

a) 

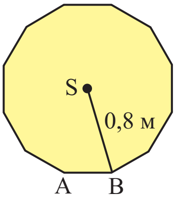
b) 

c) 

9 Найдите площадь правильного девятиугольника с длиной стороны равной 12 см.

10 В окружность диаметром равным 12 см вписан правильный шестиугольник. Найдите апофему этого шестиугольника.

11 В музее по краям экспоната было установлено ограждение в виде правильного двенадцатиугольника. Расстояние от центра до каждого столба равна 0,8 м. Сколько квадратных метров площади отведено для экспоната?

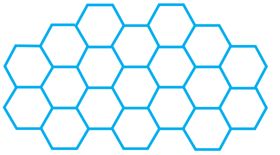


12 a) Докажите, что апофема правильного шестиугольника с длиной a равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

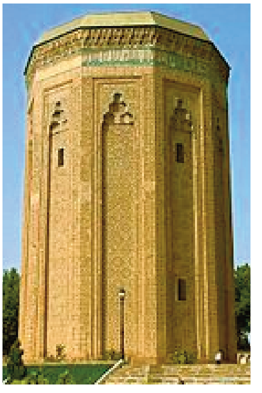
b) Найдите апофему правильного шестиугольника площадь которого равна $54\sqrt{3}$ м^2.

Площадь правильного многоугольника

13 Пол кухни должен быть покрыт плитками в форме правильного шестиугольника со стороной 6 см.

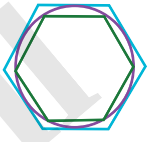


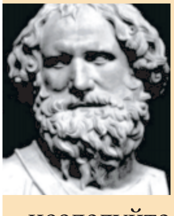
a) Какое наименьшее количество плиток разного цвета нужно выбрать, чтобы две соседние не были - одинакового цвета?
b) Найдите площадь одной плитки.
c) Какое наименьшее количество плиток нужно для застилки пола размером 2,5 м × 4 м?



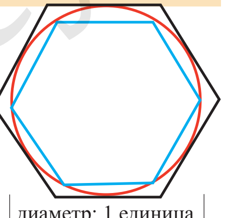
14 **Мавзолей Моминэ Хатун - наилучшее из произведений одного из известных архитекторов Азербайджана - Аджами Нахичевани, располагается в центре исторического Нахичевана и входит в состав архитектурного комплекса Атабеков. Мавзолей Моминэ Хатун - это единственный памятник комплекса, дошедший до наших времен.**
Мавзолей имеет форму правильного десятиугольника. Какие измерения вы провели бы, чтобы вычислить площадь, занимаемую мавзолеем?
Нарисуйте и покажите соответствующий план. Из источников соберите информацию о действительных размерах мавзолея.

15 На рисунке изображены правильные шестиугольники: вписанный в окружность и описанный около окружности. Найдите площадь описанного шестиугольника, если площадь вписанного шестиугольника равна 3 квадратным единицам.





Историческое сведение. В 3-ем веке до н.э. Архимед - древнегреческий ученый, для того, чтобы определить численное значение π, воспользовался периметрами правильных многоугольников описанных и вписанных в окружность. Пользуясь данным способом исследуйте значение π.



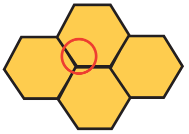
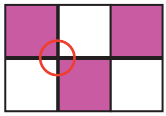
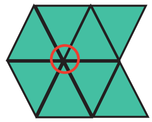
1. Принимая за единицу диаметр окружности, найдите периметр вписанного шестиугольника.
2. Покажите, что длина окружности с единичным диаметром равна π.
3. Нарисуйте радиус окружности. Найдите периметр описанного шестиугольника.
4. ***Напишите неравенство: периметр вписанного шестиугольника $< \pi <$ периметра описанного шестиугольника***.

Увеличив число сторон многоугольника в 2 раза и продолжая вычисления для 12-ти, а затем для 96-ти угольного многоугольника Архимед, определил, что значения π больше $3\frac{1}{7}$, но меньше $3\frac{11}{70}$.

Площадь правильного многоугольника

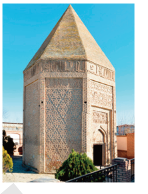
Паркетирование

Паркетированием называется покрытие площади фигурами до заполнения всей пустоты.

Если сумма углов при общей вершине многоугольника равна 360°, то паркетированием можно покрыть всю пустую часть площади. Паркетирование возможно при помощи правильных треугольников, ромбов (квадратов) и правильных шестиугольников. Однако, при помощи правильных пятиугольников это сделать невозможно, потому что, градусная мера одного угла равна 108°, а сумма углов при общей вершине трех пятиугольников $3 \cdot 108° = 324°$, а четырех пятиугольников $4 \cdot 108° = 432°$. Возможно ли паркетирование с помощью правильного семиугольника?

16 a) На древних памятниках можно увидеть, как при помощи различных расположений правильных фигур образуются новые узоры. Исследуйте эти украшения.



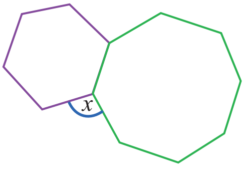
Мавзолей Юсиф Ибн Кусейира. Нахичеванский архитектор. Аджами Абубекр оглы Нахичевани.

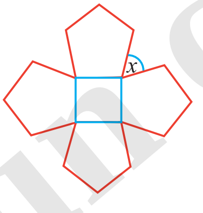
b) Найдите угол x на рисунке. С помощью компьютерных программ, повторяя данные рисунки, создайте новые узоры.

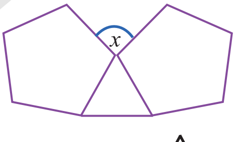
1) Изображение состоит из правильных шестиугольника и восьмиугольника.

2) Изображение состоит из правильных пятиугольников и квадрата.

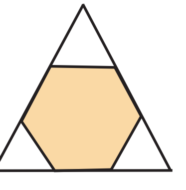
3) Изображение состоит из правильных шестиугольников и треугольника.







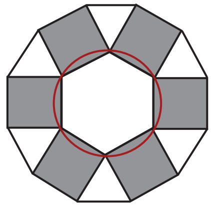
17 Площадь правильного шестиугольника вписанного в равносторонний треугольник 12 квадратных единиц. Найдите площадь равностороннего треугольника.



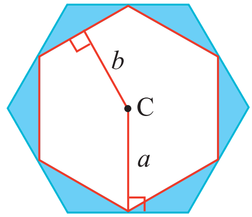
18 Пол беседки имеет форму правильного восьмиугольника.
1) Если расстояние от центра восьмиугольника до его вершины равно 1 м, то какое количество досок площадью 0,2 м² каждая, потребуется для покрытия пола беседки?

Обощающие задания

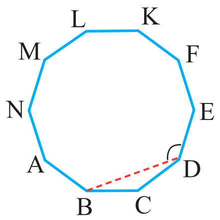
1 Правильный двенадцатиугольник был сконструирован из квадратов и правильных треугольников. Если диаметр нарисованной окружности равен 6 см, то найдите периметр двенадцатиугольника.



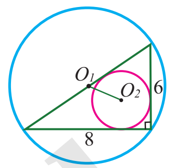
2 У двух правильных шестиугольников показанных на рисунке, вершины малого лежат на середине сторон большого. a и b - апофемы шестиугольников . Если $b = 6\sqrt{3}$ см, то найдите площадь закрашенной части .



3 На рисунке изображен правильный десятиугольник. Найдите $\angle BDE$.



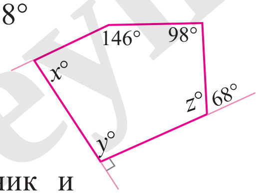
4 На рисунке $AC = 8$, $BC = 6$, $\angle C = 90^o$. Найдите расстояние O_1O_2 между центрами окружностей, вписанных и описанных около ΔABC.



5 Существует ли правильный многоугольник, один угол которого равен:

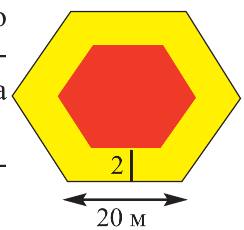
a) 155° b) 160° c) 175° d) 168°

6 По данным рисунка найдите неизвестные внутренние углы многоугольника.



7 a) В окружность вписан правильный треугольник и около окружности описан правильный треугольник. Запишите отношение площадей этих треугольников. Решите задачу разными способами. b) В маленький треугольник впишите окружность. Напишите отношение радиусов вписанных и описанных около этого треугольника окружностей и отношение площадей соответствующих кругов.

8 По всей длине сторон городского парка, имеющего форму правильного шестиугольника на полосе шириной 2 м, посажены желтые тюльпаны. Длина одной стороны большего шестиугольника равна 20 м. Найдите площадь части, на которой посажены желтые тюльпаны.



Раздел

4

1. Неравенства
2. Векторы

Системы неравенств и совокупность неравенств
Решение неравенств, содержащих переменную под знаком модуля
Линейные неравенства с двумя переменными
Системы линейных неравенств с двумя переменными
Квадратные неравенства
Решение неравенств методом интервалов

Векторы
Векторы на координатной плоскости
Направление вектора
Сложение и вычитание векторов
• Сложение и вычитание коллинеарных векторов
• Сложение векторов
• Правило параллелограмма
• Переместительное и сочетательное свойство
• Сложение векторов используя их компоненты
Компоненты вектора и тригонометрические отношения
Решение задач с применением векторов
Умножение вектора на число

Системы неравенств и совокупность неравенств

Исследование. Если альпинисты увеличат скорость на 1км/ч, то путь 4 км до вершины они преодолеют быстрее чем за 2 часа. Если же они уменьшат скорость на 1 км/ч, то не смогут добраться до вершины за 2 часа. С какой скоростью движутся альпинисты?

Решение: Примем за x - скорость альпинистов.

Если скорость увеличится на 1 км/ч, то длина пройденного пути будет больше 4-х км и соответствующее неравенство примет вид: $2(x+1)>4$

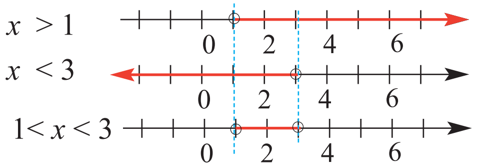
Если скорость уменьшится на 1 км/ч, то длина пройденного пути будет меньше 4-х км и соответствующее неравенство примет вид: $2(x-1)<4$

По условию задачи нужно найти такое значение x, которое удовлетворяло бы каждому из неравенств: $2(x+1)>4$ и $2(x-1)<4$.

Неравенства, объединенные союзом “и” записывают с помощью фигурной скобки и говорят, что они образуют систему неравенств.

В данной задаче нужно решить систему неравенств $\begin{cases} 2(x+1)>4 \\ 2(x-1)<4 \end{cases}$.

Если каждое неравенство системы заменить на равносильное неравенство, то получим $\begin{cases} x>1 \\ x<3 \end{cases}$. Изобразим на числовой прямой множество решений неравенств входящих в систему и найдем их пересечения (общую часть).



Для того, чтобы решить систему неравенств нужно, найти множество решений каждого неравенства и найти пересечение этих множеств, то есть, общую часть.

Ответ: Решение системы промежуток (1; 3).

Обучающие задания

1 Какие из чисел –3; 0; 5 являются решениями системы неравенств?

a) $\begin{cases} 3-x\le 7 \\ 1-3x>-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+1>2 \\ 9-2x>-21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+7>4 \\ 3-2x\le 5 \end{cases}$

2 Решите систему неравенств. Изобразите на координатной прямой множество решений данной системы.

a) $\begin{cases} 4-x\le 8 \\ 1-3x>-5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2>3 \\ 3-2x>-17 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-15>0 \\ 4x<12 \end{cases}$

3 Решиту систему неравенств, изобразите множество решений на координатной прямой.

a) $\begin{cases} 7x-11\ge 3 \\ 2x<8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5(x-3)-x<1 \\ 3(x-2)-2<10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x+2\ge 5x+3 \\ 3-3x<8-2x \end{cases}$

4 При каких значениях аргумента функции $y=x-4$ и $y=8-x$ принимают положительные значения?

5 При каких значениях аргумента, значения функций $y=0{,}5x+2$ и $y=3-3x$ будут одновременно: a) положительные; b) отрицательные; c) больше –3-x ; d) меньше 3-x?

Системы неравенств и совокупность неравенств

6 Решите систему неравенств.

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-2}{3} < 2 \\ \dfrac{x+1}{3} > 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{x+1}{2} \geq \dfrac{x}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{6} \leq \dfrac{3x-1}{4} \\ 5(x+2) > 3(x+3) \end{cases}$

7 При каких значениях x выражение имеет смысл?

a) $\sqrt{x-5} + \sqrt{7-x}$ b) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{3-x}$ c) $\sqrt{x+8} + \sqrt{2x+4}$

8 Если к удвоенному произведению целого числа прибавить половину числа, то сумма будет меньше 92. Если же от удвоенного произведения целого числа вычесть половину, то разность будет больше 53. Найдите это число.

9 10,8 кг 60 %-го раствора соли перемешивают с 20%-ым раствором соли. Какое количество второго раствора нужно перемешать, чтобы концентрация соли была бы не больше 40% и не меньше 30 %.

10 Длина одной стороны треугольника равна 5 м, а другой 8 м. Скольким метрам может быть равна длина третьей стороны, если периметр треугольника меньше 22 м?

Совокупность неравенств.

Задача. Наргиз и Эльшан играют в игру построенную на числах. Каждый берет карточку с числом и прибавляет к нему 5. Если ответ будет меньше 10-ти или же больше 15-ти, то владелец карточки зарабатывает очко. Выразите с помощью неравенства ситуацию, когда Эльшан взяв одну карточку заработал очко.

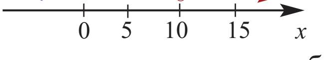
Решение: Пусть число на карте будет x. Требуемую ситуацию можно выразить неравенствами $x + 5 < 10$ или $x + 5 > 15$. Союз “или” и соответствующие неравенства записываются с помощью скобки “[“ и образуют совокупность неравенств. Чтобы решить совокупность неравенств, нужно найти множество решений каждого неравенства, а потом найти объединение этих множеств. Решим: $\left[\begin{array}{l} x+5<10 \\ x+5>15 \end{array}\right.$

1) $x+5<10$
$x < 10 - 5$
$x < 5$

Решение 1-го неравенства совокупности промежуток $(-\infty; 5)$.

2) $x+5>15$
$x > 15 - 5$
$x > 10$

Решение 2-го неравенства совокупности промежуток $(10; +\infty)$.



Решением данной совокупности неравенств будет множество:
$(-\infty; 5) \cup (10; +\infty)$.

Обучающие задания

11 Решите совокупность неравенств.

a) $\left[\begin{array}{l} x-1>4 \\ x+1<-2 \end{array}\right.$ b) $\left[\begin{array}{l} 2x-12>3 \\ 2x+1<-1 \end{array}\right.$ c) $\left[\begin{array}{l} 3(x-1)-x\geq 5 \\ 2(3-x)-3<x \end{array}\right.$

12 Решите неравенства, исследуя различные варианты знаков множителей.

a) $(x+1)(x-2)>0$ b) $(x-1)(x-3)>0$

c) $(x-2)(x-5)<0$ d) $(x+3)(x-6)\leq 0$

Пример. a) Решите неравенство: $(x+1)(x-2)>0$. **Решение:** Для того, чтобы произведение двух множителей было положительным, нужно чтобы множители были одинакового знака. То есть, множители $(x+1)$ и $(x-2)$ должны быть или оба положительными, или отрицательными.

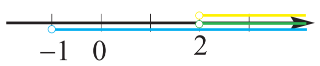
Данное неравенство сводится к решению совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ x-2<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решение 1-ой системы совокупности:

$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases}$

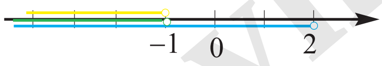
Геометрическое изображение:



$(2;+\infty)$

Решение 2-ой системы совокупности:

$\begin{cases} x+1<0 \\ x-2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-1 \\ x<2 \end{cases}$



$(-\infty;-1)$

Решением данной совокупности будет $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

13 Решите неравенство, исследуя различные варианты знаков числителя и знаменателя дроби.

a) $\dfrac{x-1}{x-3}<0$ b) $\dfrac{x-2}{x+1}>0$

14 Квадрат какого числа не больше пятикратного значения этого числа? Найдите сумму целых чисел, удовлетворяющих этому условию.

15 При каких значениях a система неравенств имеет хотя бы одно решение?

a) $\begin{cases} x<9 \\ x>a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\leq 10 \\ x>a \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\leq 5 \\ x\geq a \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\geq 7 \\ x\leq a \end{cases}$

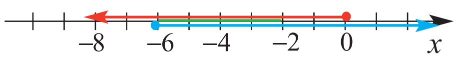
Неравенства содержащие переменную под знаком модулья

Система неравенств, совокупность неравенств

Неравенства с модулем	Двойные эквивалентные неравенства	Эквивалентные системы и совокупности неравенств
$\lvert ax+b\rvert < c$	$-c < ax+b < c$	$\begin{cases} ax+b < c \\ ax+b > -c \end{cases}$
$\lvert ax+b\rvert \le c$	$-c \le ax+b \le c$	$\begin{cases} ax+b \le c \\ ax+b \ge -c \end{cases}$
$\lvert ax+b\rvert > c$	$ax+b > c$ *или* $ax+b < -c$	$\left[\begin{array}{l} ax+b > c \\ ax+b < -c \end{array}\right.$
$\lvert ax+b\rvert \ge c$	$ax+b \ge c$ *или* $ax+b \le -c$	$\left[\begin{array}{l} ax+b \ge c \\ ax+b \le -c \end{array}\right.$

Пример 2. $|2x+3| \le 3-x$

Решение: $\begin{cases} 2x+3 \le 3-x \\ 2x+3 \ge x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x \ge -6 \end{cases}$



Ответ: $[-6;\ 0]$

Пример 3. $|2x-5| \ge x+2$

Решение: $\left[\begin{array}{l} 2x-5 \ge x+2 \\ 2x-5 \le -x-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 7 \\ x \le 1 \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;1] \cup [7;\ +\infty)$

Обучающие задания

1 Решите неравенства с модулем. Изобразите решение на числовой оси.

a) $|5x+3| - 4 \ge 9$ d) $|4-x| < 5$ g) $|2x+3| > 4+x$
b) $|10-4x| \le 2$ e) $|3x-9| + 2 > 7$ h) $6-2x > |x+12|$
c) $|3+x| + 7 < 10$ f) $|3x+2| - 1 \ge 10$ i) $|2x+5| - 1 < 6x-2$

2 Покажите такое значение *a,* чтобы неравенство $|x-3| \le a-2$ имело решение и найдите это решение. Решите неравенство $|x-3| > a-2$ при найденном значении a.

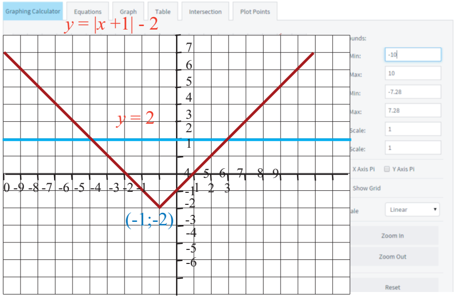
3 Автобусная остановка находится на расстоянии 45 м от дома Октая. Планируется переместить остановку от нынешнего месторасположения на расстояние не более 30 м. Запишите расстояние от новой остановки до дома Октая в виде неравенств.

4 Идеальная масса игрушечных мячей должна быть 150 г. Считается нормальным, если масса мяча будет на 20 г тяжелее или легче. Изменяющийся интервал массы мяча запишите с помощью неравенства с модулем.

5 На рисунке даны графики функций $y = |x+1| - 2$ и $y = 2$ построенные на графкалькуляторе. Нарисуйте графики в тетради и воспользуясь этими графиками покажите решения:

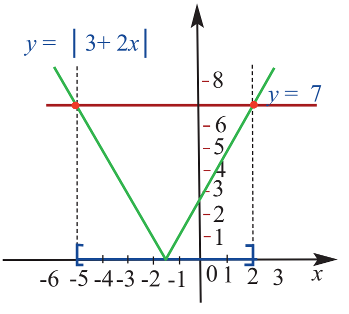
a) уравнения $|x+1| - 2 = 2$
b) неравенства $|x+1| - 2 < 2$
c) неравенства $|x+1| - 2 > 2$.

http://www.meta-calculator.com/online/



6 Решите неравенства с модулем. Решение представьте в виде графика. На рисунке изображен график решения неравенства пункта а).

a) $|3 + 2x| < 7$
b) $|4 - 2x| > 4$
c) $|3x - 6| \leq 6$
d) $|x - 1| < 1 - 2x$
e) $|x + 2| > 2x + 1$
f) $|x - 3| < x + 1$



7 Различные цвета фейерверков образуются при сгорании химических веществ.

a) При сгорании вещества в состав которого входит стронсиум, образуется световая волна длина которой удовлетворяет неравенству $|w - 643| < 38$? Какой цвет получается в этом случае?

b) Вещество, в котором содержится медь, при сгорании образует световую волну длина которой удовлетворяет неравенству $|w - 455| < 23$. Какой цвет получается в этом случае?

Цвет	Длина волны
Ультрафиолетовый	$w < 400$
Сиреневый	$400 \leq w \leq 424$
Голубой	$424 \leq w \leq 491$
Зеленый	$491 \leq w \leq 575$
Желтый	$575 \leq w \leq 585$
Оранжевый	$585 \leq w \leq 647$
Красный	$647 \leq w \leq 700$
Инфракрасный	$w \geq 700$

c) Вещество, в состав которого входит бариум-хлорид при сгорании образует световую волну длиной удовлетворяющей неравенству: $|w - 519{,}5| < 12{,}5$. Какой цвет получается в этом случае?

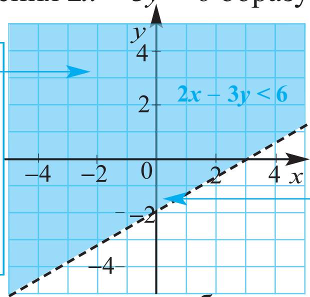
d) Вещество, в состав которого входит натриум при сгорании образует световую волну длиной, удовлетворяющей неравенству $|w - 600| < 5$. Какой цвет получается в этом случае?

Линейные неравенства с двумя переменными

Линейные неравенства с двумя переменными

Неравенства вида $ax + by < c$, $ax + by \leq c$, $ax + by > c$, $ax + by \geq c$ называются **линейными неравенствами с двумя переменными.** Решением неравенства называется пара $(x;\ y)$, обращающая данное неравенство в верное числовое неравенство. С помощью графика линейного уравнения $ax + by = c$ в прямоугольной системе координат можно показать все решения линейного неравенства с двумя переменными. Например, покажем множество решений неравенства $2x - 3y < 6$ с помощью графика линейного уравнения с двумя переменными. График уравнения $2x - 3y = 6$ образует линию границы.

График уравнения $2x - 3y = 6$ делит плоскость на две полуплоскости. Все точки закрашенной части полуплоскости показывают множество решений неравенства $2x - 3y < 6$.



Все решения неравенства $2x - 3y < 6$ расположены по одну сторону от граничной линии $2x - 3y = 6$.

- Чтобы убедиться в правильности выбора полуплоскости соответствующей решению неравенства, выбираются пробные точки в каждой из полуплоскостей. Закрашивается та полуплоскость, в которой расположена точка, удовлетворяющая данному неравенству.
- Если неравенство выражается знаками $>$, $<$, то множество точек, образующих линию границы не принадлежат множеству решений и график уравнения $ax + by = c$ изображается пунктирной линией.
- Если неравенство выражается знаками $\geq$, $\leq$, то множество точек образующих линию границы принадлежат графику и изображаются сплошной линией

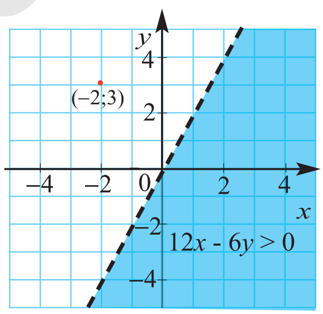
Пример 1. a) $12x - 6y > 0$

1. Решим неравенство относительно переменной y: $12x - 6y > 0$; $-6y > -12x$, $y < 2x$
2. Нарисуем график уравнения $y = 2x$ пунктирной линией.
3. Проверим неравенство в точке $(-2;\ 3)$.

Левая часть неравенства:

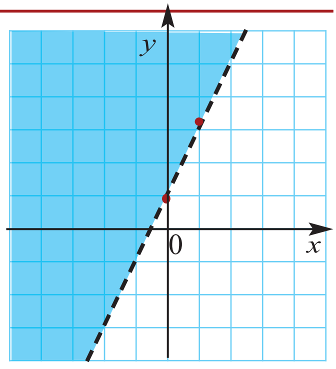
$12x - 6y = 12 \cdot (-2) - 6 \cdot (3) = -42$.

Правая часть: 0. Неравенство $-42 > 0$ неверное.



Значит, должна быть закрашена не та полуплоскость в которой находится точка $(-2;\ 3)$, а другая.

b) Изобразите решение неравенства $12x - 6y < 0$ по графику линейной функции $y = 2x$.



Пример 2. Напишите неравенство, соответствующее графику.

1. Определим уравнение $y = kx + b$ граничной линии. График пересекает ось y в точке (0, 1). Значит, $b = 1$. По точке (1; 3) графика можно определить,

что $k = 2$. То есть из уравнения $y = kx + 1$ по координатам точки (1;3) получим
$3 = k \cdot 1 + 1$ и $k = 2$.

Уравнение линии границы: $y = 2x + 1$. Так как линия границы нарисована пунктирами, то точки принадлежащие уравнению $y = 2x + 1$ не входят во множество решений неравенства. Выберем пробную точку (–2; 3) из закрашенной части и проверим. Левая часть: $y = 3$, правая часть $2x + 1 : 2(-2) + 1 = -3$.

Левая часть > правой части, значит, $y > 2x + 1$. То есть, закрашенная часть на рисунке является множеством решений неравенства $y > 2x + 1$.

Обучающие задания

1 Проверьте, координаты каких точек являются решением неравенства?

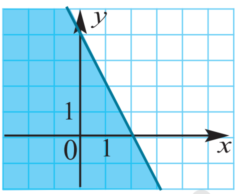
a) $x \le -5$; (0; 2), (–5; 1) b) $2y \ge 9$; (1; –6), (0; 6)
c) $y < -2x + 7$; (–2; 2), (3; –8) d) $19x + y \ge -0{,}5$; (2; 3), (–1; 0)

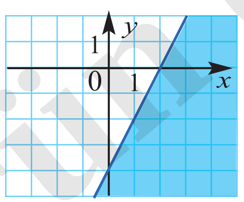
2 Изобразите решения неравенств графически.

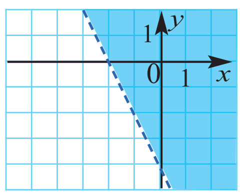
a) $y < -3$ b) $x > -2$ c) $x + y \ge -1$ d) $x - y \le -2$
e) $x + y < 4$ f) $x - y \le 5$ g) $x + y > 3$ h) $3x - y < 3$

3 Установите соответствие между неравенствами и графиками?

1) $2x - y \ge 4$ 2) $-2x - y < 4$ 3) $2x + y \le 4$

a) 

b) 

c) 

4 Изобразите график, соответствующий решению неравенства $x + 2y > 8$. Напишите требуемые показатели:

- точку пересечения с осью абсцисс
- точку пересечения с осью ординат
- уравнение граничной линии
- проверочную точку (0; 0)

5 20-ти копеечные и 50-ти копеечные монеты в копилке составляют не меньше 30 манат. Напишите неравенство, показывающее количество монет в копилке. Изобразите решение графически.

Линейные неравенства с двумя переменными

Прикладные задания.

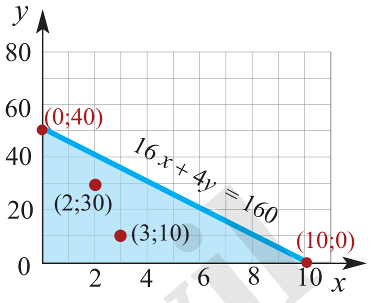
Пример 1. Билет в театр для взрослых стоит 16 манат, а детский - 4 манат. Деньги вырученные от продажи билетов в кассе составляют не более 160 манат. Определите различные варианты количества проданных билетов.

Числовые информации и переменные, соответствующие условию задачи:

Стоимость билета для взрослых	·	количество билетов	+	стоимость детского билета	·	количество билетов	$\leq$	вырученные деньги
16		x		4		y		160

Математическая запись: $16x + 4y \leq 160$

1. Чтобы решить неравенство выразим y из уравнения $16x + 4y = 160$, получим $y = -4x + 40$ и построим график полученной линейной функции. Количество билетов не может быть отрицательным числом. Поэтому достаточно построить график только в I четверти. Определим точки пересечения графика с осями координат: (10; 0) и (40; 0). Соединим эти точки отрезком прямой. 2. Закрасим фигуру заданную графиком и осями координат. 3. Любые целые значения x и y взятые из закрашенной части являются решением этого неравенства. Точка (0; 40) соответствует случаю, когда все билеты были куплены для детей, а точка (0; 10) случаю, когда все билеты были куплены для взрослых. А также любая точка, взятая из закрашенной части удовлетворяет неравенству $16x + 4y \leq 160$.



6 В мешочке имеются золотые и серебряные монеты. Масса каждой золотой монеты 5 г, а масса каждой серебряной монеты 8 г. Масса мешочка не больше 80 г. a) Напишите и постройте график неравенства, показывающего количество золотых и серебряных монет. b) Если в мешочке все монеты золотые, то найдите их количество. Напишите еще три возможных варианта.

7 Айшан в конкурсе выиграла купон на 30 манат. В кинотеатре дневной сеанс стоит 5 манат, вечерний сеанс 7,5 манат. a) Напишите неравенство, выражающее количество возможных посещений Айшан дневных и вечерних сеансов. Постройте график. b) По графику напишите количество трех возможных вариантов сеансов.

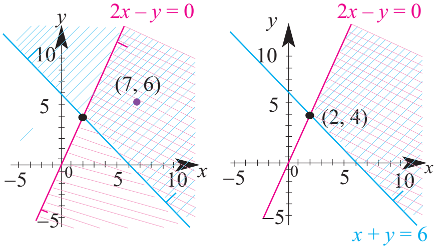
8 **Вопрос открытого типа.** Придумайте задачу, требующую построение неравенства. Например, цена 1 кг айвы 2 манат, 1 кг гранат 3 манат, а потраченных денег не больше 12 манат. Покажите возможное количество покупки каждого фрукта на графике.

Системы линейных неравенств с двумя переменными

Системы линейных неравенств с двумя переменными

Решением системы линейных неравенств с двумя переменными называется множество пар чисел $(x; y)$, которые удовлетворяют каждому неравенству системы. На примере покажем графическое решение системы линейных неравенств.

Пример 1. $\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases}$



1. С помощью граничной прямой $x + y = 6$ построим график, соответствующий неравенству $x + y \geq 6$, а соответствующую площадь представим голубыми линиями.

2. С помощью уравнения $2x - y = 0$ построим график, соответствующий неравенству $2x - y \geq 0$, а соответствующую площадь представим красными линиями.

3. Множеством решений данной системы неравенств будет часть плоскости закрашенная обеими цветами.

4. Выберем отсюда одну точку, например (7; 6), и проверим, удовлетворяют ли координаты системе неравенств:

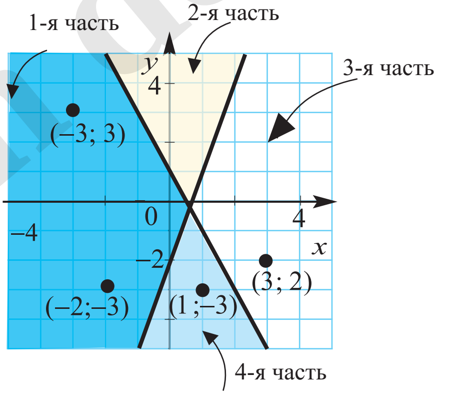
$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x - y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 7 + 6 \geq 6 \\ 2 \cdot 7 - 6 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 13 \geq 6 \\ 8 \geq 0 \end{cases}$$

Каждая пара $(x; y)$ из закрашенной обеими цветами части, является решением данных неравенств системы. Согласно условиям неравенств граничные линии тоже принадлежат решению системы, поэтому они нарисованы сплошными линиями.

Обучающие задания

1 **Исследование.**

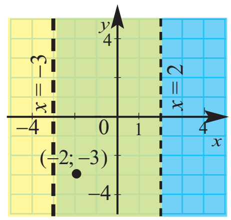
Графики, соответствующие уравнениям $3x - y = 2$ и $2x + y = 1$ делят координатную плоскость на 4 части. Проверяя какая из отмеченных точек является решением системы неравенств, определите какая часть соответствует следующим системам.



a) $\begin{cases} 3x - y \leq 2 \\ 2x + y \leq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y \geq 2 \\ 2x + y \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - y \geq 2 \\ 2x + y \leq 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y \leq 2 \\ 2x + y \geq 1 \end{cases}$

Пример 2. Изобразите графически на координатной плоскости неравенство $-3 < x < 2$.

1. Запишем двойное неравенство $-3 < x < 2$ в виде системы неравенств: $\begin{cases} x > -3 \\ x < 2 \end{cases}$



2. Изобразим неравенство $x > -3$ графически: Нарисуем на координатной плоскости пунктирной линией прямую, соответствующую уравнению $x = -3$. Все точки полуплоскости, расположенные правее от этой прямой будут решениями неравенства $x > -3$.

3. Изобразим неравенство $x < 2$ графически: прямую, соответствующую уравнению $x = 2$, нарисуем в прямоугольной системе координат пунктирной линией. Все точки полуплоскости, расположенные левее от этой прямой будут решениями неравенства $x < 2$.

4. Часть плоскости, соответствующая неравенствами $x > -3$ и $x < 2$ изображает решение неравенства $-3 < x < 2$ на координатной плоскости. $x = -3$ и $x = 2$ не принадлежат графику.

5. Проверка: проверим в точке $(-2; -3)$: $-3 < -2 < 2$

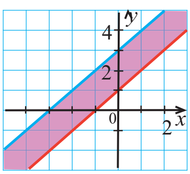
2 Решите систему неравенств графически. Выбрав пробную точку, проверьте решение.

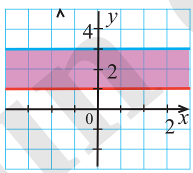
a) $\begin{cases} x < 5 \\ x > -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y > -2 \\ y \le 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \ge 0 \\ x + y < 11 \end{cases}$

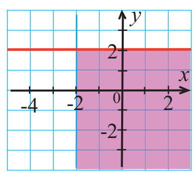
d) $\begin{cases} y < x + 4 \\ y \ge -2x + 1 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y > -8 \\ x + y \le 6 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y > -3x \\ x \le 5y \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y > 7 \\ 2x + y < 8 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 7x + y > 0 \\ 3x - 2y \le 5 \end{cases}$ i) $\begin{cases} -x < y \\ x + 3y > 8 \end{cases}$

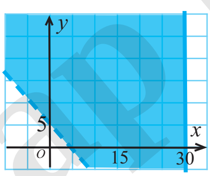
3 Напишите систему неравенств, соответствующую каждому графику.

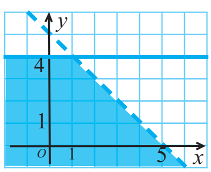
a)


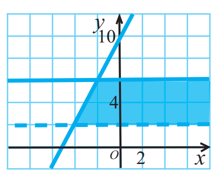
b)


c)


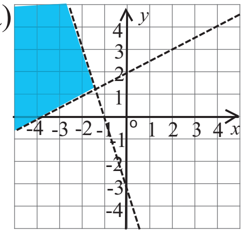
4 Напишите системы неравенств соответствующие данным графикам. Проверьте решение, выбрав пробную точку.

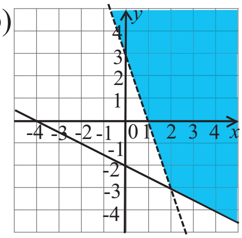
a) (15; 10)


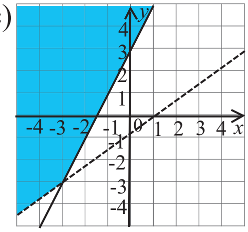
b) (1; 1)


c) (2; 4)


5 Напишите систему неравенств, соответсвующую графическому изображению.

a) 

b) 

c) 

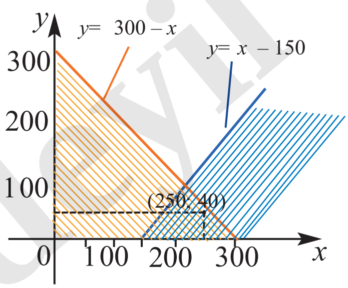
Прикладные задания.

График системы линейных неравенств, соответствующий реальным жизненным ситуациям в большинстве случаях строится в первой четверти координатной плоскости.

Пример 3. На одном из двух конвейеров производят кастрюли из нержавеющей стали, а на другом-медные кастрюли. Если каждый из конвейеров работает на полную мощность, то ежедневно производится не более 300 кастрюль. Так как потребность в кастрюлях из нержавеющей стали больше, их ежедневно производят больше чем медных, но не меньше 150 штук. Напишите систему неравенств показывающую ежедневное количество производимых кастрюлей и изобразите графически.

Решение: 1) Примем за x - количество кастрюль из нержавеющей стали; за y количество медных кастрюль. Согласно условию задачи, можно написать следующую систему неравенств.

$$\begin{cases} x+y \le 300 \\ x-y \ge 150 \end{cases}$$



2) Решение неравенства $x+y \le 300$ изображает прямая $y = 300 - x$ и часть полуплоскости, расположенная ниже этой прямой. Решение неравенства $x - y \ge 150$ изображает прямая $y = x - 150$ и часть полуплоскости расположенная ниже этой прямой.

Решением системы $\begin{cases} x+y \le 300 \\ y+150 \le x \end{cases}$ является часть плоскости, закрашенная двумя цветами и охватывающая решения соответствующих обоих неравенств, включая граничные прямые.

3. С помощью пробной точки (250; 40) проверим систему неравенств.

$$250+40 \le 300,\ \ 250-40 \ge 150;\ \ 290 \le 300,\ \ 210 \ge 150.$$

Решение системы неравенств найдено верно.

6 Натиг получает в магазине за каждый проданный ящик лимонада прибыль 2 маната, а за каждый ящик кекса - 1 манат. Натиг планирует ежедневно продавать не больше 15 ящиков и получать при этом прибыль не меньше 20 манат. Согласно этим условиям напишите систему неравенств и изобразите графически, возможные варианты количества ящиков лимонада и кекса.

7 Для определения рациона здорового питания врач-диетолог хочет смешать продукты A и B так, чтобы в смеси было не меньшее 50 г протеина, а энергетическая ценность было бы не больше 600 калорий. В таблице приведена питательная ценность 1-ой чашки продуктов. По данным таблицы определите, сколько чашек каждого продукта должен смешать врач?

Продукты	Протеин (г/чашка)	Энерг. ценность (калорий/чашка)
A	20	100
B	10	200

8 Ляман пришла в спортивный комплекс и прочитала следующее объявление.

Тренировки и калории потраченные за минуту:

Беговая дорожка	средняя скорость – 6	высокая скорость – 12
Подъем по лестнице	средняя скорость – 7	высокая скорость –10
Велосипед	средняя скорость – 5	высокая скорость –12

a) Ляман хочет сегодня потерять не меньше 400 калорий тренируясь на велосипеде не больше 45 минут. Сколько минут она должна ехать с высокой скоростью, а сколько со средней скоростью, чтобы добиться этого?

b) По данной информации составьте две задачи и представьте их графически.

9 Рост спортсменов в женской волейбольной команде разные - начиная с 1 м 60 см и до 2-х метров. А их массы меняются от 55 кг до 75 кг. Напишите систему неравенств показывающую рост и массу игроков и постройте график.

10 Величина pH воды в плавательных бассейнах составляет от 7,4 до 7,6 единиц, показатель же хлора между 1,0 и 1,5 PPM. Приняв показатель pH за p, уровень хлорирования за c, напишите систему неравенств показывающую пределы нормы pH и уровень хлорирования. Постройте график.

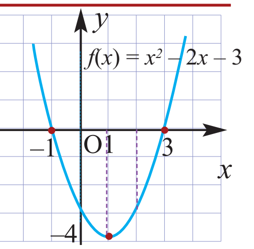
11 **Вопрос открытого типа.**

a) Напишите неравенство с двумя переменными, в котором граничная линия принадлежит графику и постройте график.
Напишите неравенство и постройте график, в котором граничная линия не будет принадлежать графику.

12 Покажите, заштриховав, множество точек на координатной плоскости заданных системами неравенств.

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \geq 2 \\ y \leq 5 \\ 2y - x \geq 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y \geq -2 \\ y - x \leq 2 \\ 2x + y \leq 2 \end{cases}$

Квадратные неравенства



Исследование. 1) Найдите точки пересечения параболы $y = x^2 - 2x - 3$ с осью абсцисс.

$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad x = -1, \quad x = 3$

2) Найдите координаты точки вершины:

$$m = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1, \; n = m^2 - 2m - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

3) Постройте параболу

4) Определите знаки ординат точек параболы с абсциссами:

$x = 0; \; x = 1; \; x = 2$

5) При каких значениях x парабола находится ниже оси абсцисс?

6) При каких значениях x парабола находится выше оси абсцисс?

7) Чтобы правильно ответить на вопросы в пунктах 5 и 6 что важнее: нахождение точки вершины или нахождение точек пересечения параболы с осью абсцисс?

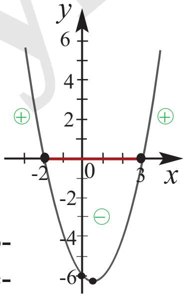
Неравенства вида:
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leq 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \geq 0$

являются квадратными неравенствами ($a \neq 0$). Решение квадратных неравенств сводится к отысканию промежутков, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.
При этом способе решения неравенств важно знать направление ветвей параболы и точки пересечения параболы с осью абсцисс.

Пример: По графику функции $y = x^2 - x - 6$ напишите множество решений нижеприведенных неравенств.

a) $x^2 - x - 6 \leq 0$ c) $x^2 - x - 6 > 0$

b) $x^2 - x - 6 \geq 0$ d) $x^2 - x - 6 < 0$



$y = x^2 - x - 6$

График функции пересекаясь осью Ox в точках $x = -2$ и $x = 3$ делит ее на три промежутка, в которых принимает положительные и отрицательные значения. Определим значения выражения $x^2 - x - 6$ в каждом из промежутков.

a) График функции $y = x^2 - x - 6$ пересекает ось x в точках -2 и 3 и между этими значениями располагается ниже оси Ox. Значит, решение неравенства $x^2 - x - 6 \leq 0$ будет $-2 \leq x \leq 3$.

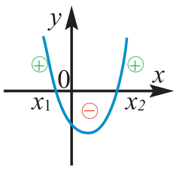
b) При значениях $x = -2$ и $x < -2$ или же $x = 3$ и $x > 3$ значения фунции (то есть значение выражения $x^2 - x - 6$) равны нулю или же больше нуля. Значит, решением неравенства $x^2 - x - 6 \geq 0$ будет $x \leq -2$ или $x \geq 3$.

c) Решением неравенства $x^2 - x - 6 > 0$ будет $x < -2$ или же $x > 3$.

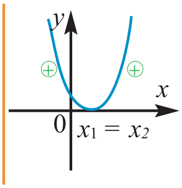
d) Решением неравенства $x^2 - x - 6 < 0$ будет $-2 < x < 3$.

Квадратные неравенства

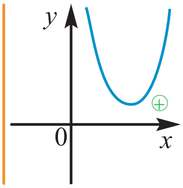
Чтобы решить квадратные неравенства с помощью графика:
1. По значению коэффициента a выясняется, куда направлены ее ветви (при $a > 0$ - вверх, при $a < 0$ - вниз). 2. По значению дискриминанта квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ выясняется, пересекает ли парабола ось абсцисс в двух точках (при D > 0), касается ее в одной точке (D = 0), или не имеет общих точек с осью Ox (при D < 0). 3. По точкам пересечения графика функции с осью Ox схематически изображается график функции.
4. По схематическому изображению графика, определяются промежутки, соответствующие решениям данных неравенств.



$a > 0$
D > 0

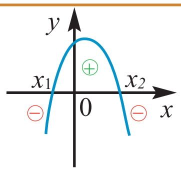


$a > 0$
D = 0

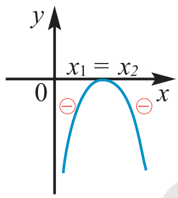


$a > 0$
D < 0

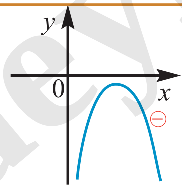
$a>0$, D > 0	$a>0$, D = 0	$a>0$, D < 0
Решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$		
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Решение неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$		
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Решение неравенства $ax^2 + bx + c < 0$		
$(x_1; x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$
Решение неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$		
$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\varnothing$



$a < 0$
D > 0



$a < 0$
D = 0



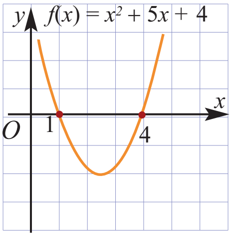
$a < 0$
D < 0

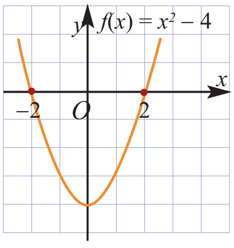
$a<0$, D > 0	$a<0$, D = 0	$a<0$, D < 0
Решение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$		
$(x_1; x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$
Решение неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$		
$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\varnothing$
Решение неравенства $ax^2 + bx + c < 0$		
$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Решение неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$		
$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

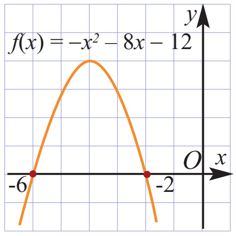
Квадратные неравенства

Обучающие задания

1 По графикам напишите решения неравенств.

1) 

2) 

3) 

1)	2)	3)
a) $x^2 - 5x + 4 \leq 0$	a) $x^2 - 4 \leq 0$	a) $-x^2 - 8x - 12 \leq 0$
b) $x^2 - 5x + 4 \geq 0$	b) $x^2 - 4 \geq 0$	b) $-x^2 - 8x - 12 \geq 0$
c) $x^2 - 5x + 4 > 0$	c) $x^2 - 4 > 0$	c) $-x^2 - 8x - 12 > 0$
d) $x^2 - 5x + 4 < 0$	d) $x^2 - 4 < 0$	d) $-x^2 - 8x - 12 < 0$

2 Решите неравенства используя графики соответствующих функций.

a) $x^2 - 7x + 10 > 0$ b) $x^2 - 4x + 3 < 0$ c) $x^2 - 9 \geq 0$

3 Решите неравенства.

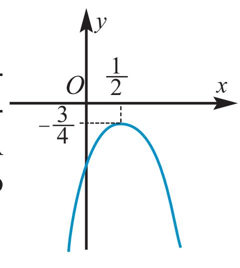
a) $x(x + 6) \geq 40$ c) $6x^2 > 11x + 35$ e) $-2x^2 - x + 3 > 0$

b) $-x^2 - 11x - 24 < 0$ d) $7x + 5 \leq -2x^2$ f) $-3x^2 + 5x > 2$

4 Докажите, что неравенство верно при любом значении переменной.

a) $-x^2 + x - 1 < 0$ b) $6x - x^2 < 10$ c) $5x^2 - 2x + 1 > 0$

Пример: Решите неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$.
Решение: Ветви параболы направлены вниз ($a < 0$). Так как уравнение $-x^2 + x - 1 = 0$ не имеет действительных корней, парабола не пересекает ось абсцисс и целиком лежит в нижней полуплоскости. А это значит, что неравенство $-x^2 + x - 1 < 0$ верно при любых значениях переменной.
Ответ: $(-\infty; +\infty)$



5 Решите неравенства.

a) $x^2 + x + 3 > 0$ b) $2x^2 + x + 1 \geq 0$ c) $x^2 - 2x + 4 < 0$

6 В каких из данных неравенств: a) решением является множество всех действительных чисел $(x \in \mathrm{R})$; b) нет решений $(\varnothing)$?

a) $x^2 + 1 > 0$ b) $x^2 + 1 < 0$

7 Найдите множество решений неравенства.

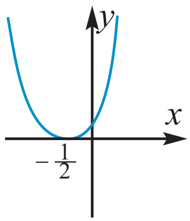
a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

b) $x^2 + 49 \leq 14x$

c) $40x + 25x^2 + 16 < 0$

d) $49x^2 + 70x + 25 \geq 0$

Пример: Решим неравенство $4x^2 + 4x + 1 > 0$.
Решение: Изобразим график функции $y = 4x^2 + 4x + 1$. Решим уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ и найдем единственное значение переменной удовлетворяющее уравнению: $x = -\frac{1}{2}$. Парабола касается оси Оx в точке $(-\frac{1}{2}; 0)$. Как видно из графика, это неравенство верно при любых значениях x, кроме $x = -0{,}5$.



Ответ: $x \neq -0{,}5$

8 Решите неравенства, построив графики соответсвующих функций.

a) $x^2 - 9x + 8 < 0$
b) $x^2 + 6x + 5 > 0$
c) $4x^2 + 12x + 10 \leq 0$
d) $x^2 - 2x - 24 \leq 0$
e) $0 > -x^2 + 7x - 12$
f) $3x^2 - 3x + 9 > 0$
g) $x^2 + 8x + 16 \geq 0$
h) $-x^2 + 2x + 15 < 0$
i) $0 > -x^2 + 4x - 4$

9 Напишите квадратное неравенство, решение которого соответствует данному условию:

a) $-2 \leq x \leq 4$
b) $x < 1$ или $x > 10$
c) $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$
d) $x < -\frac{3}{4}$ или $x > \frac{2}{3}$
e) $x \leq -3 - \sqrt{5}$ или $x \geq -3 + \sqrt{5}$
f) $x \in \mathrm{R}$
g) нет решений.

10 При каких значениях x:

a) Трехчлен $3x^2 - 2x - 1$ принимает положительные значения?

b) Трехчлен $-x^2 + 3x - 2$ принимает отрицательные значения?

11 При каких значениях переменной:

a) Значение трехчлена $2x^2 + x - 6$ меньше 4?

b) Значение трехчлена $-x^2 + 8x + 2$ больше 9?

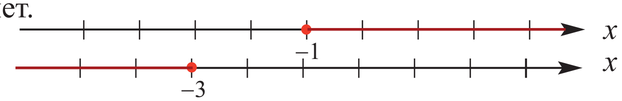
12 При каких значениях аргумента значение функции $f(x) = x^2 - 4x$ меньше соответствующего значения функции $g(x) = x + 6$?

Квадратные неравенства

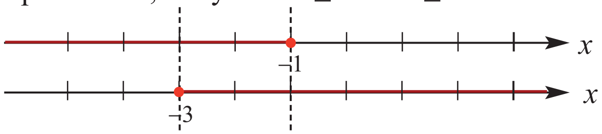
Квадратные неравенства можно решать алгебраическим способом, разложив левую часть на множители и по знаку неравенства исследовать возможные случаи.

Пример. Неравенство $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ запишем в виде $(x + 1)(x + 3) \leq 0$. Произведение двух множителей будет отрицательным, если множители будут иметь противоположные знаки.

1-ый случай. Предположим, что $(x + 1) \geq 0$, а $(x + 3) \leq 0$. Отсюда $x \geq -1$ и $x \leq -3$. Решением неравенства $x^2 + 4x + 3 \leq 0$ будут такие значения x, которые удовлетворяют обеим неравенствам. В этом случае такого значения для x нет.



2-ой случай. Предположим что $(x + 1) \leq 0$ и $(x + 3) \geq 0$.
Решив эти неравенства, получим $x \leq -1$ и $x \geq -3$.



Все значения промежутка от -3-х до -1, включая $x=-3$ и $x=-1$ являются решением неравенства $x^2 + 4x + 3 \leq 0$. Ответ: $-3 \leq x \leq -1$

13 Решите неравенства разложением на множители.

a) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$ b) $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ c) $4x^2 < 25$

d) $-x^2 - 12x < 32$ e) $x^2 - 4x - 5 > 0$ f) $12x^2 + 3x \leq 0$

14 Решите неравенства разными способами.

a) $x^2 + 8x + 7 > 0$ b) $x^2 + 6x + 5 \leq 0$ c) $2x^2 - 11x + 15 \geq 0$

d) $x^2 - 5x > 3x^2 - 18x + 20$ e) $2x^2 + 12x - 11 > x^2 + 2x + 13$

15 Решите неравенства разделив их на две группы – линейные и квадратные неравенства.

$y^2 - 3 < 0$	$4(x - 2) < 6x - 3$	$8p^2 - 18 > 0$
$7(3 - y) > 4 + 2y$	$(5x + 2)^2 \leq 4$	$x + 3 \leq 2(x + 1)$
$(3 - 7x)^2 < -1$	$x^2 - 3 < 5x + 3$	$x^2 \geq 4x$

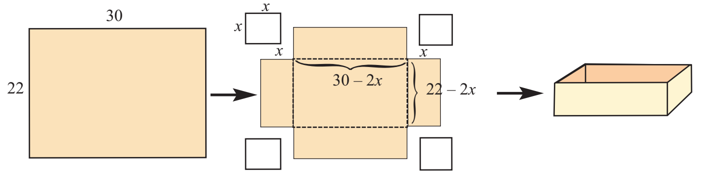
16 Решите неравенство $x^2 + x \geq 6$. Верно ли, что множество решений данного неравенства является также множеством решений неравенства:

a) $x(x + 1) \geq 6$ c) $3x^2 + 3x \geq 18$

b) $x^2 + x - 5 \geq 1$ d) $-x^2 - x \leq -6$

Прикладные задания

17 Для того, чтобы из листа картона прямоугольной формы сделать открытую коробку по углам вырезают части в форме квадрата, сгибают по пунктирным линиям и склеивают. Требуется приготовить коробку из картона размером 22 см × 30 см.



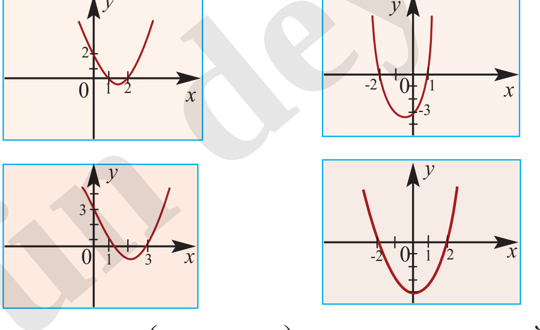
a) При каком целом значении длины стороны вырезанных по углам квадратных частей, объем коробки будет 1200 см³?
b) При каких целых значениях длины сторон вырезанных квадратных частей, объем коробки будет не меньше 1200 см³ ?

18 Один из катетов прямоугольного треугольника на 2 см длиннее другого. Какова должна быть длина меньшего катета, чтобы площадь треугольника была не меньше 24 см²?

19 Длина одной стороны прямоугольника на 7 см больше другой. Если площадь прямоугольника будет меньше 60 см², то какой может быть длина большей стороны?

20 Установите соответствие графиков и неравенств? Каким неравенствам не соответствует ни один из графиков? Постройте и эти графики, при помощи их решите неравенства.

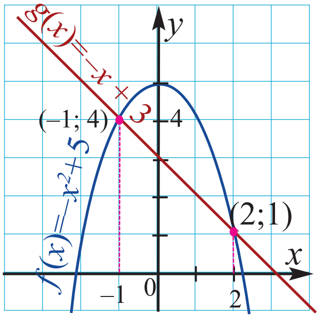
a) $x^2 - 3x + 2 > 0$
b) $x^2 - 4x + 3 \leq 0$
c) $x^2 - 2x - 3 < 0$
d) $x^2 + x - 2 \geq 0$
e) $x^2 - x - 2 < 0$
f) $x^2 - 4 > 0$



21 Исследования показывают, что время (в терциях) реакции водителей на возникшее препятствие можно смоделировать функцией $T(x) = 0{,}005x^2 - 0{,}23x + 22$ (x - показывает возраст водителя: $16 \leq x \leq 70$) Сколько терций составляет время реакции водителя:
a) в 16 лет; b) в 35 лет? c) в каком возрасте время реакции водителя будет больше 25 терций?

Терция - единица измерения времени и равна $\frac{1}{60}$ секунды.

22 На рисунке показано решение неравенства $-x^2 + 5 \geq -x + 3$.



a) Обоснуйте письменно справедливость данного неравенства для всех значений x принадлежащих промежутку $[-1; 2]$.

b) Упростив неравенство $-x^2 + 5 \geq -x + 3$, запишите в виде квадратного неравенства $-x^2 + x + 2 \geq 0$ и решите его графическим способом.

c) Одинаковые ли полученные результаты? Что общего и чем различаются данное графическое решение и решение, полученное вами?

23 Форму арки моста в выбранной системе координат можно показать квадратичной функцией $y = -0{,}002x^2 + 1{,}06x$. x - это расстояние от левой опоры. y - показывает высоту (в метрах) арки над уровнем воды. На каком расстоянии от левой опоры арка расположена над дорогой?

24 После удара, движение мяча можно смоделировать функцией $h(x) = -5x^2 + 20x + 1$. Здесь h - высота (в метрах) брошенного вверх мяча через x секунд. a) В каком интервале времени мяч поднимется на высоту больше 16-ти метров? b) Сколько секунд мяч останется в воздухе?

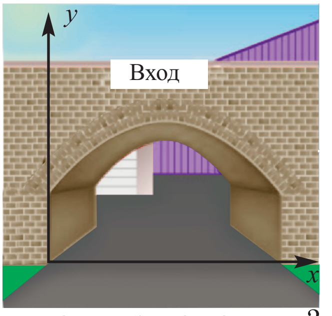
25 **Обобщение.** Воспользуюсь графиком и дискриминантом квадратичной функции, исследуйте решение неравенства $ax^2 + bx + c \geq 0$.

a) В каких случаях решением неравенства будут все действительные числа?

b) В каких случаях решением неравенства будет одно действительное число?

c) В каких случаях множество определенных действительных чисел будет решением неравенства, а в каких случаях множество определенных действительных чисел не будет решением?

26 Через арку должна проехать машина высотой 3,5 м и шириной 2,2 м. Арку можно смоделировать функцией $y = -0{,}3x^2 + 1{,}8x + 1{,}1$ (x и y в метрах).



a) Сможет ли автомобиль проехать через арку? Объясните.

b) Для того чтобы машина высотой в 3,5 м проехала через арку, какой может быть наибольшая ширина машины?

c) Для того чтобы машина шириной 2,2 м проехала через арку, какой может быть наибольшая высота машины?

27 Решите неравенства двумя способами.

1) Построив графики квадратичной и линейной функций.

2) Упростив и построив график полученной квадратичной функции.

a) $x^2 \leq 15 - 2x$ b) $x^2 + 4x > 3 + 2x$

c) $13x - 7 \leq -2x^2$ d) $x^2 + 4x + 3 < 2x + 1$

28 Решите неравенства, построив графики соответствующих функций.

a) $x^2 - 2x - 3 > 0$ b) $x^2 + 2x - 3 < 0$ c) $x^2 + 5x + 4 \geq 0$

d) $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ e) $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ f) $x^2 - 4x < 0$

g) $-x^2 + 3x \geq 0$ h) $-x^2 + 9 \leq 0$ i) $-4x^2 - 16 > 0$

29 В медицине для определения степени избыточного веса используют "Индекс массы тела". Если индекс массы находится между 17 и 24, то вес считается нормальным. Индекс массы тела рассчитывается по формуле: $I = \dfrac{m}{h^2}$ где m - масса тела в килограммах, h - рост в метрах.

a) Какой должна быть масса человека с ростом 1 м 50 см, чтобы индекс массы был меньше 24-х?

b) Каким должен быть наименьший рост человека массой 54 кг, чтобы индекс массы был меньше или равно 24-ем?

30 Чтобы посадить в саду зелень, Тахир хочет выделить участок прямоугольной формы. Для забора у него есть материал длиной 70 метров. Если Тахир хочет, чтобы участок для посадки зелени был больше 300 м^2, то какие размеры должны быть у участка?

Решение неравенств методом интервалов

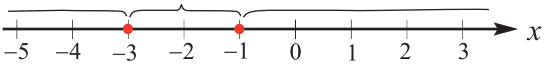
Метод интервалов

1. Напишите уравнение, соответствующее неравенству.
2. Найдите корни уравнения. Отметьте на числовой оси точки, соответствующие корням уравнения. Эти точки называются граничными точками неравенства.
3. В каждом из интервалов, образованных граничными точками, выберите пробные точки и определите какой из интервалов, будет решением неравенства.

Пример. Решите неравенство $x^2 + 4x + 3 \le 0$:
Для того чтобы решить неравенство:

1) Находим корни уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$:
$(x+1)(x+3) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = -3$.

2. Отмечаем на числовой оси точки $x_1 = -1$; $x_2 = -3$.Как видно, граничные точки делят числовую ось на 3 интервала.



3. В каждом из интервалов выбираем пробное число (–5; –2; 0) и проверяем неравенство.

Интервал	$x < -3$ $(-\infty; -3)$	$-3 \le x \le -1$	$x > -1$, $(-1; +\infty)$
Пробное число	-5	-2	0
Значение выражения в левой части	$(-5)^2 + 4\cdot(-5) + 3 = 8$	$(-2)^2 + 4\cdot(-2) + 3 = -1$	$(0)^2 + 4\cdot(0) + 3 = 3$
удовлетворяет ли $x^2 - 4x + 3 \le 0$	Нет	Да	Нет

4. Запишем решение. $-3 \le x \le -1$

Обучающие задания

1 Решите неравенства методом интервалов.

a) $x^2 + 2x - 3 \ge 0$

b) $3x^2 - x - 2 < 0$

c) $x^2 - 3x + 1 \le 29$

d) $x^2 - 4x > 5$

e) $2x^2 + 5x \ge 7$

f) $2x^2 + 3x > 5$

g) $x^3 - 4x < 0$

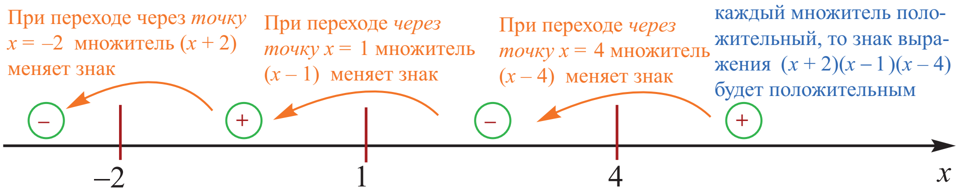
h) $x^3 - 9x \ge 0$

i) $x(x + 1)(x - 2) > 0$

j) $x(x + 3)(x - 2) > 0$

Решение неравенств методом интервалов

Исследование 1. Исследуем изменение знаков в интервалах при решении неравенств, в левой части которых произведение множителей вида $(x - c)$, а в правой 0. **Пример.** $(x + 2)(x - 1)(x - 4) < 0$. Из уравнения $(x+2)(x-1)(x-4) = 0$ найдем $x = -2$, $x = 1$, $x = 4$. На числовой оси отметим граничные точки и в каждом интервале (начиная с 1-го правого) определим знак выражения $(x + 2)(x - 1)(x - 4)$.



Как видно, в этом случае знаки на числовой оси при переходе из одного интервала в другой чередуются.

Решением неравенства будут промежутки со знаком минус.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (1; 4)$.

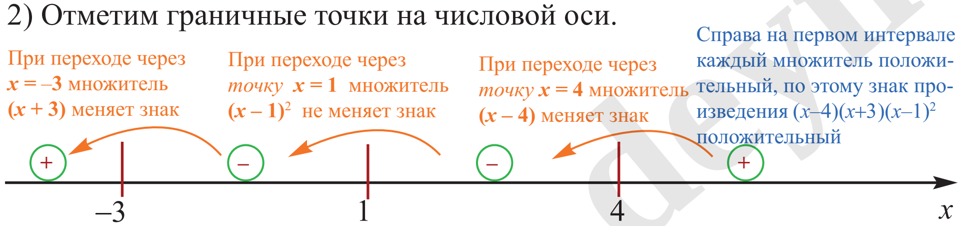
Если каждый множитель имеет вид $(x - c_k)$, тогда в первом правом интервале знак произведения положительный. Если каждый множитель первой степени, то в интервалах знаки чередуются.

Исследование 2. Неравенства содержащие множители четной степени вида $(x - c)^{2n}$ и изменения знаков в интервалах.

Пример. $(x - 4)(x + 3)(x - 1)^2 \geq 0$

1) Найдем граничные точки $(x - 4)(x + 3)(x - 1)^2 = 0$, $x = 4$, $x = -3$, $x = 1$

2) Отметим граничные точки на числовой оси.



Из-за множителя $(x - 1)^2$ в правой и левой окрестностях точки $x = 1$ знак в промежутках повторяется. Неравенство справедливо в промежутках со знаком + и в граничных точках. Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$

Если в неравенстве есть множители с четным показателем степени вида $(x - c)^{2n}$, то справа и слева от граничной точки c, знак повторяется.

2 Решите неравенства.

a) $(x + 3)(x - 8)(x - 20) < 0$ b) $(x - 3)(x + 2)(x - 1) \geq 0$

c) $(x^2 - 9)(x + 4)(x - 5) \leq 0$ d) $(x^2 - 2x)(x - 6) < 0$

e) $x^3 + 2x^2 - 15x \geq 0$ f) $(x + 5)^2 \cdot (2x - x^2) \geq 0$

g) $(x - 4)^2 \cdot (x^2 - 8x) < 0$ h) $(4x - x^3)(25 - x^2) < 0$

i) $5x(x - 2)(x - 6)^2 \geq 0$ j) $-3(x + 4)^2 \cdot (x - 5) \leq 0$

Решение неравенств методом интервалов

Решение неравенств методом интервалов

1. Напишите неравенство в виде эквивалентного неравенства, в одной части которого рациональное выражение, а в другой части нуль.
2. Найдите значение переменных, при которых числитель и знаменатель рационального выражения обращается в нуль. Эти значения переменных являются граничными точками данного неравенства.
3. Из интервалов, образованных граничными точками, последовательно выберите пробные точки и проверьте какой из этих интервалов принадлежат множеству решений неравенства.

Пример. $\dfrac{x+2}{x-4} \le 3$ *данное неравенство*

1) $\dfrac{x+2}{x-4} - 3 \le 0$ *к общим частям неравенства прибавляют -3*

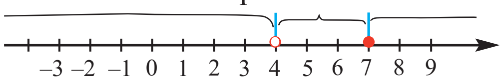
$\dfrac{-2x+14}{x-4} \le 0$ *упрощают*

$\dfrac{-2(x-7)}{x-4} \le 0$ *общий множитель выносят за скобки*

$\dfrac{x-7}{x-4} \ge 0$ *Обе части делят на (– 2) и меняют знак на противоположный*

2) Найдем нули числителя и знаменателя: $x-7=0$, $x=7$, $x-4=0$, $x=4$

3) Отмечая точки $x=4$ и $x=7$ на числовой оси, делим ее на три интервала. Эти точки называются граничными точками.



Выберем пробные точки и проверим неравенство

интервал $(-\infty;\ 4)$

$x=0$ $\quad \dfrac{x+2}{x-4} \le 3$

$\dfrac{0+2}{0-4} \overset{?}{\le} 3; \quad -\dfrac{1}{2} \overset{?}{\le} 3$

верно

интервал $(4;\ 7)$

$x=5$ $\quad \dfrac{x+2}{x-4} \le 3$

$\dfrac{5+2}{5-4} \overset{?}{\le} 3; \quad \dfrac{7}{1} \overset{?}{\le} 3$

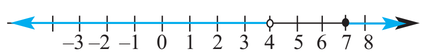
неверно

интервал $(7;\ +\infty)$

$x=8$ $\quad \dfrac{x+2}{x-4} \le 3$

$\dfrac{8+2}{8-4} \overset{?}{\le} 3; \quad \dfrac{10}{4} \overset{?}{\le} 3$

верно



Так как при $x=4$ знаменатель обращается в нуль, то эта точка не входит в множество решений, а точка $x=7$ в это множество входит.

Множество решений неравенства $\dfrac{x+2}{x-4} \le 3$ будет $(-\infty;\ 4)$ и $[7;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 4) \cup [7;\ +\infty)$

Замечание: Неравенство $\dfrac{x-7}{x-4} \ge 0$ можно также решить, применив правило изменения знаков в интервалах.

Решение неравенств методом интервалов

3 Сначала решите уравнения, потом решите соответсвующие неравенства методом интервалов.

a) $\dfrac{10}{x-5}=5$; $\dfrac{10}{x-5}<5$; $\dfrac{10}{x-5}>5$

b) $\dfrac{8}{a+1}=4$; $\dfrac{8}{a+1}>4$; $\dfrac{8}{a+1}<4$

c) $\dfrac{z+2}{z-6}=-3$; $\dfrac{z+2}{z-6}\le -3$; $\dfrac{z+2}{z-6}\ge -3$

d) $\dfrac{w-8}{w+6}=2$; $\dfrac{w-8}{w+6}\le 2$; $\dfrac{w-8}{w+6}\ge 2$

4 Перенеся все члены в левую часть и разложив на множители, решите неравенство.

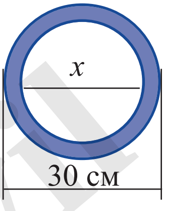
a) $x^3 \le 16x$ b) $(2x-6)^2 \le x^2$ c) $(x^2+x-3)^2 < (x^2-x-5)^2$

5 Решите неравенства.

a) $|2x-3| > |6-x|$ b) $|3x-5| < |x-3|$ c) $|2x-1| < |x+1|$

Указание: Неравенства вида $|p(x)| < |g(x)|$ замените эквивалентными им неравенствами $p^2(x) < g^2(x)$ и перенеся члены в левую часть, разложив на множители, решите полученное неравенство.

6 В здание планируется провести водопроводную трубу. Наряду с внешним диаметром трубы в 30 см, площадь поперечного сечения трубы не должна быть меньше 60 см² и больше 90 см².



a) Согласно условию задачи напишите квадратное неравенство и постройте график.

b) Определите допустимые значения внутреннего диаметра водопроводной трубы.

7 Гейдар на летних каникулах в мебельном магазине помогает отцу. За транспортировку каждого стола они платят 10 манат а фирме - производителю стабильно 1800 манат в неделю. Если один стол будет стоит x манат, то за неделю можно продать $(120-x)$ столов. По какой цене должны продаваться столы, чтобы прибыль за неделю была максимальной? Сколько столов продадут за неделю в данном случае?

8 Решите неравенства.

a) $\dfrac{x-3}{x+7}<0$ b) $\dfrac{2x-10}{x+8}>0$ c) $\dfrac{x}{2x-5}\le 0$

d) $\dfrac{(x-1)(x^2-36)}{x+1}<0$ e) $\dfrac{x}{x-5}\ge\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{3x-1}{2x+5}\ge 3$

9 При каких значениях k уравнение: a) не имеет действительных корней ; b) имеет две действительные корни.

1) $3x^2+kx+3=0$ 2) $kx^2-4x+k-3=0$

Обобщающие задания

1 Решите неравенства методом интервалов.

a) $-x^2-2x+48<0$ b) $3x^2+2x-5<0$ c) $4x^2-4x+1>0$

d) $x^2+2x-15\le 0$ e) $24+11x+x^2>0$ f) $3x^2-4x+1\le 0$

g) $x^2-2x+3<0$ h) $x^2-2x+3>0$ i) $x^2-4x+4\ge 0$

2 Решите неравенства.

a) $\dfrac{3x+1}{2x-4}>0$ b) $\dfrac{2x-1}{5x+3}\ge 0$ c) $\dfrac{x-3}{x+3}\le 5$

d) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-2x-3}<0$ e) $x-17\ge\dfrac{60}{x}$ f) $\dfrac{x^2-x-6}{x-3}\ge 1$

g) $\dfrac{x-2}{x-1}<1$ h) $\dfrac{x^2+x-1}{x+3}<1$ i) $\dfrac{x^2+2}{x+4}\le 3$

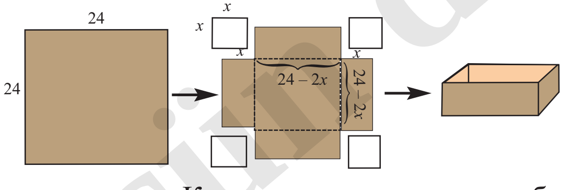
j) $|2x-3|+5<6$ k) $|5x+3|-4\ge x$ l) $|x+5|<|6x-10|$

3 Зависимость между месячной арендной платой (r) за каждый квадратный метр площади магазина и полученным доходом (тыс. манатах) $P(r)$ приблизительно задается формулой $P(r)=-6r^2+45r-39$. Решите нижеуказанные уравнения и неравенства, представьте каждое из них соответственно в реальной ситуации.

$-6r^2+45r-39=0$ $-6r^2+45r-39>0$

$-6r^2+45r-39\ge 15$ $-6r^2+45r-39<15$

4 Если от каждого угла листа картона квадратной формы размером 24 см × 24 см, отрезать квадраты со стороной x см, а затем согнуть лист по пунктирным линиям, как показано на рисунке, и склеить его, то получится открытая коробка. При каких целых значениях x объем коробки будет больше 800 см^3. При каких значениях объем будет наибольшим?



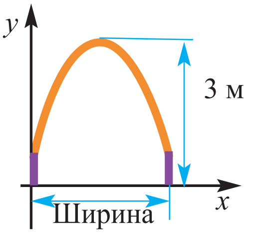
5 **Вопрос открытого типа.** Какие три точки нужно выбрать, чтобы найти множество решений неравенства $(x+1)(x-4)<0$?

6 Джавид написал решение неравенства $2x^2+12x>2x+12$ в виде $2x(x+6)>2(x+6)$, $x>2$. Объясните ошибку Джавида.

7 Верно ли высказывание что множество решений неравенства $x^2+6x-8\le 0$ в 2 раза "шире" множества решений неравенства $\dfrac{1}{2}x^2+3x-4\le 0$

Обобщающие задания

8 Вход дома имеет форму арки. В выбранной системе координат модель арки задается функцией $g(x) = -2{,}4x^2 + bx + 0{,}6$. Если высота входа равна 3 м, то какой может быть ширина? Для того чтобы машина высотой в 2,4 м проехала через арку, какой должна быть ее наибольшая ширина?



9 Решите неравенства.

a) $\dfrac{2}{2-x} \leq 3 - x$ b) $\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{-1}{x+2}$ c) $\dfrac{2x^2+6x-8}{2x^2+5x+3} < 1$

10 Ежемесячная зарплата одного из продавцов 200 манатов, плюс дополнительно 2% от общей продажи. Зарплата другого продавца составляет только 10% от продажи. Какой должна быть наименьшая сумма от продажи, чтобы второй продавец заработал больше денег чем первый.

11 В банк вложены 5000 манат под простую процентную ставку 8%. Сколько еще денег нужно вложить под простую процентную ставку 10%, чтобы годовая прибыль была между 800 манат и 950 манат.

12 Для нормального существования акул температура воды должна быть от 5°C до 18°C. Напишите неравенство для температуры, не подходящей для существования акул.

13 Сумма двух целых чисел равна 20, а сумма их квадратов меньше 208. Определите эти числа.

14 Из шелковой ткани прямоугольной формы отрезали кусок, длина которого больше ширины в 5 раз. Определите возможные размеры ширины, если площадь ткани не менее 500 см^2 и не более 720 см^2.

15 Аслан кинул мяч вверх со скоростью 15м/сек с крыши здания высотой 30 м. Расстояние h мяча от земли можно найти по формуле: $h(t) = -5t^2 + 15t + 30$. Через сколько секунд мяч будет от земли:
a) на высоте больше 40 м, но меньше 50 м;
b) на высоте 12 м?

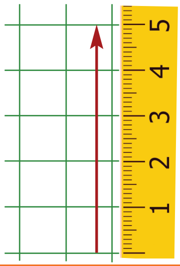
16 При каких значениях a точки пересечения параболы $y = ax^2 + 2x + 1$ с осью абсцисс находятся по разные стороны от точки $x = 1$?

17 Найдите сумму целых решений неравенствам.

a) $\dfrac{x^2-4x}{|x-3|} \leq 0$ b) $\dfrac{|x+1|}{x^2-9} < 0$

18 При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - ax + 1 > 0$ удовлетворяется при любых значениях переменного?

Векторы



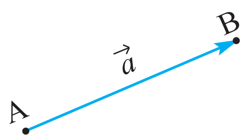
Векторы

Практическая работа

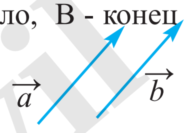
Начертите соответствующие расстояниям отрезки в заданном масштабе и с заданным направлением. Направление покажите стрелкой.

25 км на север 1 см : 1 км	20 м направа 1 см : 5 м	4 км налево 1 см : 1 км
250 м наверх 1 см : 25 м	100 м вниз 1 см : 20 м	15 км на север 1 см : 3 км

Многие величины, например, масса, длина, время, температура и др. характеризуются только числовыми значениями. Такие величины называются скалярными величинами. Некоторые же величины, например, скорость, ускорение, сила и др. определяются как числовыми значениями, так и направлением. Такие величины называются векторными величинами. Перемещение - самый простой пример векторных величин. Перемещение тела из точки A в точку B изображается с помощью направленного от A до B отрезка - вектора. Вектор изображается с помощью направленного отрезка.



Длина этого отрезка, называется **длиной** или **модулем вектора**. Вектор обозначается указанием начальной и конечной точки. Например, вектор $\overrightarrow{AB}$, здесь A - начало, B - конец вектора. Вектор обозначается также и маленькими буквами, например вектор $\vec{a}$. Длину вектора $\vec{a}$ обозначают, как: $|\vec{a}|$

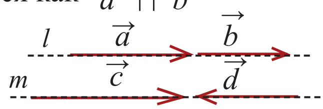


- Два вектора называется равными, если они равны по модулю и одинаково направлены. На рисунке векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны: $\vec{a} = \vec{b}$.
- Два вектора называются противоположными, если они равны по модулю и противоположно направлены.

$$|\vec{p}| = |\vec{q}| \quad , \quad \vec{p} = -\vec{q}$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ противоположны: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется нулевым и обозначается $\vec{0}$. Длина нулевого вектора равна 0, а направление не определено. Если направленные отрезки, изображающие векторы параллельны или лежат на одной и той же прямой, то они называются коллинеарными векторами. Коллинеарные вектора могут быть одинаково направлены или противоположно направлены. Одинаково направленные вектора обозначаются как $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ а противоположно направленные $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{q}$.



На рисунке векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ -коллинеарные векторы. Здесь $l \| m$.

Векторы

Обучающие задания

1 В каком случае можно говорить о векторных, а в каком о скалярных величинах?

1) Автомобиль движется на восток со скоростью 60 км/час.

2) Севиндж кинула мяч, который держала в руке, вперед под углом 30° с силой 100 Н.

3) Рост Гасана равен 1м 75 см, а масса 72 кг.

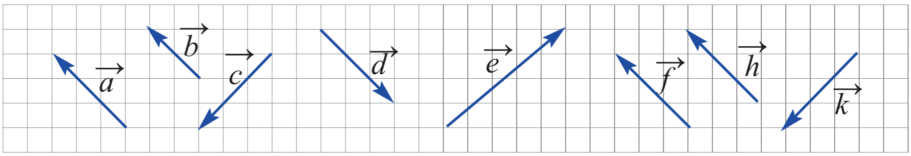
4) Парашютист выпрыгнул из самолета со скоростью 20 км/час.

2 Какие из величин векторные?

1) 5,6 кг 2) 3,2 *м/сек*, по направлению северо-восток

3) 9,81 *м/сек*^{2}, вниз 4) 8,8 $\times 10^{-3}$ *м*^{3}

3 По рисунку выполните задания.



a) Запишите все векторы, длины которых равны длине вектора $\vec{a}$.

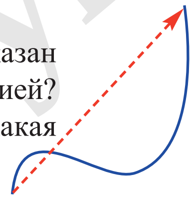
b) Запишите векторы, одинаково направленные с вектором $\vec{a}$.

c) Запишите все векторы, равные вектору $\vec{a}$.

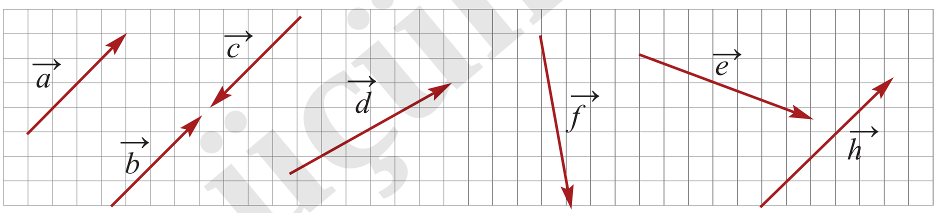
d) Запишите вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

4 a) На рисунке путь пройденный велосипедистом показан голубой линией. Какая величина показана красной линией?

b) Какая из величин масса и вес - векторная, а какая скалярная? Объясните свое мнение.



5 Выберите векторы коллинеарные вектору $\vec{b}$.

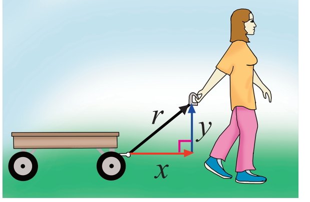


6 Нарисуйте в тетради; a) два коллинеарных вектора; b) два противоположных вектора; c) два равных вектора.

7 Расим представил на рисунке вектор перемещения отрезком длиной 6 см. Найдите реальное перемещение, если масштаб рисунка 1 см : 250 м .

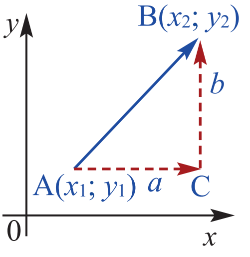
Векторы в координатной плоскости

Исследование. Сила, приложенная, Наилей к тележке имеет, два компонента - тянущую тележку вперед и тянущую ее вверх. Какими буквами на рисунке изображены эти силы? Какими формулами пользуются в физике для вычисления этих сил?

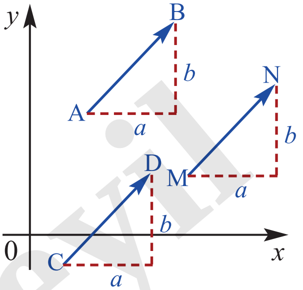


Выражения вектора компонентами в координатной плоскости

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$ на координатной плоскости. Конечная точка B относительно начальной точки A изменила свое положение вдоль оси Ox на $|a|$ (при $a>0$ направо, при $a<0$ налево), вдоль оси Oy на $|b|$ (при $b>0$ вверх, при $b<0$ вниз). Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ определенные (и по модулю, и по направлению) парами чисел a и b (как указано выше) являются компонентами вектора $\overrightarrow{AB}$. На координатной плоскости вектор записывается как $\overrightarrow{AB} = \langle a;\ b\rangle$. Эта запись называется записью вектора с компонентами.



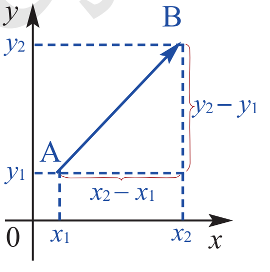
Равные векторы имеют равные компоненты. Наоборот, если, соответствующие компоненты векторов равны, то эти векторы равны. На рисунке $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MN}$. Если дан какой либо вектор $\overrightarrow{AB}$, то выбрав любую точку плоскости как начало можно построить вектор равный данному, причем только один. Значит, выбирая разные начальные точки можно построить бесконечно много векторов равных данному.



На координатной плоскости вектор $\overrightarrow{AB} = \langle a;\ b\rangle$ с начальной точкой A и конечной точкой B согласно координатам этих точек можно выразить с компонентами. Так как $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$, то

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1;\ y_2 - y_1\rangle = \langle a;\ b\rangle$$

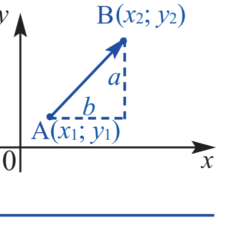
Здесь a; b называются также координатами вектора.



Длина вектора

Длину вектора можно найти по координатам начальной и конечной точек, используя формулу расстояния между точками. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Длину вектора данными с компонентами можно найти по формуле: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$



Векторы в координатной плоскости

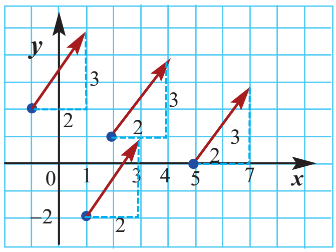
Пример 1. Напишите вектор $\vec{z}$, начальная точка которого $(-2; 3)$, конечная $(3; 7)$ в виде $\vec{z} = \langle a; b\rangle$.

Решение: Напишем вектор с компонентами: $\vec{z} = \langle x_2 - x_1; y_2 - y_1\rangle$

$$\vec{z} = \langle 3-(-2)\,;\, 7-3\rangle = \langle 5; 4\rangle$$

Пример 2. Точка $(2; 3)$ начальная точка вектора $\vec{a}\,\langle 3, 6\rangle$. Найдите координаты конечной точки этого вектора.

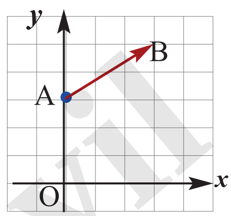
Решение: Примем за координаты конечной точки вектора $\vec{a}$ - точку $(x; y)$: Тогда $\langle x-2; y-3\rangle = \langle 3; 6\rangle$, $x-2=3$, $x=5$; $y-3=6$, $y=9$
Конечная точка этого вектора $(5; 9)$



Пример 3. В координатной плоскости нарисуйте несколько векторов равных вектору $\langle 2; 3\rangle$ начальными точками которых являются точки $(-1\,; 2)$, $(2; 1)$, $(1; -2)$, $(5; 0)$.

Решение: Данные точки отмечаются на координатной плоскости. Начиная с этих точек изображаются векторы равные $\langle 2; 3\rangle$.

Пример 4. A(0; 3) и B (3; 5) соответственно начальная и конечная точка вектора $\overrightarrow{AB}$. Напишите этот вектор в виде $\overrightarrow{AB} = \langle a; b\rangle$ и найдите длину



$$\overrightarrow{AB} = \langle 3-0\,; 5-3\rangle = \langle 3; 2\rangle \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$$

Обучающие задания

1 a) P и Q соответственно - начальная и конечная точки вектора $\overrightarrow{PQ}$. Напишите вектор $\overrightarrow{PQ}$ с компонентами и найдите длину.

1) P(0; 0), Q(3; 4) 2) P(–5; 1), Q(7; 6) 3) P(–4; –3), Q(2; –7)

4) P(5; 4), Q(–1; –4) 5) P(6; 3), Q(–2; 1) 6) P(–6; 0), Q(–5; –4)

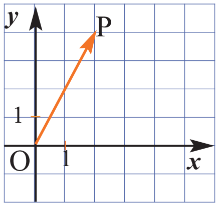
b) Даны точки A(–1 ; 2), B(3; –4), C(5; 6). Напишите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BA}$ с компонентами.

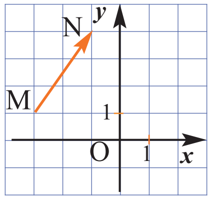
2 Аслан прошел 2 км в восточном направлении, и 1 км в северном направлении. А Рашид прошел 1 км на север, и еще 2 км на восток. Обоснуйте предположение, что Аслан и Рашид преодолели одинаковый путь.

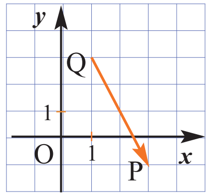
3 На координатной плоскости изобразите несколько векторов с компонентами $\langle 4; 2\rangle$, начальными точками которых будут точки $(-2; 1)$, $(0; 2)$, $(3; -2)$, $(0; 0)$.

Векторы в координатной плоскости

4 Выразите вектора через компоненты, изображенные на координатной плоскости.

a)


b)


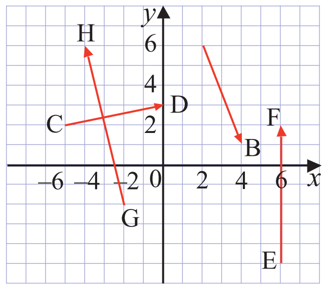
c)


5 Вектора изображенные на координатной плоскости:

a) выразите координатами начальной и конечной точек.

b) выразите через компоненты.

c) найдите модуль



6 По данным найдите координаты конечной точки вектора.

1) Вектор с компонентами: $\vec{a}\langle 1; 3\rangle$,

Координаты начальной точки: a) (2; 3); b) (0; 0); c) (–1; 3)

2) Вектор с компонентами: $\vec{a}\langle -2; 0\rangle$,

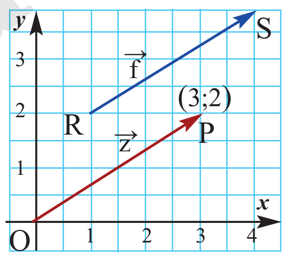
Координаты конечной точки: a) (3; 1); b) (5; 0); c) (3; 1)

Прикладные задания

7 Скорость автомобиля можно выразить вектором направленным из точки P(1; 1) в точку Q(4; 5). В координатной плоскости приняв одно деление за 10 км/ч, найдите скорость автомобиля.

8 Вектор $\overrightarrow{OP}$ направлен из точки (0; 0) в точку (3; 2), а вектор $\overrightarrow{RS}$ из точки (1; 2) в точку (4; 4). Покажите равенство этих векторов.

Указание: Покажите равенство соответствующих компонентов векторов.



9 По компонентам вектора найдите его длину.

a) $\langle 5{,}1;\ 6{,}8\rangle$ b) $\langle -8;\ -6\rangle$ c) $\langle 12;\ -16\rangle$

10 A - начальная, а B - конечная точки вектора. Найдите угловой коэффициент прямой, содержащей этот вектор.

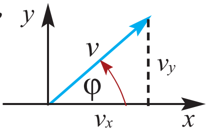
a) A(3, 2), B(–1; 4) b) A(–4; 3), B(2; –1) c) A(1 ; 3), B(2; –1)

Направление вектора

Направление вектора

В соответствии с областями применения, существуют различные способы определения направления вектора. В повседневной жизни мы выражаем направление словами налево, направо, вниз, вверх или же восток, запад, север, юг. На координатной плоскости направление вектора определяется углом с положительным направлением оси Ox против часовой стрелки. Этот угол назовем **углом наклона**.

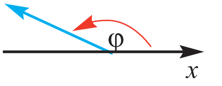
На рисунке длина вектора $\vec{v} = \langle v_x;\ v_y \rangle$ обозначена $|\vec{v}| = v$, а угол определяющий направление через φ.



длина вектора: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

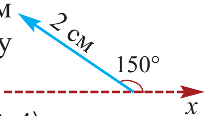
направление вектора: $\text{tg}\varphi = \dfrac{v_y}{v_x}$ или $\cos\varphi = \dfrac{v_x}{v}$

Иногда для простоты вектор изображается на плоскости только указанием положительного направления Ox.



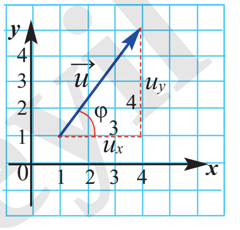
Пример 1. Вектор перемещения, модуль которого 200 м, направлен под углом наклона 150°. Выбрав масштаб 1 см : 100 м нарисуйте этот вектор.

Решение: От начала луча, образующий с положительным направлением оси Ox угол в 150°, соответственно масштабу 1 см : 100 м линейкой отложим отрезок длиной 2 см.



Пример 2. Определите длину и угол наклона вектора $\vec{u}\langle 3; 4\rangle$

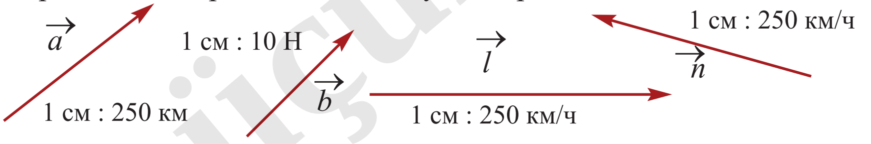
Решение: Произвольную точку на координатной плоскости примем за начало вектора. От этой точки по горизонтальной оси отложим компоненту u_x равную 3 единицам, по вертикальной оси отложим компоненту u_y равную 4 единицам и построим вектор $\vec{u}$ как показано на рисунке. Если измерить транспортиром угол φ, то можно увидеть, что его приближенное значение равно 53°. Это можно проверить вычислениями.



Длина вектора: $\vec{d} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ Угол наклона: $\text{tg}\varphi = \dfrac{4}{3}$, $\varphi \approx 53°$

Обучающие задания

1 Произведя измерения с помощью транспортира и линейки, определите направление и длину векторов.



2 С помощью линейки и транспортира нарисуйте заданные вектора.

Длина:	Направление:	Масштаб:
5 км	20°	1 см : 1 км
200 км	170°	1 см : 50 км
1200 м	150°	? см : ? км

3 Данные вектора нарисуйте на координатной плоскости и определите направление.

a) $\langle 5; 5\rangle$ b) $\langle 5; 1\rangle$ c) $\langle -1; 1\rangle$ d) $\langle -6; 8\rangle$

4 На координатной плоскости нарисуйте соответствующие вектора.

a) Скорость корабля, движущегося под углом 60°, равна 60 км/час.

b) Скорость автомобиля, движущегося под углом 0°, равна 80 км/час.

c) Перемещение всадника под углом 70° равно 16 км

d) Сила, действующая на тело под углом 145°, равна 100 Н .

5 P - начальная точка вектора, Q - конечная. Определите длину и направление вектора.

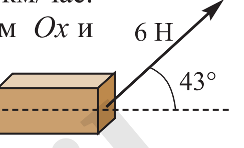
a) P(0; 0), Q (–3; 2) b) P(1 ; –1), Q (–2; 3)

c) P(4; 2), Q (1; 3) d) P(0; 4), Q (2; 6)

6 a) Снаряд выпушенный из пушки со скоростью 925 м/сек летел под углом 15°. Запишите соответствующий вектор с компонентами.

b) Корабль двигается под углом 60° со скоростью 75 км/час. Определите скорость корабля по отношению к осям *Ox* и *Oy,* другими словами, к востоку и северу.

c) Запишите, изображенный на рисунке вектор с компонентами.



7 Какое из утверждений верно, а какое неверно?

a) Если $\vec{a} = \vec{b}$ то, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

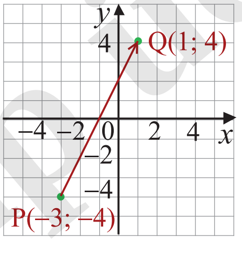
b) Если $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ то, $\vec{a} = \vec{b}$

8 **Математическая запись.** a) Точка (1; 2) - начальная точка вектора $\vec{d}$, а точка (5; –1) - конечная. Точка (5; –1) -начальная точка вектора $\vec{f}$, а (1; 2) - конечная. Напишите, чем схожи и чем отличаются эти векторы.

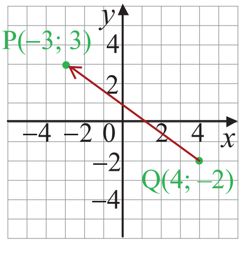
9 Запишите вектор с компонентами, длина которого равна длине вектора $\overrightarrow{KL}\langle 1; 3\rangle$, но противоположна по направлению. Объясните как вы это определили.

10 Определите модуль и направление векторов.

a)



b)



Сложение и вычитание векторов

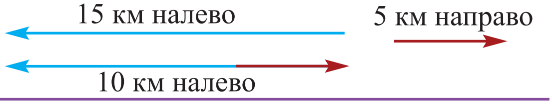
Сложение и вычитание коллинеарных векторов

Вектор, показывающий сумму одинаково направленных коллинеарных векторов называется результирующим. Его абсолютная величина равна сумме абсолютных величин данных векторов, а сам вектор имеет одинаковое направление с данными векторами.

$|15| + |5| = 20$ км направо

Абсолютная величина результирующего вектора 2-х противоположно-направленных коллинеарных векторов, равна разности абсолютных величин этих векторов, а направление совпадает с направлением вектора большего по абсолютной величине.

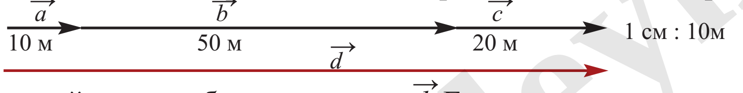
$|15| - |-5| = 10$ км налево



Выполним графически сложение векторов соотвестсвующее реальным жизненным ситуациям.

Задача 1. Для того, чтобы достичь финиша Джамиля должна пройти 3 знака. Если она пройдет 10 м на восток, то доберется до 1-го знака, потом пройдя 50 м вперед до 2-го знака и пройдя в том же направлении еще 20 м сможет добраться до финиша. Изобразите движение Джамили графически - векторами. Выберем масштаб:

1 см : 10 м и на числовой оси нарисуем векторы так, чтобы начало второго вектора совпало с концом первого, а начало третьего с концом второго.



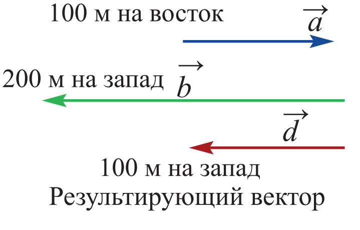
Результирующий вектор обозначим через $\vec{d}$. Его длину можно выразить как: $|\vec{d}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$

Общее перемещение: 10 м + 50 м + 20 м = 80 м (на восток)

Изображается вектор $\vec{d}$, длиной 8 см согласно выбранному масштабу.

Задача 2. Представьте, что вы прошли 100 м на восток, еще 200 метров на запад.

Нарисуем данные вектора в масштабе 1 см : 50 м. По определению, модуль результирующего вектора равен разности модулей векторов. А направление будет на запад.



В этом случае длина результирующего вектора $\vec{d}$ равна: $|\vec{d}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$

200 м – 100 м = 100 м (на запад)

Сложение и вычитание векторов

Сложение и вычитание коллинеарных векторов

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направленные, а $\vec{r}$ их результирующий вектор. При $|\vec{a}| > |\vec{b}|$, $|\vec{r}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$ и вектор $\vec{r}$ одинаково направлен с вектором $\vec{a}$.

При $|\vec{a}| < |\vec{b}|$, $|\vec{r}| = |\vec{b}| - |\vec{a}|$ и вектор $\vec{r}$ одинаково направлен с вектором $\vec{b}$.

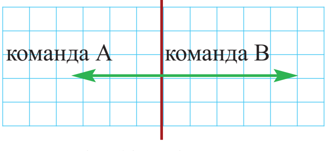
При $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $|\vec{r}| = \vec{0}$, то есть сумма противоположных векторов равна $\vec{0}$ вектору.

Для того, чтобы найти разность $\vec{u} - \vec{v}$, нужно к вектору $\vec{u}$ прибавить вектор $-\vec{v}$, противоположный вектору $\vec{v}$

То есть выражения $\vec{u} - \vec{v}$ и $\vec{u} + (-\vec{v})$ эквивалентные.

Обучающие задания

1 В игре изображенной на рисунке приложенные силы выражаются векторами. Направления векторов показывают направления сил прилагаемых к веревке командами. На рисунке показаны силы приложенные к веревкам в двух раундах.



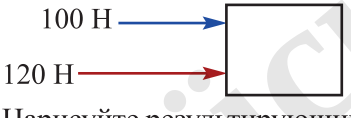
центральная линия

центральная линия

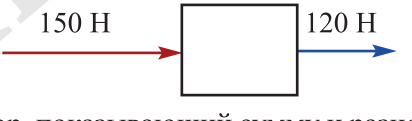
По векторам, выразите свое мнение по поводу результатов 1-го и 2-го раундов.

2 Определите направление и модуль результирующей силы.

a) Чтобы перетащить шкаф, два человека толкают его в одном направлении, при этом одни из них прикладывает силу 100 Н, а другой – 120 Н.



b) Чтобы переместить шкаф один из двух людей с силой в 150 Н толкает шкаф вперед, а другой с силой в 120 Н тянет в том же направлении.



3 Нарисуйте результирующий вектор, показывающий сумму и разность векторов на рисунке.

a) $\xrightarrow{2\text{ км}} + \xrightarrow{2\text{ км}}$ 1 см : 1 км

b) $\xrightarrow{40\text{ км/час}} + \xleftarrow{60\text{ км/час}}$ 1 см : 20 км/час

c) $\xrightarrow{20\text{ Н}} - \xleftarrow{15\text{ Н}}$ 1 см : 5 Н

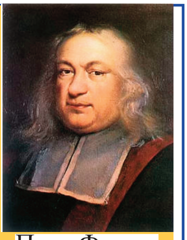
d) 1 см : 4 Н

12 Н $\uparrow$ + $\downarrow$ 12 Н

Сложение и вычитание векторов

Рене Декарт

Жившие в XVII веке ученые-математики Рене Декарт и Пьер Ферма взаимосвязывая алгебру и геометрию создали новую область науки-аналитическую геометрию. Аналитическая геометрия, благодаря методу координат, позволила с одной стороны, посредством алгебраических выкладок легко доказывать геометрические теоремы, а с другой стороны в силу наглядности геометрических представлений упрощает решение задач над векторами.



Пьер Ферма

Сложение векторов

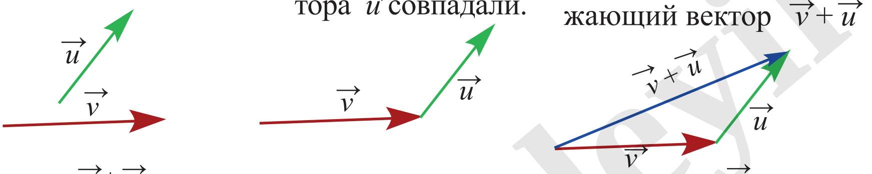
Существуют различные способы сложения неколлинеарных векторов. Рассмотрим два графических способа. При сложении векторов графическим способом данные вектора и результирующий вектор, показывающий их сумму строятся с помощью линейки (модуль) и транспортира (направление).

1) Правило треугольника (многоугольника)

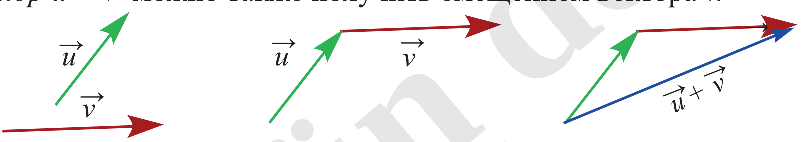
1) Даны: векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$

2) Вектор $\vec{u}$ переместить таким образом, чтобы конечная точка вектора $\vec{v}$ и начальная точка вектора $\vec{u}$ совпадали.

3) Объединим начальную точку вектора $\vec{v}$ с конечной точкой вектора $\vec{u}$. Этот вектор результирующий вектор, выражающий вектор $\vec{v}+\vec{u}$

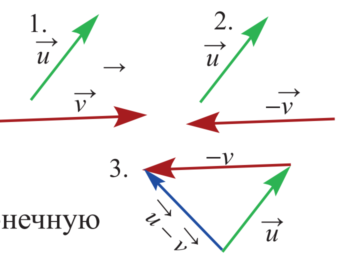


Вектор $\vec{u}+\vec{v}$ можно также получить смещением вектора $\vec{v}$.



Вектора можно складывать в любой последовательности. Переместительное свойство сложения верно и для векторов. По этому правилу можно складывать три и более вектора.

Определим графическим способом вектор $(\vec{u}-\vec{v})$. Для этого: 1) нарисуем вектор $-\vec{v}$ противоположный вектору $\vec{v}$; 2) $-\vec{v}$ переместим так, чтобы конечная точка вектора $-\vec{v}$ совпадала с начальной точкой вектора $\vec{u}$.



3. Соединим начальную точку вектора $\vec{u}$ и конечную точку вектора $-\vec{v}$. Это будет вектор $\vec{u}-\vec{v}$.

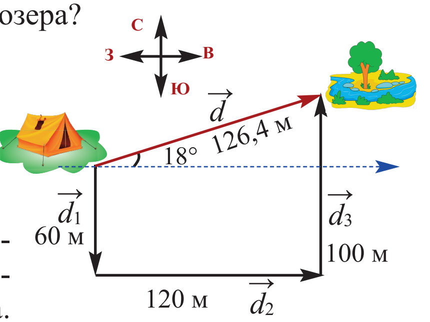
Сложение и вычитание векторов

Пример 1. Джамал прошел от палатки, разбитой в лагере 60 метров на юг, 120 м на восток, еще 100 м на север и дошел до озера. Какое наименьшее расстояние от палатки до озера?

Решение:

Выберем масштаб: 1 см : 40 м

Движение Джамала изобразим последовательно соответствующими векторами по выбранному масштабу.



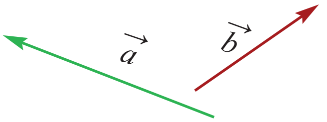
Начальную точку 1-го вектора, показывающего движение Джамала, соединим с конечной точкой 3-го вектора. Полученный результирующий вектор $\vec{d}$ выражает сумму векторов $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ и $\vec{d_3}$. Длина этого вектора приблизительно 126,4 метров, а направление под углом 18°.

Ответ: Озеро находится на расстоянии 126,4 м от палатки

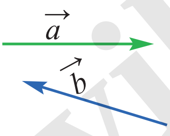
Решите задачи путем измерения и построения используя транспортир и линейку.

4 1) Вектора, данные на рисунке в заданном масштабе, перерисуйте в тетрадь и постройте вектор $\vec{a} + \vec{b}$. Определите модуль и направление.

Масштаб 1 см : 3 км

a) 

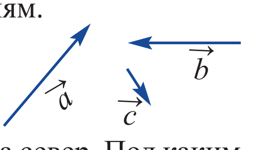
Масштаб 1 см : 1 км

b) 

5 Перемещение на 5 метров в северном направлении на плане изображено отрезком длиной 6 см. Нарисуйте вектор, показывающий перемещение на 20 м в северном направлении, в соответствии с заданным масштабом.

6 Пользуясь векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ изображенными на рисунке, нарисуйте векторы, соответствующие следующим выражениям.

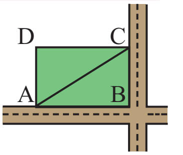
a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ b) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$ c) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$



7 Эльмар прошел в парке 4 км на запад, и еще 3 км на север. Под каким углом и на сколько километров Эльмар удалился от точки, из которой он начал движение?

8 Корабль проплыл по направлению на юг 25 км, затем, изменив направление, взял курс на восток и проплыл еще 40 км. Далее он проплыл в северном направлении еще 15 км и достиг маяка. Выберите масштаб и изобразите вектор, показывающий перемещение корабля до маяка.

Сложение и вычитание векторов

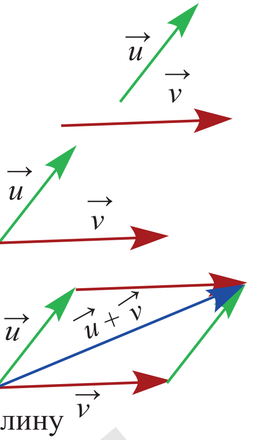


Исследование. Представьте, что вы должны пройти в парке из точки A в точку C. Предположим, что для этого вы выбрали 3 различных способа:

1) Из точки A в точку B, а оттуда в точку C.
2) Из точки A в точку D, а оттуда в точку C.
3) Из точки A в точку C.

Для каждого из перемещений запишите соответсвующие вектора.

Правило параллелограмма



1. Даны вектора: u и v

2. Переместим вектор $\vec{v}$ так, чтобы начальные точки векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ совпадали.

3. Построим параллелограмм со сторонами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ параллельным переносом соответствующих векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Диагональ этого параллелограмма, которая соединяет начальную и конечную точку векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, показывает их сумму: $\vec{u}+\vec{v}$

С помощью линейки и транспортира определите длину и направление построенного результирующего вектора.

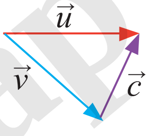
Найдите результирующий вектор по правилу параллелограмма, проводя измерения и построения, используя линейку и транспортир.

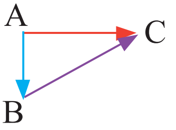
9 В определенном масштабе изобразите перемещение с заданной длиной в виде вектора. Выполните сложения векторов по правилу параллелограмма.

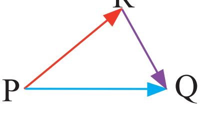
a) 1,5 км под углом 180° и 3 км под углом 45°
b) 2,5 км под углом 80 и 5 км под углом 15°
c) 4 км под углом 120° и 2 км под углом 30°

10 Самолет летит на север со скоростью 850 км/час. Как изменится скорость и направление самолета под воздействием западного ветра скорость которого 50 км/час? Начертите соответствующую схему.

11 Вектор наименьшей длины, представьте в виде суммы или разности двух других векторов.

a) 

b) 

c) 

Сложение и вычитание векторов

Переместительное и сочетательное свойства сложения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно следующие:

Переместительное свойство: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Сочетательное свойство: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Свойство идентичности: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

Сумма противоположенных векторов: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Пример 1. $(\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u} = (\vec{v} + \vec{u}) - \vec{u} =$ *переместительное свойство*

$= (\vec{v} + \vec{u}) + (-\vec{u}) =$ *складывается с противоположным*

$= \vec{v} + (\vec{u} + (-\vec{u})) =$ *сочетательное свойство*

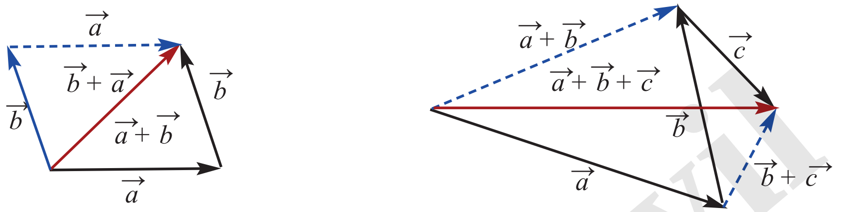
$= \vec{v} + \vec{0} =$ *складывается с суммой противоположных векторов*

$= \vec{v}$ *свойство идентичности*

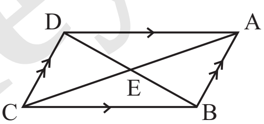
12 Измерьте рисунки и перечертите их в тетради.

a) При сложении векторов примените переместительное и сочетательное свойства

b) Для каждого свойства приведите еще один пример



13 ABCD параллелограмм, E - точка пересечения диагоналей. Запишите вектора, соответствующие каждому выражению:



a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$

b) $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$

e) $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{BC}$

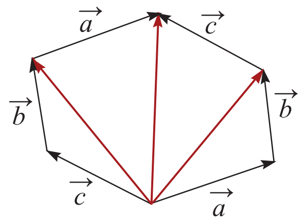
f) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$

g) $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DC}$

h) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

i) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC}$

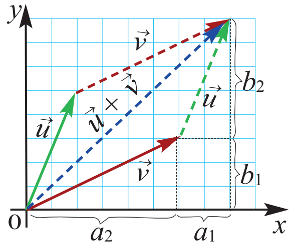
14 Выделенные красным цветом векторы выразите различными способами в виде суммы векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Используйте свойства сложения векторов.



Сложение и вычитание векторов

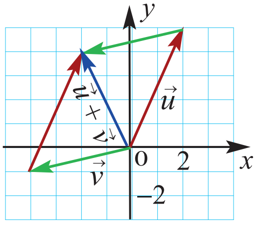
Сложение векторов, заданных компонентами

Выполним сложение двух векторов на координатной плоскости используя их компоненты.



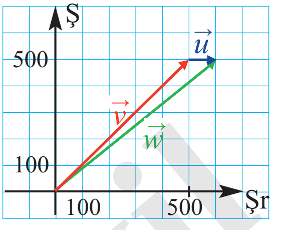
Суммой векторов $\vec{u}=\langle a_1;\, b_1\rangle$ ***и*** $\vec{v}=\langle a_2;\, b_2\rangle$ ***будет вектор:*** $\vec{u}+\vec{v}=\langle a_1+a_2\,;\; b_1+b_2\rangle$

Пример 1. Если $\vec{u}=\langle 2;\ 5\rangle$ и $\vec{v}=\langle -4;\ -1\rangle$, то вектор $\vec{v}+\vec{u}$ выразите через компоненты.



Решение: Для того, чтобы найти компоненты вектора $\vec{v}+\vec{u}$ нужно по горизонтали (оси абсцисс) и по вертикали (оси ординат) сложить соответствующие компоненты векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$
$\vec{u}+\vec{v}=\langle 2+(-4);\ \ 5+(-1)\rangle=\langle -2;\ 4\rangle$

Пример 2. Самолет летит в направлении северо-востока со скоростью 707 миль/час. Скорость самолета выражается вектором $\vec{v}=\langle 500;\ 500\rangle$. В восточном направлении дует ветер со скоростью 40 миль/час. Скорость ветра выражается вектором $\vec{u}=\langle 40;\ 0\rangle$. Как изменится скорость самолета под воздействием ветра?



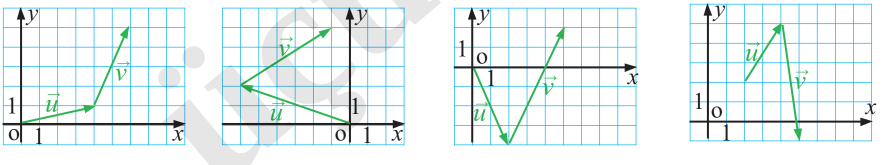
$\vec{w}=\vec{v}+\vec{u}=\langle 500+40;\ 500+0\rangle=\langle 540;\ 500\rangle$

Конечная скорость самолета: $|\vec{w}|=\sqrt{540^2+500^2}\approx 736$ миль/час

Аналогично можно показать, что $\vec{u}-\vec{v}=\langle a_1-a_2\,;\ b_1-b_2\rangle$

Пример 3. Если $\vec{u}=\langle 2;\ 5\rangle$ и $\vec{v}=\langle -5;\ -1\rangle$ то,
$\vec{u}-\vec{v}=\langle 2-(-5);\ \ 5-(-1)\rangle=\langle 7;\ 6\rangle$

15 Перечертите в тетрадь изображения векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Каждый из этих векторов запишите с компонентами. Найдите вектор, выражающий сумму $\vec{u}+\vec{v}$ и нарисуйте его.

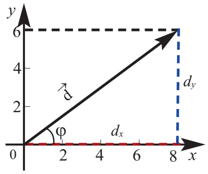


16 Самолет выполняет полет со скоростью 650 км/ч в восточном направлении. Через некоторое время начал дуть юго-восточный ветер под углом 45° со скоростью 80 км/час. На сколько километров, каждый час, ветер будет удалять самолет от восточного направления?

Компоненты вектора и тригонометрические отношенеия

Тригонометрические отношения и компоненты вектора

Найдем компоненты вектора $\vec{d} = \langle d_x;\ d_y \rangle$ в координатной плоскости используя тригонометрические отношения. Обозначим $|\vec{d}| = d$

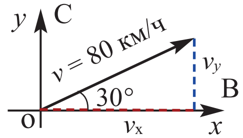


$\cos\varphi = \dfrac{d_x}{d}$ $\qquad \sin\varphi = \dfrac{d_y}{d}$

$d_x = d\cos\varphi$ $\qquad d_y = d\sin\varphi$ $\quad$ имеем: $\vec{d} = \langle d\cos\varphi;\ d\sin\varphi \rangle$

Запись $\vec{d} = \langle d\cos\varphi;\ d\sin\varphi \rangle$ также является записью вектора с компонентами. Угол наклона можно найти по формуле $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{d_y}{d_x}$

Пример 1. Автомобиль движется в северо-восточном направлении под углом 30° со скоростью 80 км/ч. Напишите вектор скорости с компонентами.



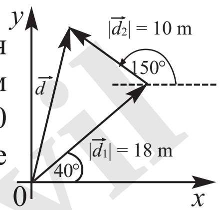
Решение: По данным $|\vec{v}| = 80$ (км/ч), $\varphi = 30°$

$\vec{v} = \langle v_x;\ v_y \rangle = \langle v\cos\varphi;\ v\sin\varphi \rangle = \langle 80\cos 30°;\ 80\sin 30° \rangle$

скорость в вост. напр. $\quad v_x = v\cos\varphi = 80\cdot\cos 30° = 80\cdot 0{,}87 \approx 69{,}6$ км/час

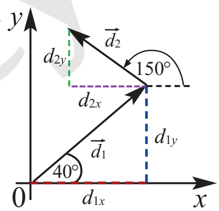
скорость в север. напр. $\quad v_y = v\sin\varphi = 80\cdot\sin 30° = 80\cdot 0{,}5 = 40$ км/час

Пример 2. Движение мяча изображены двумя векторами: $\vec{d_1}$ с углом наклона 40° и модулем равным 18 м и $\vec{d_2}$ с углом наклона 150° и модулем равным 10 м. Определите вектор, показывающий перемещение мяча (модуль и направление).



Решение: Перемещение мяча: $\vec{d} = \vec{d_1} + \vec{d_2}$

Запишем векторы $\vec{d_1}$ и $\vec{d_2}$ с компонентами:



$\vec{d_1} = \langle d_{1x};\ d_{1y} \rangle = \langle 18\cos 40°;\ 18\sin 40° \rangle$

$\vec{d_2} = \langle d_{2x};\ d_{2y} \rangle = \langle 10\cos 150°;\ 10\sin 150° \rangle$

Здесь $d_{1x} = 18\cos 40° \approx 13{,}79$; $\ d_{1y} = 18\sin 40° = 11{,}57$;

$d_{2x} = 10\cos 150° = -10\cos 30° \approx -8{,}66$;

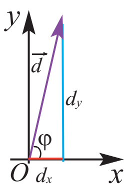
$d_{2y} = 10\sin 150° = 10\sin 30° = 5$

Пусть $\vec{d} = \langle d_x;\ d_y \rangle$.

По правилу сложения векторов, с заданными компонентами имеем:

$d_x = d_{1x} + d_{2x} \approx 13{,}79 + (-8{,}66) = 5{,}13$; $\qquad d_y = d_{1y} + d_{2y} \approx 11{,}57 + 5 = 16{,}57$

Найдем длину и угол наклона вектора перемежения $\vec{d}$ мяча, изобразив этот вектор в новой системе координат.

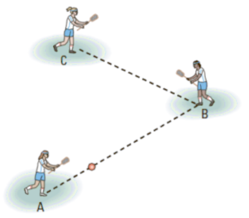


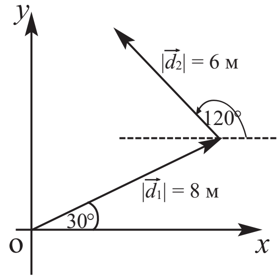
$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} \approx \sqrt{5{,}13^2 + 16{,}57^2} \approx 17{,}35 \text{ (м)}$$

$$tg\,\varphi = \frac{d_y}{d_x} \approx \frac{16{,}57}{5{,}13} \approx 3{,}23\ ; \qquad \varphi \approx 73°$$

Компоненты вектора и тригонометрические отношенеия

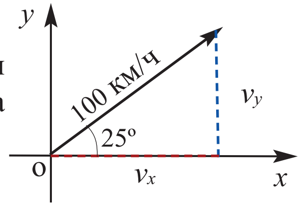
1 Движения мяча изображены на координатной плоскости векторами. Составьте и решите задачу, подобную примеру 2, по рисунку и изображенным векторам.





2 Всадник прошел 40 метров на запад, затем 30 метров на север. Определите модуль и направление вектора, показывающего перемещение всадника.

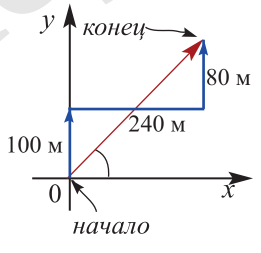
3 Используя тригонометрические отношения запишите вектор скорости $\vec{v}$ изображенный на рисунке компонентами.



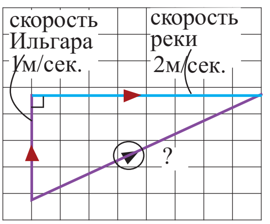
4 Запишете вектор $\vec{R}$ с компонентами в виде $\langle R_x; R_y \rangle$, соответствующий каждому случаю:

a) вектор, показывающий скорость корабля плывущего со скоростью 20 км/ч в северо-восточном направлении под углом 45°;
b) вектор, показывающий скорость самолета, летящего со скоростью 300 км/ч в западном направлении;
c) вектор, показывающий скорость велосипедиста движущегося со скоростью 10 км/ч в северном направлении.

5 Представьте, что вы двигались 100 м на север, 240 м на восток и снова 80 м на север. На сколько метров вы удалились от начальной точки движения?

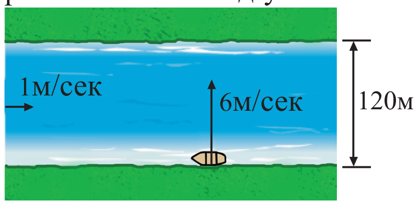


6 Ильгар плывет по реке в перпендикулярном направлении к берегу со скоростью 1 м/сек. Если скорость течения реки 2 м/сек, а ширина 40 метров, найдите:
a) время за которое Ильгар переплывет реку;
b) расстояние, которое переплывет Ильгар.
c) под каким углом по отношению к берегу Ильгар переплывет реку?



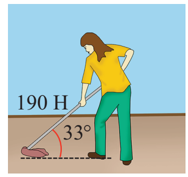
Решение задач с применением векторов

1 Лодка находится на берегу реки шириной в 120 м под углом 90º к берегу. Скорость лодки в стоячей воде 6 м/сек, скорость течения реки 1м/сек:

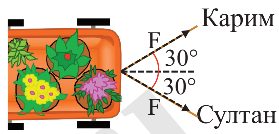


a) сколько времени потребуется лодке, чтобы переплыть реку?
b) на сколько метров течение реки снесет лодку вниз от места назначения?
c) под каким углом по отношению к берегу будет двигаться лодка.

2 Гюльнар, подметая пол, прикладывает к венику силу 190 Н под углом 33º. Найдите модули горизонтальной и вертикальной компонент приложенной силы.



3 Карим и Султан тянут дачную повозку. Оба тянут повозку с одинаковой силой под углом 30º.

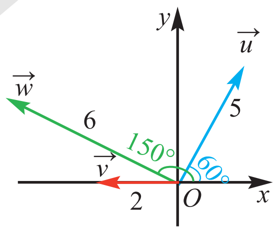


a) Если результирующая сила обеих сил равна 170 Н, то какую силу приложил каждый из них?

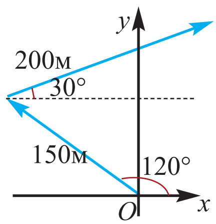
b) Если сила, приложенная каждым будет 70 Н, то чему будет равна результирующая этих сил?

c) Если Карим и Султан приблизятся друг к другу, то как изменится результирующая сила?

4 По данным рисунка запишите вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ с компонентами.



5 Лыжник преодолел путь сначала 150 м под углом 120º, а потом 200 м под углом 30°. Найдите перемещение лыжника.

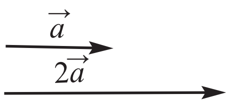


Умножение вектора на число

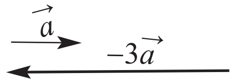
Умножение вектора на число

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k ($k \in R$) записывается как $k \cdot \vec{a}$, а его длина равна $|k| \cdot |\vec{a}|$, при $k > 0$ вектора $k \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ имеют одинаковое направление, при $k < 0$ вектора $k \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ имеют противоположное направление.

1) Вектор $2\vec{a}$ на рисунке, получен из вектора $\vec{a}$ увеличением длины в 2 раза. Эти вектора одинаково направленные.



2) На рисунке изображены вектора $\vec{a}$ и $-3\vec{a}$. Эти вектора противоположно направленные.



Любой вектор коллинеарен вектору, выражающему произведение этого вектора на число (отличное от нуля). Если $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b}$ коллинеарные векторы, то существует единственное число k, что $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$

Свойство умножения вектора на число.

1. Сочетательное свойство.

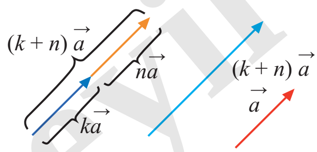
Для любых чисел k и n ($k \in R$, $n \in R$) и вектора $\vec{a}$

$(kn) \cdot \vec{a} = n\,(k \cdot \vec{a})$

2. Распределительное свойство.

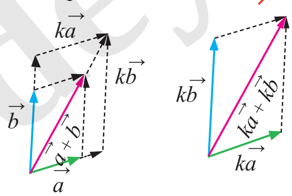
Для любых чисел k и n (k, $n \in R$) и вектора $\vec{a}$

$(k + n)\vec{a} = k\vec{a} + n\vec{a}$



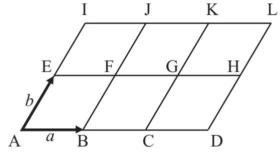
Для любого числа k ($k \in R$) и векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$(\vec{a} + \vec{b})\,k = k\vec{a} + k\vec{b}$



Обучающие задания

1 Картина состоит из конгруэнтных параллелограммов. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на сторонах параллелограмма. Выразите следующие вектора через $\vec{a}$ и $\vec{b}$:



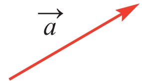
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{KC}$ c) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL}$ d) $\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IE}$

Умножение вектора на число

2 Модуль вектора под углом 30º равен v = 400 км/час. Выберите масштаб и начертите в тетради следующие вектора.

a) $2\vec{v}$ b) $-3\vec{v}$ c) $0{,}5\vec{v}$ d) $-5\vec{v}$

3 С помощью линейки и транспортира нарисуйте в тетради вектор $\vec{a}$. Геометрически покажите справедливость равенства $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ для следующих значений k и m.



a) $k = 2$ и $m = 2$ b) $k = -3$ и $m = 2$ c) $k = -2$ и $m = -1$

4 Выскажите свое мнение о векторах $\vec{u}$ и $\vec{v}$ согласно следующей информации.

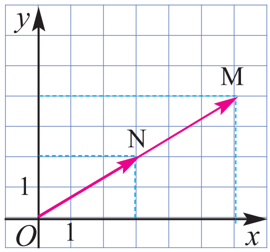
a) $2\vec{u}=4\vec{v}$ b) $\vec{u}-\vec{v}=0$ c) $4(\vec{u}+\vec{v})-3(\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}+2\vec{v}$

5 Выполните задания по рисунку.

1) Запишите вектор $\overrightarrow{ON}$ с компонентами и вычислите длину.

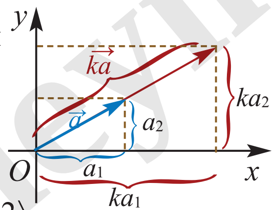
2) Запишите вектор $\overrightarrow{OM}$ с компонентами и вычислите длину.

3) Сравните длины и соответствующие компоненты векторов $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$.



Действия гад векторами заданным над координатами

Для вектора $\vec{a}\langle a_1; a_2\rangle$ заданного компонентами и для любого числа k верно: $k\vec{a}=\langle ka_1; ka_2\rangle$



Пример 1: Если $\vec{a}=\langle -2; 5\rangle$, $2\vec{a}=\langle -4; 10\rangle$

Пример 2: Если $\vec{a}=\langle 3; -2\rangle$ и $\vec{b}=\langle -1; 4\rangle$,

$2\vec{a}+3\vec{b}=2\cdot\langle 3; -2\rangle+3\cdot\langle -1; 4\rangle=\langle 6; -4\rangle+\langle -3; 12\rangle=$
$=\langle 6+(-3); -4+12\rangle=\langle 3; 8\rangle$.

• Соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

• Наоборот, если соответствующие координаты векторов пропорциональны, то эти векторы коллинеарные.

Условие коллинеарности векторов $\vec{a}\langle a_1; a_2\rangle$ и $\vec{b}\langle b_1; b_2\rangle$, (при $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$)

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$$

Пример 3: При каком значении m, векторы $\vec{b}\langle -1; 4\rangle$ и $\vec{a}\langle 3; m\rangle$ коллинеарны? $\frac{-1}{3}=\frac{4}{m}\Rightarrow m=-12$

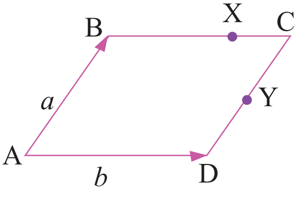
6 Если $\vec{a} = \langle 2\,;\,3\rangle$ и $\vec{b} = \langle -4;\,5\rangle$ запишите вектора с компонентами:
a) $2\vec{a} + 3\vec{b}$ b) $\vec{a} + 2\vec{b}$ c) $3\vec{a} - 2\vec{b}$

7 a) Если $\vec{a} = \langle -6;\,2\rangle$ и $\vec{b} = \langle 2;\,-4\rangle$, найдите длину вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$.
b) Если $\vec{c} = \langle 2;\,3\rangle$ и $\vec{d} = \langle 1;-3\rangle$, найдите длину вектора $3\vec{c} - \vec{d}$.

8 Покажите вектора, коллинеарные вектору $\vec{f} = \langle 2\,;\,-3\rangle$.
a) $\vec{a} = \langle 4\,;\,6\rangle$ b) $\vec{b} = \langle 1\,;\,-1{,}5\rangle$ c) $\vec{c} = \langle -4\,;\,6\rangle$ d) $\vec{d} = \langle -2\,;\,-3\rangle$

9 При каких значениях k векторы коллинеарны?
a) $\vec{a} = \langle 2\,;\,-3\rangle$ и $\vec{b} = \langle k;\,9\rangle$ b) $\vec{a} = \langle 3\,;\,k\rangle$ и $\vec{b} = \langle k;\,12\rangle$

10 В параллелограмме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Точка X расположена на стороне BC так, что $BX = 3\cdot XC$, а точка Y делит сторону CD пополам. Выразите следующие вектора через $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



1) $\overrightarrow{BD}$ 2) $\overrightarrow{AX}$ 3) $\overrightarrow{BY}$ 4) $\overrightarrow{DY}$

5) $\overrightarrow{AC}$ 6) $\overrightarrow{AY}$ 7) $\overrightarrow{DX}$ 8) $\overrightarrow{XY}$

Прикладные задания

11 По закону Ньютона гравитационная сила $\vec{F}_g$ (в ньютонах) равна произведению массы тела (в кг) гравитационному ускорению (м/сек²): $\vec{F}_g = m\vec{g}$. Эта сила называется весом тела и записывается в виде $\vec{P} = m\vec{g}$. Гравитационное ускорение на Земле равна 9,8 м/сек², а на Луне 1,6 м/сек².
a) Найдите вес тела массой 60 кг на Земле и на Луне.

12 **Вопрос открытого типа.** На координатной плоскости нарисуйте вектор, начальной точкой которого будет начало координат и отметьте координаты конечной точки. Выберите какое-либо число k и нарисуйте вектор $k\vec{a}$, полученный произведением этого числа на вектор $\vec{a}$. Напишите координаты конечной точки этого вектора. Нарисуйте еще три вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ и выбрав одинаковое число k нарисуйте вектора, полученные из произведения этих векторов на k.

13 Даны точки A (–3; 1) и B (6; 7). Найдите координаты точки C делящей отрезок AB в отношении: AC : CB = 1 : 2.

Указание: Используйте равенство $\overrightarrow{AB} = 3\cdot\overrightarrow{AC}$ и приняв за C $(x; y)$ запишите векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ с компонентами.

14 Даны точки A (1; 1) , B (1; 7), C (7; 7). Найдите точку пересечения медиан треугольника ABC.

Обобщающие задания

1 Даны вектора: $\vec{u} = \langle 6; 2 \rangle$, $\vec{v} = \langle 1; 4 \rangle$, $\vec{d} = \langle 2; 5 \rangle$, и $\vec{z} = \langle -2; -5 \rangle$.
Найдите сумму векторов

a) $\vec{v} + \vec{d}$ b) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $\vec{u} + \vec{d}$
d) $\vec{v} + \vec{z}$ e) $\vec{u} + \vec{z}$ f) $\vec{d} + \vec{z}$

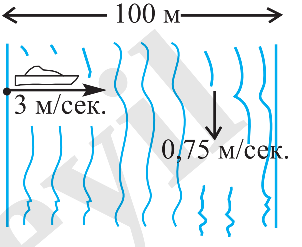
2 По данным координатам точек P(8;–7), Q(–2; 5), R(8; –7), S (7; 0) определите координаты векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$. Обоснуйте какие они: равные, параллельные, противоположные или не являются ни одним из перечисленных.

3 Значение результирующей сил приложенных на тело в вертикальном и горизонтальном направлении равно 40 Н, а угол наклона 22°. Найдите значение сил приложенных на тело.

4 Даны точки M (3; 5) и C (9; 8). Найдите координаты точки K делящей отрезок MC в отношении 2 : 1.

5 Катер движется в стоячей воде со скоростью 3м/сек. Ширина реки равна 100 м, а скорость течения 0,75 м/сек. Начав движение перпендикулярно течению реки, катер плывет на другой берег.

a) Сколько метров в секунду составит скорость катера?
b) Под каким углом катер проплывет реку?
c) За какое время катер проплывет реку?
d) На каком расстоянии от места назначения катер достигнет другого берега?

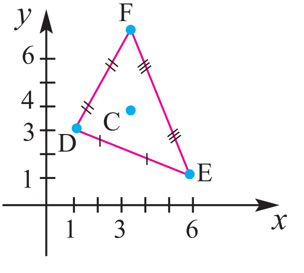


6 По данному значению модуля и угла наклона запишите векторы компонентами.

1) $|\vec{v}| = 12;\ \varphi = 60°$ 2) $|\vec{v}| = 16;\ \varphi = 120°$
3) $|\vec{v}| = 28;\ \varphi = 150°$ 4) $|\vec{v}| = 4,9;\ \varphi = 135°$

7 Рассмотрите предложение $|\vec{a}| + |\vec{b}| \le |\overrightarrow{a+b}|$.
a) Запишите предложение словами; b) Верно или неверно предложение? Ответ обоснуйте.

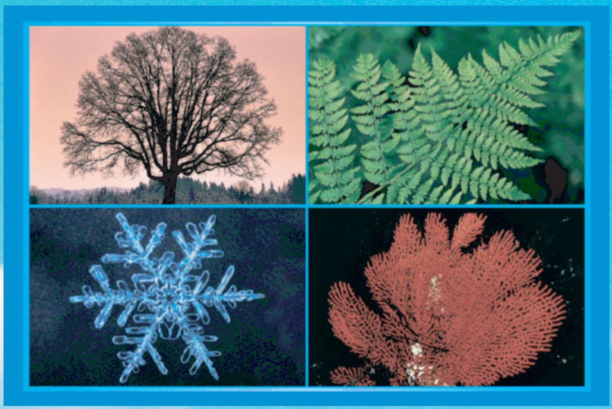
8 Точка пересечения медиан называется центром тяжести треугольника. Точки D(1; 3) и E(6; 1) являются вершинами ΔDEF, C (3; 4) - показывает центр тяжести. Определите координаты вершины F.



Раздел

5

1. Числовые последовательности
2. Геометрические преобразования. Движения



Числовые последовательности

Арифметическая прогрессия

n-ый член арифметической прогрессии

Свойства членов арифметической прогрессии

Сумма n - первых членов арифметической прогрессии

Геометрическая прогрессия

n-ый член геометрической прогрессии

Свойства членов геометрической прогрессии.

Сумма n-первых членов геометрической прогрессии

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$.

Геометрические преобразования. Движение.

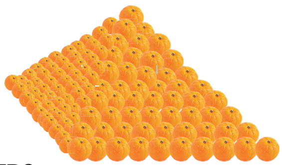
• Параллельный перенос

• Параллельный перенос и векторы

• Движение и конгруэнтные фигуры

Числовые последовательности

Исследование. На полке апельсины собраны слоями таким образом, что в 1-ом ряду 1 апельсин, во 2-ом ряду 4, в 3-ем ряду 9 и.т.д образуют правильную четырехугольную пирамиду.



1) Дополните таблицу, показывающую количество первых пяти слоев апельсинов.

n	1 	2 	3 		
a_n	$1 = 1^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$		

2) Напишите формулу для нахождения количества апельсинов в любом из слоев (a_n, n - показывает номер ряда).
3) По этой формуле найдите количество апельсинов в 4-ом, 7-ом и 10-ом рядах.
4) Изобразите в тетради график, показывающий зависимость количества апельсинов от номера слоя.

Числовые последовательности

♦ Множество чисел в которой каждое число имеет свой номер (n = 1, 2, 3, ...) называется числовой последовательностью. То есть, числовая последовательность это функция определенная во множестве натуральных чисел. Например

$$\begin{matrix} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{matrix}$$

♦ Числа, образующие последовательность, называется соответственно первым, вторым, третьим, четвертым и т.д. членами последовательности. Члены последовательности, обычно обозначаются буквами, индекс буквы показывает порядковый номер члена. Например, первый член a_1, второй член a_2, n -ый член a_n и т.д. Сама последовательность обозначается: (a_n), (b_n) и т.д.

♦ Последовательности бывают конечные и бесконечные. Например, множество двузначных чисел может быть примером конечной последовательности. А последовательность натуральных чисел - бесконечна.

♦ Обычно, последовательность задают с помощью формулы определяющей функцию n-го члена последовательности от номера n. Такую формулу называют формулой n-го члена последовательности.

Например: 2, 4, 6, 8, ... - последовательность четных чисел.Любой член этой последовательности можно найти по формуле $a_n = 2n$. 10-ый член последовательности: $a_{10} = 2 \cdot 10 = 20$

Обучающие задания

1 Напишите следующие два члена последовательности.

a) 1; 3; 5; 7; . . .   b) 1; 10; 100; 1000; . . .   c) –5; 10; –15; 20; . . .

d) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \frac{4}{3}; \ldots$ e) $\frac{1}{10}; \frac{2}{20}; \frac{3}{30}; \frac{4}{40}; \ldots$ f) 1,9; 2,7; 3,5; 4,3;. . .

Числовые последовательности

2 По данной формуле напишите первые пять членов последовательности.

$a_n = n + 1$	$a_n = 3 - n$	$a_n = n^2 + 1$	$f_n = \dfrac{n-1}{n}$
$a_n = (n + 1)^2$	$a_n = (n - 1)^2$	$a_n = n\,(n - 1)$	$f_n = \dfrac{n+2}{2n}$

3 a) Напишите первые семь членов последовательности натуральных чисел, кратных 3.
b) Напишите, в порядке возрастания, первые 5 членов последовательности натуральных чисел при делении которых на 3, в остатке получается 1.

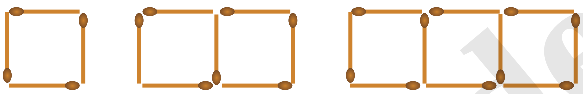
4 a) Какой член последовательности (a_n) :1) следует за членом a_7; a_{72}; a_k; a_{k+4} ? 2) предшествует члену a_6; a_{50}; a_k; a_{2k}?
b) Назовите члены последовательности, располагающиеся между двумя данными членами: 1) b_{11} и b_{15}, 2) b_k и b_{k+3}, 3) b_{n-3} и b_{n+2}

5 1) Последовательность задается формулой $b_n = 2n^2 + 1$. Найдите член последовательности с номером a) 4; b) 5; c) 7; d) $k + 1$
2) В последовательности, заданной формулой $c_n = 4n - 1$ покажите номер члена равного: a) 27; b) 35; c) 71.

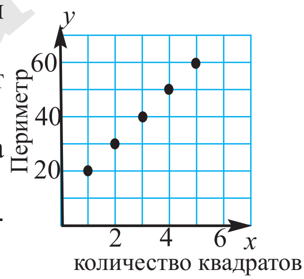
6 1) Последовательность задана формулой $a_n = n^2 - 8n$: Существует ли член равный: a) 20; b) 48; c) –15; d) 0; e) 4?
Если есть, то найдите номер этого члена.

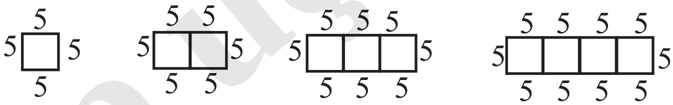
Прикладные задания

7 Сколько спичек будет использовано на 5-ом шаге построения фигуры по правилу, показанному на рисунке. Напишите формулу определяющую количество спичек.



8 Квадраты со сторонами 5 единиц выстраиваются как показано на рисунке рядом друг с другом.
a) Найдите периметр фигуры, которую образуют квадраты на каждом шаге построения
b) найдите периметр фигуры образованную на n-ом шаге
c) Объясните, что график на рисунке соответствует данной последовательности.

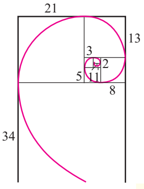




9 Члены последовательности $a_n = 4^n - 1$ кратны 3, а члены последовательности $c_n = 5^n - 1$ кратны 4. Проверьте это для первых пяти членов.

Числовые последовательности

Наблюдается взаимосвязь многих природных явлений с последовательностью Фибоначчи.



Фибоначчи родился в итальянском городе Пиза: Его произведение “Книга вычислений” (Liber Abaci) оказала огромное влияние на распространение математических знаний в Европе, служила учебником - справочником европейских ученых. Особенно неоценима его роль в быстром распространении в Европе индийско-арабской десятичной системы. В то время в Европе при записи и вычислениях пользовались Римскими цифрами. В этом произведении Фибоначчи также уделил большое внимание задаче о размножении кроликов, которая дает последовательность чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Для членов этого ряда (при $n \geq 2$) верно $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$. Продолжите ряд Фибоначчи для последующих трех шагов.

Рекуррентный и экспилитический способы задания последовательности

Формула выражающая любой член последовательности, начиная с некоторого, через один или несколько предыдущих членов называется рекуррентной формулой. (от латинского слова recirro - возвращаться)

Например, в последовательности 3; 6; 12; 24; ... при $a_1 = 3$ то, $a_{n+1} = 2a_n$ - рекуррентная формула и по этой формуле можно продолжить последовательность. Во многих случаях последовательность задается формулой, выражающей n-ый член номером этого члена. Способ задания последовательности формулой n-го члена называется экспилитическим способом.

Например, $a_n = 2^n - 1$: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 7$, $a_3 = 15$, $a_4 = 31$, $a_5 = 63$.

10 Для данной последовательности напишите рекуррентную формулу и формулу n-го члена.

1. Последовательность нечетных натуральных чисел;
2. Последовательность четных натуральных чисел.

11 Напишите первые 5 членов последовательности, заданной рекуррентной формулой

$a_1 = 1,\ a_n = 3a_{n-1} + 2$	$a_1 = a_2 = a_3 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$
$a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1} + 1$	$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

12 **Исследование. Работа в группах. Одна последовательность, две рекуррентные формулы**

a) Воспользуйтесь формулой и напишите четыре члена последовательности, если $a_1 = 11$,.

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{если } a_n \text{ -четное число;} \\ 3a_n + 1 & \text{если } a_n \text{ -нечетное число;} \end{cases}$$

b) Напишите 4 члена последовательности указанном в пункте а) при $a_1 = 6$.

13 Для членов последовательности определите закономерность и напишите еще четыре члена.

a) 3; 6; 4; 8; 6; 12; 10; ... b) 2; 4; 6; 12; 14; ...

Арифметическая прогрессия

Исследование. При конструировании крыши керамиты выстраиваются в определенном порядке. Крыша показанная на рисунке, покрыта керамитами по правилу, показанному в таблице.

Ряд	1	2	3	4	5	6	7	8
Керамит	3	4	5	6	7	8	9	10

1) Найдите разность между количеством керамитов каждого ряда с количеством керамитов последующего ряда. 2) Можно ли найти количество керамитов по рекуррентному и экспилитическому способу? 3) Задайте последовательность количества керамитов по рекуррентному и экспилитическому способами.

Арифметическая прогрессия, рекуррентное правило

Определение. Числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом называется арифметической прогрессией. То есть арифметическая прогрессия - это такая последовательность в которой $a_{n+1} = a_n + d$. здесь d - постоянная для данной последовательности число. Число d называют разностью арифметической прогрессии. Из определения следует, что равенство.
$d = a_{n+1} - a_n$ справедливо для любого натурального числа n. В частных случаях, $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ...$ Арифметическая прогрессия с n-ым членом a_n символически обозначается $\div (a_n)$. Для того чтобы задать арифметическую прогрессию достаточно показать его первый член и разность. Арифметическая прогрессия задается с рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$.

Пример 1. Определите, какие из последовательностей являются арифметической прогрессией.

a) $-6,\ 0,\ 6,\ 12,\ 18,\ 24, \ldots$

$6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6$

последовательность - арифметическая прогрессия, потому что разность между двумя соседними членами остается постоянной

b) $-1,\ -3,\ -6,\ -10,\ -15,\ -21 \ldots$

$-2 \quad -3 \quad -4 \quad -5 \quad -6$

последовательность не является арифметической прогрессией, потому что разность между двумя соседними членами меняется

Разность арифметической прогрессии может быть положительным, отрицательным числом или нулем. При $d > 0$, начиная со второго каждый член будет больше предыдущего (возрастающая последовательность), а при $d < 0$ - меньше предыдущего (убывающая последовательность)

Пример 2. a) При $a_1 = 2$, $d = 3$ соответствующая арифметическая прогрессия будет : 2; 5; 8; 11; 14; 17; ... Рекуррентная формула этой прогрессии будет: $a_{n+1} = a_n + 3$. b) При условии $a_1 = 11, d = -4$ арифметическая прогрессия будет: 11; 7; 3; -1; -5; ... Рекуррентная формула этой прогрессии будет: : $a_{n+1} = a_n - 4$

При $d = 0$, все члены будучи равными одному числу (1-му члену) образуют стационарную последовательность. Например, 5; 5; 5; ...

n-ый член арифметической прогрессии

Обучающие задания

1 Какие из данных последовательностей являются арифметической прогрессией? Найдите разность этой прогрессии. Напишите рекуррентную формулу для прогрессии.

a) –1,9; –2,1; –2,5; –3,1; –3,9; . . . c) –1,6; –1,3; –1,0; –0,7; –0,4; . . .

b) $\frac{1}{2}$; 1 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{4}{2}$; $\frac{5}{2}$; . . . d) $\frac{13}{2}$; $\frac{13}{3}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{13}{5}$; $\frac{13}{6}$; . . .

2 Найдите неизвестные члены арифметической прогрессии:

a) x_1; 5; x_3; –3; –7; .... b) x_1; x_2; 17; 23; ....

3 Напишите первые пять членов прогрессии по данному первому члену и разности прогрессии .

a) $a_1 = -1{,}2$ $d = 2$ b) $a_1 = 3$, $d = -2$

4 Найдите первые четыре члена последовательности, заданной рекуррентным способом.

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - 3$ a) $a_1 = 1\frac{2}{3}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3}$

Формула n-го члена арифметичесокой прогрессии

Каждый член арифметической прогрессии равен предыдущему сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом.

Согласно этому правилу: $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 3d + d = a_1 + 4d$$
....

По этому правилу можно записать: $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

Формула $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ является формулой n-го члена арифметической прогресси.

Пример 1. В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $d = 2{,}5$ найдем a_6 и a_9:

$$a_6 = a_1 + 5d = -2 + 5 \cdot 2{,}5 = 10{,}5$$
$$a_9 = a_1 + 8d = -2 + 8 \cdot 2{,}5 = 18$$

Отметим, что a_9 можно было бы вычислить и нижеуказанным способом:
$a_9 = a_1 + 8d = (a_1 + 5d) + 3d = a_6 + 3d = 10{,}5 + 3 \cdot 2{,}5 = 18$

Вообще, $a_n = a_1 + (n-1)\,d = a_1 + (k-1)\,d + (n-k)\,d = a_k + (n-k)\,d$

то есть верно равенство, $\boldsymbol{a_n = a_k + (n-k)d}$

Отсюда, получаем формулу для разности прогресии: $\boldsymbol{d = \frac{a_n - a_k}{n-k}}$ $n \neq k$

Пример 2. В арифметической прогрессии $a_5 = 7$, $a_9 = 19$, $d = ?$ $a_{12} = ?$

Решение:

$$d = \frac{a_9 - a_5}{9-5} = \frac{19-7}{4} = 3, \quad a_{12} = a_9 + 3d = 19 + 9 = 28$$

Замечание. Переписав формулу $a_n = a_1 + (n-1)d$ в виде $a_n = d \cdot n + (a_1 - d)$ можно сделать вывод: любая прогрессия задается формулой $a_n = k \cdot n + b$, здесь k и b любые числа.

n-ый член арифметической прогрессии

Обучающие задания

1 Напишите еще пять членов арифметической прогрессии. Для прогрессии напишите рекуррентное правило и формулу n-го члена.

a) 11; 17; 23; ... b) –6; –2; 2; ... c) $\frac{1}{4}$; 1; $\frac{7}{4}$; ...

d) 3,5; 4,3; 5,1; ... e) $\frac{17}{3}$; $\frac{15}{3}$; $\frac{13}{3}$; ... f) –12; –10; –8; ...

2 a) Выразите через a_1 и d члены a_9, a_{12}, a_{21}, a_{k+2}, a_{2k} арифметической прогрессии a_n. б) Найдите a_6, a_{15} если $a_1 = -4$, $d = 3$

3 По данным арифметической прогрессии найдите:

a) $a_{12} = -7$, $d = 3$ a_1 и a_8 b) $a_5 = 6$, $d = -0{,}5$ a_1 и a_7 c) $c_1 = -\frac{4}{3}$, $c_5 = \frac{1}{3}$ d и c_{11}

d) $c_1 = 0{,}5$, $c_{15} = -2{,}3$ d и c_{16} e) $a_5 = -10$, $a_8 = 8$ a_1 и a_6 f) $a_4 = 7$, $a_7 = -2$ a_1 и a_9

g) если –20; –15; ...... , d и a_{10} h) если 5; 4,5; ...... , d и a_9

4 Между числами 4 и 40 напишите такие четыре числа, чтобы они вместе с данными числами образовали арифметическую прогрессию.

5 1) В арифметической прогрессии $a_1 = -12$, $d = 3$. Есть ли члены равные: a) 6-ти; b) 0-ю; c) 9-ти?

2) В арифметической прогрессии –2; 5; ... есть ли члены равные: a) 53; b) 75-ти? Если есть, то найдите номер этого члена.

6 Для каких членов арифметической прогрессии –40; –37; ..., выполняются условия: a) $a_n > 0$; b) $a_n < 0$

7 a) Найдите первый положительный член прогрессии, если $a_1 = -18$; $d = 1{,}5$. Сколько членов этой прогрессии отрицательны?

b) В арифметической прогрессии 4,1; 3,9; ..... найдите первый отрицательный член прогрессии.

8 Если в арифметической прогрессии $x_1 = -45$; $d = 4$, то для каких членов справедливо неравенство: a) $x_n > 99$; b) $x_n < 160$?

9 a) Покажите, что последовательность заданная формулой $x_n = 2n - 5$ является арифметической прогрессией. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

b) Покажите, что последовательность заданная формулой $a_n = k \cdot n + b$ яляется арифметической прогрессией.

10 a) Если в арифметической прогрессии $a_n = 2n + 3$, то найдите a_8 и d.

b) Если в арифметической прогрессии $a_n = 1 - 4n$, то найдите a_6 и d.

11 В январе завод изготовил 120 деталей, в каждом последующем месяце изготовил на 8 деталей больше. Сколько деталей изготовил завод в мае и в декабре?

12 Напишите примеры арифметической прогрессии показав первые шесть членов: a) возрастающей; b) убывающей; c) все члены которой отрицательные; d) все члены которой четные.

n-ый член арифметической прогрессии

Прикладные задания

13 По данным найдите разность, шестой и первый членов арифметической прогрессии. a) $\begin{cases} a_1 + a_7 = 42 \\ a_{10} - a_3 = 21 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_2 + a_3 + a_4 = 3 \\ a_2 \cdot a_3 = 8 \end{cases}$

14 В первую секунду тело проходит 6 м, в каждую последующую секунду проходит на 2 м больше предыдущего. Какой путь проделает тело: a) в пятую секунду b) за первые 5 секунд?

15 Будет ли последовательность арифметической прогрессией, если к членам одной арифметической прогрессии прибавить соответствующие члены другой арифметической прогрессии (члены с одинаковыми номерами).

16 Если в прогрессии $a_1 = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{12}$, то какой член равен $\sqrt{48}$?

17 **География.** По предположениям ученых Европейский материк отдаляется от Северо-Американского материка каждый год на расстояние 2,2 см. Отдаление литосферных сфер наиболее лучше наблюдается в Исландии. В зоне наблюдения построен мост длиной 15 м. Если отдаление этих двух материков будет продолжаться так, то каким должна быть длина этого моста через: a) 50; b) 100 лет?

18 **Архитектура.** На станциях “Ичеришехер”, “Кероглу”, “Автовакзал”, были использованы прозрачные элементы пирамиды. Например, дизайн станции “Ичеришехер” выполнен так, что в самом верхнем ряду имеется 2 окна, а в каждом нижнем ряду на 2 окна больше врехнего. Сколько окон в 12-ом ряду? В каком ряду 18 окон?

19 Дана арифметическая прогрессия a_n. a) запишите первые 5 членов; b) найдите разность; c) покажите графически.

$a_n = 4 + 2(n - 1)$ | $a_n = \frac{5}{2} - (n - 1)$ | $a_n = 4 - 3(n - 1)$ | $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)$

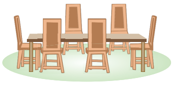
20 a) Три числа образуют арифметическую прогрессию. Сумма этих чисел равна 12, а произведение 28. Найдите эти числа.

b) Три числа образуют арифметическую прогрессию. Средний член равен 8. Сумма квадратов этих чисел равна 264. Найдите другие два числа.

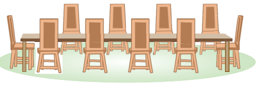
c) Сколько членов в арифметической прогрессии 3; 8; 13; ... ; 58?

21 Исследуйте как изменится количество стульев в зависимости от количества столов. Сколько стульев будет за: a) 7-ю столами ; b) 10-ю столами ; c) n столами ? **Указание:** в формуле $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$ найдите a_1 и d.

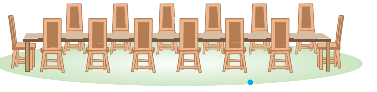
1 стол.



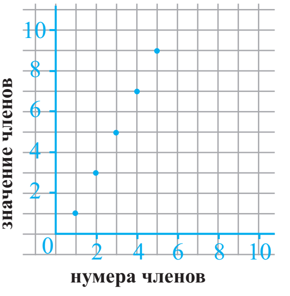
2 стола



3 стола



22 a) На графике показана зависимость между номерами и значениями членов арифметической прогрессии $a_n = 2n - 1$. Напишите уравнение прямой проходящей через фиксированные точки.
b) Постройте график функции $f(x) = 2x - 1$ (x- действительное число), Покажите разницу между графиком арифметической прогрессии и графиком линейной функции. Что выражает угловой коэффициент прямой в арифметической прогрессии?



23 Сколько членов в арифметической прогрессии, если первый член равен 6, разность прогрессии 5, последний член 66?

24 Годовая прибыль вклада, вложенного в сберегательную кассу составляет 5%. В какую сумму превратятся 40 000 манат вложенные на 3 года при подсчете по простой процентной ставке?

25 Стороны a, b, c прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите площадь треугольника, если $c = 10$ см.

26 Если обратные члены некоторой последовательности образуют арифметическую прогрессию, то эта последовательность называется **гармонической последовательностью**. Объясните, что последовательность: $1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3}, \ldots$ является гармонической.

27 Первые шесть членов арифметической прогрессии отмечены на координатной плоскости. Координаты двух этих точек (3; 11) и (6; 23). Напишите формулу n-го члена этой прогрессии.

28 Некоторые члены арифметической прогрессии заданы в таблице. Дополните таблицу в тетради и представьте прогрессию по рекуррентному правилу ($n \in N$).

n	a_n
1	-3,5
2	1
4	

n	a_n
1	40
7	22
13	

n	a_n
1	
3	30
50	500
150	

Свойства членов арифметической прогрессии

Исследование. 1) Запишите первые 10 членов какой-либо арифметической прогрессии. Например, при $a_1 = 4$, $d = 3$ эти члены будут записаны как показано в таблице .

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

2) Сравните какой-либо средний член прогрессии со средним арифметическим соседних с ним членов. Получилось ли равенство?
Верны ли равенства? $a_1 + a_{10} = a_2 + a_9 = a_3 + a_8 = a_4 + a_7 = a_5 + a_6$

Арифметическая прогрессия и среднее арифметическое

Свойство. Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов.

Действительно, из $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ получается $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$.

Так как в общем случае, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, то верно равенство:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n \geq 2)$$

Это свойство можно обобщить таким образом. Каждый член арифметической прогрессии (начиная со второго) равен среднему арифметическому равноудаленных от него членов: $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ $(1 \leq k \leq n-1)$

Это свойство поясняет причину названия арифметической прогрессии. Верно и обратное. Если любой член последовательности, начиная со второго равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

В конечной арифметической прогрессии сумма членов расположенных на одинаковом расстоянии от концов, равна сумме крайних членов.

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = ...$$

В общем если, $m + k = n + p$, то $a_m + a_k = a_n + a_p$

Обучающие задания

1 a) В арифметической прогрессии $a_1 = 3$, $a_3 = 7$. Найдите a_2.

b) В арифметической прогрессии $a_4 + a_{10} = 6$.
Найдите: 1) $a_5 + a_9$; 2) a_7

c) В арифметической прогрессии $a_8 = 5$. Найдите сумму: $a_1 + a_{15}$.

2 Зная, что данные числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, найдите x.

a) $3x - 4$; 6; $x + 6$ b) $x - 2$; x^2; $3x + 2$

3 Для членов арифметической прогрессии $\div (x_n)$ докажите равенство:

a) $x_1 + x_9 = x_4 + x_6$ b) $x_3 + x_{12} = x_8 + x_7$ c) $x_4 + x_{n-4} = x_6 + x_{n-6}$

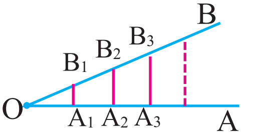
Свойства членов арифметической прогрессии

Прикладные задания

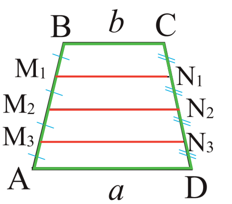
4 Углы треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что один из углов этого треугольника равен 60°.

5 Периметр треугольника равен 24 см. Длины сторон этого треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите длину средней стороны.

6 На стороне OA угла AOB начиная с вершины отложены равные отрезки и из точек деления проведены параллельные прямые. Найдите длину отрезка A_5B_5, если $A_1B_1 = 2$ см.



7 В трапеции ABCD сторона AB разделена на четыре равных отрезка и из точек деления проведены прямые, параллельные основаниям.
а) Докажите, что длины отрезков BC, M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 и AD образуют арифметическую прогрессию.
Если AD = 18 см, BC = 6 см, то найдите длины отрезков M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3.



8 Если числа $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ образуют арифметическую прогрессию, докажите справедливость равенства $\frac{b}{c} + \frac{b}{a} = 2$.

9 Между данными числами впишите: 1) такое одно число; 2) такие два числа, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию.

a) –1; 5 b) 30; 50 c) 12; 48 d) 0; 20 e) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$

10 Пятый член арифметической прогрессии равен c. Напишите выражение показывающее сумму 2-го и 8-го членов этой прогрессии.

11 Врач хочет, чтобы больной принимавший лекарство в течении 5-ти дней с одинаковыми дозами увеличил ежедневную дозу от 100 мг до 300 мг. Напишите количество лекарства, которые принимал больной в течении 5-ти дней.

12 Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что последовательность $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ также является арифметической прогрессией.

Сумма *n*-первых членов арифметической прогрессии

Практическое задание. Найдем сумму натуральных чисел от 1 до 100. Предположим, что эта сумма равна x. В 1-ом ряду напишем слагаемые этой суммы в порядке возрастания, а во 2-ом ряду - в порядке убывания.

$$x = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 98 + 99 + 100$$

$$+$$

$$x = 100 + 99 + 98 \ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + 2 + 1$$

$$2x = \underbrace{101 + 101 + 101 \ldots\ldots + 101 + 101 + 101}_{100}$$

$$x = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

Полученный результат можно записать в виде: $x = \dfrac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5050$

Сумма *n*-первых членов арифметической прогрессии

Обозначим через S_n сумму n-первых членов любой арифметической прогрессии.

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$+$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots\ldots a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots\ldots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_1)$$

Попарные суммы $a_1 + a_n$ и т.д равны между собой, так как в конечной арифметической прогрессии сумма членов расположенных на одинаковом расстоянии от концов, равна сумме крайних членов. Всего таких пар n, поэтому $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, а отсюда получим: $\boldsymbol{S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$

Сумма n-первых членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов этой прогрессии. Так как: $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Тогда формулу суммы членов арифметической прогрессии можно написать в виде:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(2a_1 + (n - 1)d) \cdot n}{2}}$$

Пример 1. Найдите сумму 12-ти первых членов арифметической прогрессии заданной формулой $a_n = 3n + 1$.

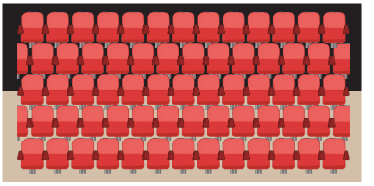
Решение: $a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$ $\quad a_{12} = 3 \cdot 12 + 1 = 37$

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \cdot 12}{2} = (4 + 37) \cdot 6 = 246$$

Пример 2. Найдите сумму 10-ти первых членов арифметической прогрессии – 3; 5; 13; ... . **Решение.** $a_1 = -3$, $a_2 = 5$, $d = 8$.

$$a_{10} = a_1 + 9d = -3 + 72 = 69$$

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = (-3 + 69) \cdot 5 = 330$$



Пример 3. В зале заседаний 30 рядов. В первом ряду 24 места, а в каждом следующем ряду на одно место больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в зале? **Решение:** $a_1 = 24$, $d = 1$, $n = 30$

В последнем ряду: $a_{30} = 24 + 29 \cdot 1 = 53$ места. Всего в 30-ти рядах: $S_{30} = \dfrac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} = 1155$

Пример 4. Сколько членов арифметической прогрессии 5; 7; 9; ... нужно сложить, чтобы получить 320 ?

Решение: $320 = \dfrac{(2a_1 + (n-1)\,d\,) \cdot n}{2}$, $\quad \dfrac{(2 \cdot 5 + (n-1) \cdot 2) \cdot n}{2} = 320$,

$\dfrac{(8 + 2\,n) \cdot n}{2} = 320$, $\quad n^2 + 4n = 320$, $\quad n^2 + 4n - 320 = 0$

$(n-16)(n+20) = 0$, $\quad n_1 = 16$, $n = -20$.

Так как количество членов не может быть отрицательным, то сумма 16-ти первых членов этой прогрессии равна 320.

Перепишем сумму первых n членов арифметической прогрессии в следующем виде:

$$S_n = \frac{(2a_1 + (n-1)\,d\,) \cdot n}{2} = \frac{(n \cdot d + (2a_1 - d)) \cdot n}{2} = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \frac{2\,a_1 - d}{2} \cdot n$$

обозначая, $\dfrac{d}{2} = a$, $\dfrac{2\,a_1 - d}{2} = b$ получаем, что сумму n - первых членов любой арифметической прогрессии можно также записать в виде: $S_n = a \cdot n^2 + bn$. Можно считать арифметическую прогрессию заданной, если известна S_n.

Пример 5. Найдем первый член и разность арифметической прогрессии, сумма n - первых членов которой задана формулой $S_n = 2n^2 - 3n$. **Решение:** $a_1 = S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1$

$$a_2 = (a_1 + a_2) - a_1 = S_2 - S_1 = (2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2) - (-1) = 3$$

$$d = a_2 - a_1 = 3 - (-1) = 4$$

Внимание! При решении некоторых задач для определения a_n пользуются формулой $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Обучающие задания

1 По данным найдите сумму соответствующего числа членов арифметической прогрессии.

a) $a_1 = 10$, $a_{20} = 48$, $n = 10$, $S_n = ?$

b) $a_1 = 6{,}5$, $a_{20} = 7{,}5$, $n = 20$, $S_n = ?$

c) $a_1 = -13$, $d = 7$, $n = 8$, $S_n = ?$

d) $a_1 = 9$, $d = -4$, $n = 12$ $S_n = ?$

e) $-17, -11; ...$ $n = 17$, $S_n = ?$

f) 14,2; 9,6; ..... $n = 11$, $S_n = ?$

2 Для арифметической прогрессии заданной формулой $a_n = 2n - 3$ найдите сумму первых : a) 15-ти членов; b) n членов.

Сумма *n*-первых членов арифметической прогрессии

3 Найдите сумму 10-ти первых членов арифметической прогрессии.

a) $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + \ldots$ b) $3 + \frac{7}{2} + 4 + \frac{9}{2} + 5 + \ldots$

c) $8 + 4 + 0 + (-4) + (-8) + \ldots$ d) $0{,}5 + 1{,}1 + 1{,}7 + 2{,}3 + \ldots$

4 Найдите требуемое по данным.

$3 + 7 + 11 + 15 + 19 + \ldots$
a) $n = 20$, $S_n = ?$ b) $S_n = 210$, $n = ?$

$30 + 24 + 18 + 12 + 6 + \ldots$
a) $n = 15$, $S_n = ?$ b) $S_n = -36$, $n = ?$

$-10 + (-5) + 0 + 5 + 10 + \ldots$
a) $n = 15$, $S_n = ?$ b) $S_n = 315$, $n = ?$

$45 + 42 + 39 + 36 + 33 + \ldots$
a) $n = 68$, $S_n = ?$ b) $S_n = -48$, $n = ?$

5 Найдите сумму:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$; b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$; c) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

6 Найдите сумму:

a) первых 80-ти натуральных чисел; b) всех двузначных чисел;
c) натуральных чисел меньших 100 и делящихся на 3.
d) натуральных чисел меньших 130 и делящихся на 4.

Прикладные задания

7 Первый член арифметической прогрессии равен 7, а разность 1,5. Найдите сумму с 5-го по 11-ый член (11-ый включительно) прогрессии.

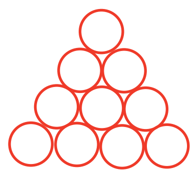
8 Заполните таблицу.

№	a_1	d	n	a_n	S_n
1	2		11	7	
2		– 0,4	8	– 5,2	
3	0,5			14	72,5
4			7	16	17,5

9 Шары построены в форме треугольника таким образом, что в первом ряду 1 шар, во втором 2 шара, в третьем ряду 3 шара и.т.д.

a) Сколько рядов получится из 36-ти шаров?

b) Сколько потребуется шаров, чтобы составить треугольник из 12-ти рядов?



Сумма n-первых членов арифметической прогрессии

10 **Исследование.** 90 фотографий расположили в двух рядах. Разность количества фотографий двух соседних рядов всегда постоянная. Сколькими вариантами можно расположить эти фотографии согласно этому правилу?

11 Если звонок прозвенит в 1 час один раз, в 2 часа два раза, ... , в 12 часов двенадцать раз, то сколько раз звонок прозвенит за все это время?

12 Решите уравнение, зная что слагаемые в левой части являются членами арифметической прогрессии.

a) $1 + 4 + 7 + ... + x = 70$ b) $1 + 1{,}5 + 2 + ... + x = 27$

13 Вычислите. $\dfrac{2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{19}}{4 \cdot 4^4 \cdot 4^7 \cdot \ldots \cdot 4^{16}}$

14 Найдите неизвестные члены по формуле суммы n -первых членов арифметической прогрессии.

a) $S_n = 4n^2 - 3n$ b) $S_n = 2n^2 + n$ c) $S_n = 2n^2 + 3n$

$a_1 = ?$ и $a_2 = ?$ $a_5 = ?$ и $a_{11} = ?$ Какой член равен 21?

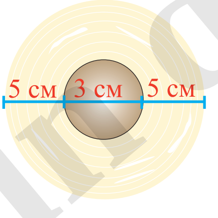
15 Сумма 3-го и 5-го членов арифметической прогрессии равна 12. Сумма членов от 2-го до 5-го (5-ый включительно) равна 8. Напишите первые 5 членов этой прогрессии.

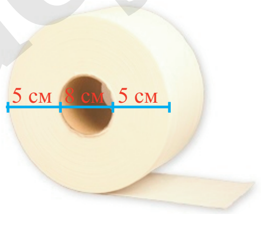
16 a) В арифметической прогрессии $a_3 = 31$ и $a_7 = 79$. Найдите a_{11} и S_{31}.

b) В арифметической прогрессии $S_7 = 203$, $a_5 = 38$. Напишите формулу для a_n и S_{17}.

17 Фабрика производит бумагу, предназначенную для различных целей, свернутую в специальные цилиндрические картоны в виде рулона. Толщина бумаги 0,01 см. Диаметр картона 3 см, диаметр всего рулона 13 см.

n	d_n (см)	l_n (см)
1	3	3π
2		
3		
4		





a) Приняв количество бумажных свертков за “n”, диаметр рулона при каждом n -ом свертывании “d_n”, при каждом шаге свертывания-длину бумаги в свертке “l_n”, заполните таблицу в тетради.

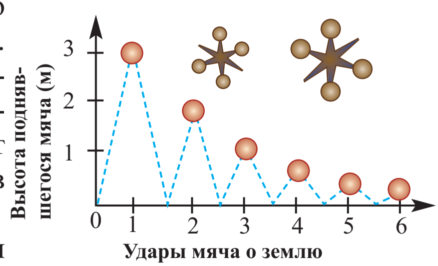
b) Что вы думаете о последовательности $l_1, l_2, l_3, l_4, \ldots$? Запишите формулу n-го члена последовательности.

c) Сколько бумажных сверток в рулоне с диаметром 13 см ?

d) Рулон бумаги с диаметром 13 см стоит 5 манат. Сколько, приблизительно, будет стоить рулон бумаги с диаметром 18 см?

Геометрическая прогрессия

Исследование. Мяч ударяясь о землю первый раз поднимается на высоту 3 м. В каждый последующий раз поднимается на высоту равную 60%-ам предыдущей высоты. График показывает зависимость между количеством ударов о землю и высотой мяча.



1) Высоты, на которые поднимается мяч, обозначьте через $h_1, h_2, h_3, h_4, \ldots$. Выразите высоту, на которую поднимается мяч каждый раз через высоту, после первого удара о землю.
2) На какую высоту поднимется мяч после 8-го удара о землю?
3) Объясните возможность применения формулы $h_n = 3\cdot(0{,}6)^{n-1}$, для нахождения высоты поднявшегося мяча после n-го падения на землю.

Члены геометрической прогрессии, рекуррентное правило

Определение. Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, члены которой отличны от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущего члену, умноженному на одно и то же, не равное нулю, число. То есть если для любого натурального числа n, будет выполнено условие: $b_n \neq 0$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$, то последовательность (b_n) будет геометрической прогрессией. Число q называется знаменателем геометрической прогрессии. Геометрическая прогрессия символически обозначается ∺ (b_n). Формула $\boldsymbol{b_{n+1} = b_n \cdot q}$ является представлением геометрической прогрессии по рекуррентному правилу. Из определения следует, что для любого натурального числа n, справедливо равенство: $\boldsymbol{q = \frac{b_{n+1}}{b_n}}$. В частности , $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots..$

Пример 1. а) Если $b_1 = 2$, $q = 3$, то получится геометрическая прогрессия 2, 6, 18, 54, 162, ... ; b) Если $b_1 = 3$, $q = -2$, то получится геометрическая прогрессия 3, –6, 12, –24, 48, ... При $q > 0$, члены геометрической прогрессии имеют одинаковый знак. При $q < 0$ знаки членов прогрессии чередуются. При $q = 1$ получается стационарная последовательность.

Пример 2. Какая из данных числовых последовательностей геометрическая прогрессия? а) 4, 12, 22, 34, 48. b) 625, 125, 25, 5, 1.

Отношение каждого члена геометрической прогрессии на предыдущий всегда остается постоянной. Проверим это условие для обеих прогрессий.

а) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{12}{4} = 3$ $\quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{22}{12} = \frac{11}{6}$ Условие не выполняется, последовательность не является геометрической прогрессией.

b) $\frac{b_2}{b_1} = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{b_3}{b_2} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{b_4}{b_3} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$ $\quad \frac{b_5}{b_4} = \frac{1}{5}$

Условие выполняется, это последовательность - геометрическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия

Обучающие задания

1 Напишите следующие два члена геометрической прогрессии.

500; 100; 20; ...

16; 24; 36; ...

1,25; 1,5; 1,8; ...

$\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; ...$

$\frac{1}{3}; \frac{5}{6}; \frac{25}{12}; ...$

$7; \frac{14}{3}; \frac{28}{9}; ...$

0,4; –0,16; 0,064; ...

$1; \sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; ...$

2 Напишите 10-ый член прогрессии.

a) 512; –256; 128; –64,...

b) $\frac{2}{5}; \frac{4}{5}; \frac{8}{5}; \frac{16}{5}; ...$

3 Найдите неизвестные члены геометрической прогрессии.

a) y_1; 1; $\frac{1}{2}$; y_4; ....

b) y_1; y_2; 24; 36; 54;...

4 a) Зная, что $b_2 = 3$, по рекуррентному правилу $b_{n+1} = 0,3 \cdot b_n$ напишите первые пять членов геометрической прогрессии.

b) Напишите рекуррентное правило для последовательности 2, 8, 32, 128, ...

5 **Задания открытого типа**. Напишите 4 члена геометрической прогрессии.

a) $q = \frac{1}{2}$

b) $b_1 = 0,5$

c) $b_3 = 20$

6 Какая из данных последовательностей является арифметической, а какая геометрической прогрессией? Напишите рекуррентные формулы для этих прогрессий.

a) 7; 14; 28; 56; 112; ...

b) 1000; 500; 250; 125; ...

c) 4; 8; 13; 19; ...

d) 1; 2; 5; 26; ...

e) 1; 5; 9; 13; ...

f) 200; 20; 2; 0,2; ...

7 Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

1) 81; 27; 9; ...

2) 4; 8; 16; ...

3) 14; 7; $\frac{7}{2}$; ...

4) $\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}; ...$

8 Для последовательностей напишите рекуррентное правило. Последовательность может быть арифметической прогрессией, геометрической прогрессией или может быть другой логической последовательностью.

a) 1; 7; 13; 19; ...

d) 2;3; 8; 63;...

d) 66; 33; 16,5; 8,25; ...

e) 2; 5; 11; 23; 47; . . .

c) 41; 32; 23; 14; . . .

f) 2; 5; 10; 50; 500; ...

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

Исследование. Зная, что геометрическая прогрессия задается рекурентным отношением $b_{n+1} = b_n \cdot q$ заполните пустые клетки в таблице.

b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
$b_1 \cdot q$	$b_2 \cdot q = b_1 q^2$	$b_3 \cdot q = b_1 q^3$	$\square \cdot q = \square$	$\square \cdot q = \square$

К какому выводу вы пришли?
На какую степень q нужно умножить b_1, чтобы получить b_5?
Какую связь вы видите между показателем степени q и индексами b_5 и b_1?
Как вы думаете, на какую степень q надо умножить b_1, чтобы получить b_8 ?

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

Вообще, чтобы в геометрической прогрессии найти b_n, нужно перемножить b_1 и q^{n-1}, то есть $\boldsymbol{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

Это выражение называется формулой n-го члена геометрической прогрессии. Для того чтобы задать геометрическую прогрессию, достаточно знать его первый член и знаменатель.

Пример 1. Если в геометрической прогрессии $b_1 = 3$, $q = 2$, найдем b_4 и b_7. $b_4 = b_1 \cdot q^3 = 3 \cdot 2^3 = 24$, $\quad b_7 = b_1 \cdot q^6 = 3 \cdot 2^6 = 192$

Указание. Можно было бы вычислить следующем способом
$b_7 = b_1 \cdot q^6 = b_1 \cdot q^3 \cdot q^3 = b_4 \cdot q^3 = 24 \cdot 2^3 = 192.$

Вообще, справедливо равенство, $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q^{n-k} = b_k \cdot q^{n-k}$.

Пример 2. Найдем b_7, если в геометрической прогрессии $b_2 = 4$; $b_5 = 32$.

Решение: $b_5 = b_2 \cdot q^3$, отсюда $q^3 = \dfrac{b_5}{b_2} = \dfrac{32}{4} = 8$, $q = 2$ и
$b_7 = b_5 \cdot q^2 = 32 \cdot 2^2 = 128$

Заключение: Если известны какие-либо два члена, то можно задать геометрическую прогрессию. n-ый член геометрической прогрессии можно найти другим путем. По определению:

$$b_2 = b_1 \cdot q$$
$$b_3 = b_2 \cdot q$$
$$b_4 = b_3 \cdot q$$
$$\dots\dots\dots$$
$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Если перемножить почленно эти $(n-1)$ равенства, получим:

$$b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} b_n \cdot = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot q^{n-1}.$$

Сократив одинаковые члены в левой и правой частях, получим формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Заключение: Записав $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_1 \cdot \dfrac{q^n}{q} = \dfrac{b_1}{q} \cdot q^n$, и обозначив $\dfrac{b_1}{q} = c$ становится ясным, что любую геометрическую прогрессию можно задать формулой $b_n = c \cdot q^n$. (Здесь c-какое-либо число отличное от нуля, q- знаменатель прогрессии).

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

Обучающие задания

1 Найдите неизвестные по данным:

a) $b_1 = 3$; $q = 2$, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$

b) $b_1 = 24$; $q = 0{,}5$, $b_3 = ?$ $b_4 = ?$

c) $b_6 = 48$; $q = -2$, $b_4 = ?$ $b_5 = ?$

d) $b_5 = 64$; $q = 2$, $b_1 = ?$ $b_7 = ?$

e) $b_4 = 15$; $b_6 = 135$, $q = ?$ $b_7 = ?$

f) $b_1 = 3$; $b_5 = 48$, $q = ?$ $b_7 = ?$

2 Найдите седьмой член геометрической прогрессии.

a) 2,5; 5; 10; 20; ...

b) –0,25; –1; –4; –16; ...

c) $-\frac{64}{81}$; $\frac{32}{27}$; $-\frac{16}{9}$; $\frac{8}{3}$; ...

d) 15; –5; $\frac{5}{3}$; – ; ...

3 По данным напишите формулу *n*-го члена геометрической прогрессии.

a) $b_1 = 4$, $q = 3$

c) $b_3 = 72$, $q = 6$

e) $b_1 = -2$, $q = 2$

b) $b_1 = 45$, $q = \frac{1}{3}$

d) $b_1 = 4$, $q = \frac{1}{8}$

f) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_6 = -16$

4 a) В геометрической прогрессии $b_1 = 2$, $q = 3$; найдите номер члена равного 162.

b) в геометрической прогрессии 0,1; 0,3; .... найдите номер члена равного 24,3 .

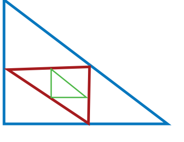
5 По данным, запишите *n*-ый член геометрической прогрессии по рекуррентному правилу.

1) $b_1 = -4$, $q = 6$ 2) $b_1 = 4$, $q = 3$ 3) $b_1 = 2$, $q = -3$ 4) $b_1 = -4$, $q = 2$

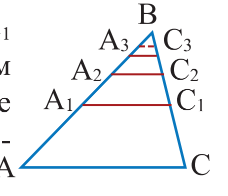
6 По данным, запишите первые пять членов геометрической прогрессии. Задайте прогрессию рекуррентным соотношением и экспилитическим способом: 1) $b_4 = 25$, $q = -5$; 2) $b_1 = 4$, $q = 5$

Прикладные задания

7 В прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 16 см вписан треугольник с вершинами на серединах сторон данного треугольника. Аналогично, во второй треугольник так же вписан треугольник и т.д. Найдите периметр 6-го треугольника.



8 В ΔABC проведена средняя линия A_1C_1, в ΔA_1BC_1 проведена средняя линия A_2C_2, во вновь полученном ΔA_2BC_2 проведена средняя линия A_3C_3 и т.д. Найдите площадь треугольника A_5BC_5, если площадь треугольника ABC равен 3072 см^2.



9 **Бухгалтерский учет.** Завод по производству молока купил новое оборудование на 200 тыс. манат. Каждый год списывает 10 % от стоимости оборудования за сношенность. Сколько будет стоить это оборудование через 3 года?

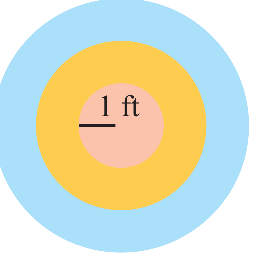
Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

10 На экспериментальном участке леса количество древесины за год растет на 10%. Если вначале, древесины на участке было 20000 $м^3$, то сколько ее будет через 4 года ?

11 В геометрической прогрессии сумма первого и третьего членов равна 15, а сумма второго и четвертого 30. Найдите первые четыре члена прогрессии.

12 За один раз насос выкачивает из бака $\frac{1}{10}$ часть горючего. Какой процент горючего останется в баке после 3-х применений насоса?

13 Мишень состоит из кругов, радиусы которых каждый раз увеличиваются на 1 ft (феет - единица длины и 1 ft $\approx$ 30,48 см).



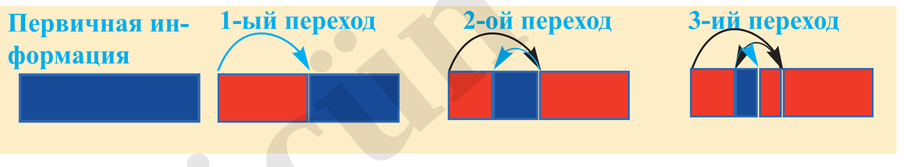
a) Напишите формулу показывающую площадь n-го кольца мишени.

b) Выразите площадь 10-го кольца в квадратных сантиметрах.

c) Напишите формулу показывающую площадь мишени с *n*- кольцом.

d) Найдите значение площади мишени для n = 1, 2, 4, 8.
Как изменятся площадь с увеличением значения n в два раза?

14 **Компьютерная наука**. Поиск элемента в компьютере происходит бинарным способом. Сначала элемент ищут в первой половине списка. Таким образом, определяется, в какой половине находится элемент поиска и отпадает необходимость проверки второй половины. Далее первая половина списка вновь делится пополам, и вновь определяют место расположения элемента. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден необходимый элемент.



a) Напишите выражение показывающее количество оставшихся элементов в списке состоящем из 2048 элементов после *n*-го перехода.

b) Искомый элемент в самом худшем случае может быть найден в самом последнем переходе. В этом случае при каком значении “*n*” будет найден искомый элемент из совокупности данных состоящей из 2048 элементов.

Свойства членов геометрической прогрессии

Исследование. Напишем восемь первых членов какой-либо геометрической прогрессии. Например, при $b_1 = 3$, $q = 2$, эти члены будут как в таблице:

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
3	6	12	24	48	96	192	384

$\boxed{\sqrt{3 \cdot 12} = 6}$ $\boxed{\sqrt{12 \cdot 48} = 24}$

Члены геометрической прогрессии и среднее геометрическое

В геометрической прогрессии с положительными членами начиная со второго, каждый член равен среднему геометрическому соседних с ним членов. Это свойство поясняет причину названия геометрической прогрессии. Например в последовательности, 2, 6, 18, 54, 162, ... число 18 является средним геометрическим 6 и 54. Среднее геометрическое можно ясно увидеть записывая отношения, выражающие знаменатель прогрессии. Из определения геометрической прогрессии получатся равенства: $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{b_3}{b_2} = \dfrac{b_4}{b_3} = \;\ldots\ldots\; = \dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Взяв попарно это равенства, получим: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, $b_3^2 = b_2 \cdot b_4$, ... , $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$. Это свойство можно задать в более общем виде. В геометрической прогрессии, начиная со второго, квадрат любого члена равен произведению равноудаленных членов последовательности, то есть $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$. Для геометрической прогрессии с положительными членами это свойство можно записать в виде:

$$b_n = \sqrt{b_{n-k} \cdot b_{n+k}} \qquad (1 \le k \le n-1).$$

Еще одно свойство членов геометрической прогрессии:
Если $n + m = k + p$, то верно равенство $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_p$.

Обучающие задания

1 В геометрической прогрессии (b_n) покажите справедливость равенств:
a) $b_4^2 = b_3 \cdot b_5$; b) $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
c) $b_5 \cdot b_9 = b_6 \cdot b_8$ d) $b_3 \cdot b_7 = b_4 \cdot b_6$ e) $b_n \cdot b_m = b_k \cdot b_l$ $(n+m = k+l)$.

2 Числа $x - 1$; 8 ; $x + 11$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите x.

3 Числа $x - 1$; $x + 2$; $x + 8$ являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите x.

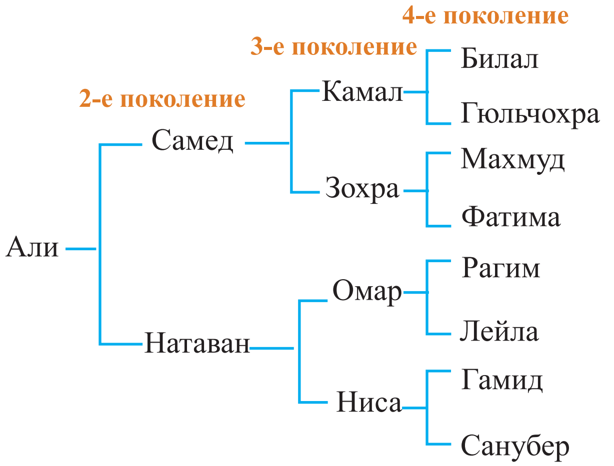
4 Покажите, что последовательность заданная рекуррентным отношением $c_n = 3 \cdot 2^n$ является геометрической прогрессией. Найдите знаменатель прогрессии.

5 Напишите формулу n -го члена последовательности заданной рекуррентным отношением $b_1 = 2$, $b_{n+1} = b_n \cdot 3$.

6 Если $\div\!\!\div (b_n)$ геометрическая прогрессия, то будут ли последовательности, a) b_1 ; b_3 ; b_5 ; b_7 ; ... b) b_1^2; b_2^2; b_3^2; ... геометрической прогрессией?

Сумма n-первых членов геометрической прогрессии

Исследование. Записав имена своих родителей, 4-х бабушек и дедушек, 8-ми прабабушек и прадедушек Али построил дерево поколений отражающее непосредственно родителей. Найдите количество 10-ти поколений родителей Али.



Сумма n - первых членов геометрической прогрессии

Обозначим через S_n сумму n-первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots\ b_n \quad (1)$$

При $q = 1$, все члены равны b_1 и $S_n = n \cdot b_1$. Рассмотрим случай когда $q \neq 1$.

Умножим обе части (1)-го равенства на q :

$q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q \ldots\ldots + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q$ (2). Отнимем от (2)-го равенства (1)-е. Получим: $q \cdot S_n - S_n = b_n \cdot q - b_1$.

Отсюда $\quad \boldsymbol{S_n = \dfrac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}}, \qquad (q \neq 1) \qquad (3)$

(3)-я формула называется формулой n- первых членов геометрической прогрессии. Так как $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, то для S_n можно записать:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}, \qquad (q \neq 1)$$

Пример. В геометрической прогрессии $b_2 = 6$, $b_5 = 48$. Найдите сумму первых шести членов.

Решение. $b_5 = b_2 \cdot q^3$. Отсюда $q^3 = \dfrac{b_5}{b_2} = \dfrac{48}{6} = 8$, $q = 2$

Из формулы $b_2 = b_1 \cdot q$ выразим b_1: $\quad b_1 = \dfrac{b_2}{q} = \dfrac{6}{2} = 3$

Тогда $\quad S_6 = \dfrac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \dfrac{3 \cdot (2^6 - 1)}{2 - 1} = 189$

Сумма n-первых членов геометрической прогрессии

Обучающие задания

1 По данным, найдите сумму n - первых членов геометрической прогрессии.

a) $b_1 = 16, \quad q = \dfrac{1}{2} \quad S_6 = ?$ b) $b_1 = 1, \quad q = -2 \quad S_5 = ?$

c) $3; 6; \ldots, \quad S_{10} = ?$ d) $1; -2; 4, \ldots, \quad S_8 = ?$

2 Найдите по данным требуемые:

1) $-4 + 12 + (-36) + 108 + \ldots$

a) $n = 6, \quad S_6 = ?$ b) $S_n = -244, \quad n = ?$

2) $160 + (-80) + 40 + (-20) + \ldots$

a) $n = 7, \quad S_7 = ?$ b) $S_n = 105, \quad n = ?$

3 По данным в геометрической прогрессии найдите:

a) $S_4 = 45, \quad q = 2, \; b_1 = ?$ b) $S_4 = 130, \quad q = \dfrac{2}{3} \quad b_4 = ?$

c) Если $b_1 = 2, \; b_5 = 162, \quad S_6 = ?$ d) Если $b_2 = \dfrac{1}{5}, \; b_5 = \dfrac{1}{625}, \quad S_5 = ?$

4 Для последовательности $a_n = 3 \cdot 2^n$ являющейся геометрической прогрессией найдите сумму: a) первых 5 членов; b) первых n членов.

5 Напишите формулу суммы n -первых членов данной геометрической прогрессии.

a) $1, y, y^2, y^3, y^4, \ldots$ b) $3z, 6z^3, 12z^5, 24z^7, \ldots$

6 Разность четвертого и первого членов геометрической прогрессии равна 26, а разность пятого и третьего членов равна 78. Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

Прикладные задания

7 Бактерия, попавшая в живой организм, в конце 20-ой минуты делится на две бактерии; каждая из вновь образованных бактерий в конце последующей 20 минуты тоже делится на две бактерии и т.д. Найдите количество бактерий, образованных из одной бактерии, к концу дня.

8 Фирма, изготавливающая сигнализационные устройства с начала работы производила за год 10 000 устройств. Рост производительности за год составлял 20 %.
a) Сколько устройств произвела фирма в 5-ом году деятельности?
b) Сколько всего устройств произвела фирма за 5 лет?

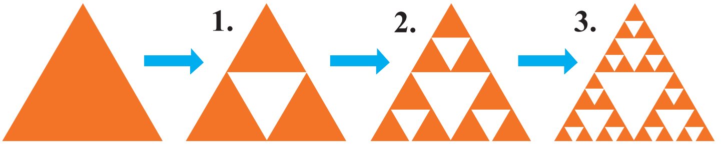
9 Упростите выражение при $x \neq 1$.

a) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ b) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

10 Упростите выражение ($n \neq 1$).

a) $\dfrac{1+ n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5}{1+ n + n^2}$ b) $\dfrac{1+ n + n^2 + n^3}{1+ n + n^2 + n^3 + n^4 + n^5 + n^6 + n^7}$

11 Польский ученный Серпинский, с целью исследования равносторонних треугольников сделал дизайн. На каждом шаге соединяя середины сторон большого треугольника создавал равносторонние треугольники. Представьте, что первоначальный треугольник - это равносторонний треугольник со сторонами равными единице.



a) На первом шаге количество вырезанных треугольников 1, на втором 3, на третьем 9 и т.д. Напишите формулу показывающую число вырезанных треугольников на n-ом шаге? b) Согласно этому правилу сколько треугольников будут вырезаны на 4-ом, 5-ом шагах? c) Вычислите неразделенную площадь, оставшуюся от данного треугольника на 3-ем шаге.

12 В конечной геометрической прогрессии с четным числом элементов отношение суммы членов стоящих на четных местах к сумме членов стоящих на нечетных местах равно знаменателю прогрессии. Докажите это.

13 Фаррух смотрит на картину. На ней была нарисована собака, за собакой 4 щенка, за каждым щенком 4 кошки, за каждой кошкой 4 котенка. За каждым котенком шли 4 крысы. Сколько всего конечностей сможет насчитать Фаррух на этой картинке?

14 Компания, занимающаяся программным обеспечением, планирует потратить 100 000 манат на усовершенствование игры. Финансовые менеджеры компании должны будут потратить на это первоначально 4 000 манат, а за каждую последующую неделю на 20% больше предыдущего.

a) Сколько денег будет потрачено на 5-ой неделе?

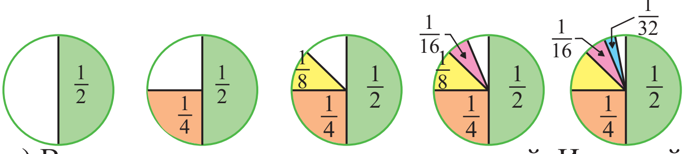
b) Сколько денег будет потрачено за первые 5 недель?

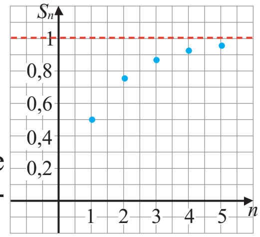
c) На какой неделе не останется достаточное количество денег?

15 Подсчитайте число отцов и матерей, бабушек и дедушек, прабабушек и прадедушек 10-ти поколений. В каком поколении количество будет больше 1000000?

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

Практическое задание. На картине даны шаги деления на части круга по определенному правилу. a) Представьте это правило словами. b) Можно ли по этому правилу закончить деление круга на маленькие части?





c) Выразите круг через сумму его частей. Исследуйте применение формулы суммы n-первых членов геометрической прогрессии.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0{,}75$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \approx 0{,}88$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \approx 0{,}94$$

$$S_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \approx 0{,}97$$

$$S_n = b_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

d) сравните с нулем значение с $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ увелечением n.

e) Объясните данный график соответственно ситуации. По графику представьте свои рассуждения о $S_n \to 1$, при $n \to \infty$.

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

Если число членов геометрической прогрессии бесконечно, то ее называют бесконечной геометрической прогрессией. Преобразуем формулу суммы n - первых членов геометрической прогрессии следующим образом.

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$$

Если $|q| < 1$, то с бесконечным ростом "n" множитель q^n, а значит и $\frac{b_1}{1-q} \cdot q^n$ приближаются к нулю. Поэтому с ростом n до бесконечности сумма S_n приближается к числу $\frac{b_1}{1-q}$. Число $\frac{b_1}{1-q}$ при $|q| < 1$ называется суммой бесконечной геометрической прогрессии.

Если обозначить эту сумму через S, то получим: $\boldsymbol{S = \frac{b_1}{1-q}}$ $\quad (|q| < 1)$

Пример. Примените формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии в преобразовании периодической дроби 0, (3) в обыкновенную.

$$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

Так как $q = \frac{1}{10}$, $b = \frac{3}{10}$, то по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии $0,(3) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots = \dfrac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q|<1$

Обучающие задания

1 Проверьте условие $|q|<1$ для знаменателя геометрической прогрессии и найдите сумму прогрессии.

a) $18;\ 6;\ 2;\ ......$ b) $0{,}3;\ 0{,}03;\ 0{,}003;\ .....$

2 Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии.

a) $-\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ -\frac{1}{32};\ ....$ b) $1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ ....$

3 Зная сумму бесконечной геометрической прогрессии и первый член, найдите знаменатель прогрессии.

a) $S=4,\ b_1=1$ b) $S=12,\ b_1=3$ c) $S=-\frac{1}{9},\ b_1=-\frac{1}{6}$

d) $S=8;\ b_1=\frac{1}{2}$ e) $S=\frac{3\sqrt{3}}{2};\ b_1=\sqrt{3}$ f) $S=\frac{11}{13}\ \ b_1=1$

4 Найдите сумму, слагаемые которой являются членами бесконечной геометрической прогрессии. ($|a|<1$)

a) $1+a+a^2+a^3+.......$ b) $1-a+a^2-a^3+.......$

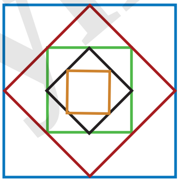
c) $1+a^2+a^4+a^6+.......$ d) $1-a^3+a^6-a^9+......$

5 Преобразуйте периодическую десятичную дробь в обыкновенную.

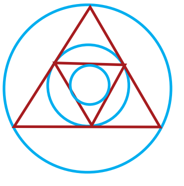
a) $0{,}(2)$ b) $0{,}(15)$ c) $2{,}(6)$ d) $0{,}2(7)$

Прикладные задания

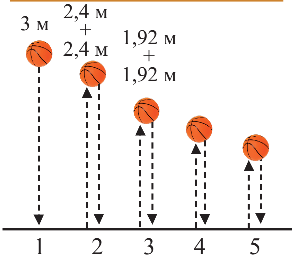
6 Дан квадрат со стороной 6 см. Середины сторон этого квадрата являются вершинами второго квадрата, середины сторон второго квадрата являются вершинами третьего квадрата и т.д. Найдите сумму площадей всех квадратов построенных по этому правилу.



7 В окружность с радиусом 6 см вписан правильный треугольник. В треугольник вписана окружность, в эту окружность - правильный треугольник и т.д. Найдите сумму длин этих окружностей.



8 Мяч падает с высоты 3 м и отскакивает от земли. После каждого удара о землю мяч поднимается на высоту составляющую 80% предыдущей высоты. Найдите общую длину расстояния, которую преодолеет мяч.



Обобщающие задания

1 Напишите первые пять членов последовательности.

a) $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 3$ b) $a_1 = 1$, $a_n = 4a_{n-1}$ c) $a_1 = 17$, $a_n = a_{n-1} + n$ d) $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

2 Сумма n - первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = 2\cdot(5^n - 1)$. Найдите S_3, b_1 и b_4 .

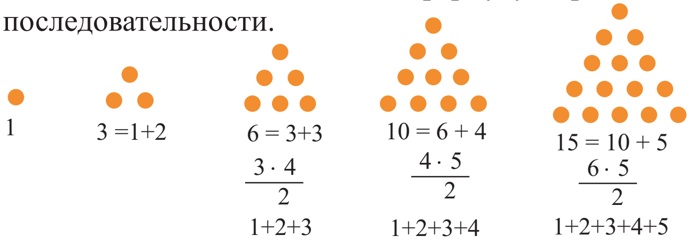
3 Определите вид последовательности и запишите два последующих члена.

a) 5; –3; 5; –3; .... b) $\frac{1}{3}$; 1; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{3}$; ....

c) $\sqrt{3}$; 3; $3\sqrt{3}$; 9; ... d) 1; –1 ; 1; –1 ; ...

4 Строительная компания купила бульдозеры на сумму 500 000 манат. Цена бульдозера каждый год дешевеет на 20 % по сравнению с предыдущим. Напишите формулу, позволяющую определить цену бульдозера в любом n-ом году. Через сколько лет цена бульдозера будет 256 тысяч манат?

5 Исследуйте картину, показанную ниже. Напишите еще 5 членов последовательности. Напишите формулу, определяющую любой член последовательности.



6 Если в арифметической прогрессии $a_3 + a_6 + a_{24} = 12$, то найдите сумму первых 21 членов.

7 Если в арифметической прогрессии $a_4 = 9$, $a_9 = -6$, то сумма скольких первых членов равна 54?

8 В возрастающей последовательности 1, 2, 5, 10, a,12, b, c среднее арифметическое членов равна 12-ти. Каким может быть наибольшее значение b. (a, b, c - натуральные числа)

9 Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию равна 45. Если из первого члена вычесть 2, из второго 9, а из третьего 8, то эти числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

10 **Старинная задача.** Торговец имеет 14 серебряных монет. Масса серебряных монет растет в арифметической прогрессии с разностью равной 4. Масса последней серебряной монеты равен 59 лот. (лот - старинная единица измерения и равен 12,8 граммам). Чему равна масса всех монет?

Обобщающие задания

11 Найдите сумму положительных членов арифметической прогрессии 6,6 ; 5,8 ; ..... .

12 Найдите первый член и разность арифметической прогрессии заданной формулой суммы n - первых членов $S_n = 2n^2 + 3n$.

13 В арифметической прогрессии, членами которой являются целые числа $a_3 = 11$, сумма 8 первых членов больше 72-х, но меньше 80-ти. Найдите a_2 .

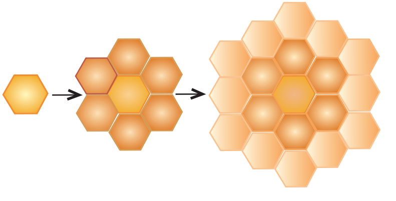
14 Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 8, а сумма последующих четырех членов равна 4-ем. Найдите сумму первых двенадцати членов.

15 Числа a , b, 12 образуют геометрическую прогрессию, числа a , b, 9 – арифметическую прогрессию. Найдите числа a и b.

16 Рабочие пчелы первоначально создают правильную шестиугольную клетку, на 2-ом этапе на сторонах этого шестиугольника создают новые клетки и плетут медовую сетку.

а) Сколько шестиугольников сплетут пчелы на 4-ом, 5-ом этапе?

b) Напишите формулу для нахождения количества построенных шестиугольников на любом n-ом этапе.



17 В первую секунду тело проходит 6 м, в каждую последующую секунду проходит на 4 м больше предыдущего. а) Какой путь преодолеет тело за 20 секунд? b) За сколько секунд тело преодолеет расстояние 4800 м?

18 Тахир и Орхан мечтают купить велосипед. Стоимость велосипеда 120 манат. Тахир думает, что если отец даст ему в первый день 4 маната, а в каждый последующий день на 4 маната больше предыдущего, то за 7 дней сможет собрать нужную сумму. А Орхан считает, что если отец ему в первый день даст 1 манат, а в каждый последующий день в 2 раза больше предыдущего, то за 7 дней сможет собрать нужную сумму. Кто из них прав?

19 Фирмы А и В по производству компьютеров начали свою деятельность в 2000 году и их доход в этом году составил 2 миллиона манат и 25 тысяч манат, соответственно. До 2010 года доход фирмы А менялся арифметической прогрессией, а фирмы В - в геометрической. Доход фирмы А каждый год возрастал на 100 тысяч манат, а фирмы В в 2 раза. Запишите формулу для вычисления денежных поступлений для n-го года. Поступление в 2000 году примите как первый член.

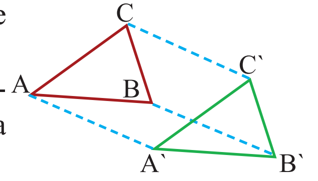
20 Найдите сумму.

а) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$ b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^5} + \frac{7}{2^7} + \dots$

Геометрические преобразования. Движение.

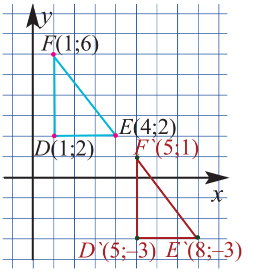
Параллельный перенос

При параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и тоже расстояние и фигура переходит в фигуру конгруэнтную себе. Треугольник A′B′C′ изображенный на рисунке получен параллельным переносом из треугольника ABC. Здесь AA′ = BB′ = CC′, ΔABC ≅ ΔA′B′C



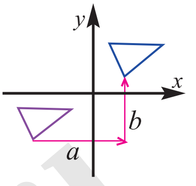
В координатной плоскости каждая точка данного треугольника DEF перемещена на 4 единицы направо, и на 5 единиц вниз.

D(1 ; 2) → D′(5; –3)
E(4; 2) → D′(8; –3)
F(1 ; 6) → F′(5; 1)



Применяя формулу расстояния между двумя точками получим: DE = 3, D′E′ = 3; DF = 4, D′F′ = 4; FE = 5, F′E′ = 5. По признаку конгруэнтности ΔDEF ≅ ΔD′E′F′

При параллельном переносе фигуры произвольная точка A (x; y) переходит в точку A′(x'; y') и между координатами этих точек справедливо равенство: $x' = x + a$, $y' = y + b$. На координатной плоскости при параллельном переносе перемещение по осям координат направо и наверх выражается положительными, налево и вниз отрицательными единицами. Это определяется числами a и b. При параллельном переносе расстояние между двумя точками не меняется.



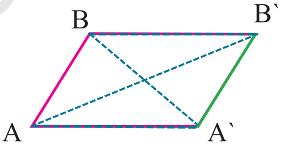
Действительно, при параллельном переносе произвольные точки A(x_1; y_1) и B(x_2; y_2) переходят в точки A′($x_1 + a$; $y_1 + b$) и B′ ($x_2 + a$; $y_2 + b$).

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$ $\qquad A'B' = \sqrt{((x_2 + a) - (x_1 + a))^2 + ((y_2 + b) - (y_1 + b))^2}$

Отсюда AB = A′B′. Значит, при параллельном переносе сохраняется расстояние.

Координаты середины отрезка AB′

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + a}{2} \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}$$



Координаты середины отрезка A′B будут такими же (проверьте сами). Значит, диагонали четырехугольника ABB′A′ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. То есть, этот четырехугольник параллелограм. А у параллелограмма противоположные стороны параллельны. При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в саму себя). Если при переходе одной фигуры в другую, расстояния между точками сохраняются, то такое преобразование называется движением. Параллельный перенос это движение.

Геометрические преобразования. Движение.

1 Запишите параллельные переносы в виде $(x; y) \to (x + a; y + b)$.
a) 4 единицы налево, 2 единицы вниз
b) 2 единицы направо, 2 единицы наверх
c) 3 единицы направо, 5 единиц наверх
d) 3 единицы налево, 1 единица наверх

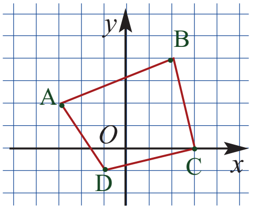
2 Изобразите в тетради данный параллельный перенос четырехугольника на рисунке.

a) $(x; y) \to (x - 1; y + 2)$

b) $(x; y) \to (x + 3; y - 2)$

c) $(x; y) \to (x - 3; y - 1)$

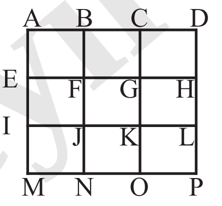
d) $(x; y) \to (x + 1; y + 2)$



3 ΔABC с вершинами A(3, –4), B(3; 2), C(5, 1) при параллельном переносе $(x; y) \to (x - 2; y + 1)$ переходит в $\Delta A'B'C'$. Определите координаты вершины $\Delta A'B'C'$ и нарисуйте треугольник.

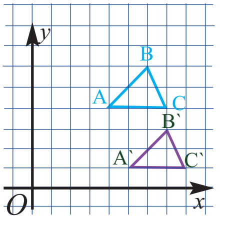
4 Дан ΔABC с вершинами A(2; –1), B(4; 2), C(–3; 3). При параллельном переносе точка A переходит в точку A′(–1; –1). При этом же параллельном переносе точка B переходит в точку B′ и точка C в точку C′. Найдите координаты точек B\` и C\`. Запишите этот параллельный перенос в виде $(x; y) \to (x + a; y + b)$.

5 На картине показаны 9 конгруэнтных прямоугольников. Здесь параллельным переносом точки A образовалась точка G. Определите точки, образованные одним и тем же параллельным переносом каждой из нижеуказанных точек.



a) F b) E c) B d) J e) I

6 Вершинами треугольника ABC являются точки A(4, 4), B(6, 6) и C(7, 4). Запись $(x, y) \to (x + 1, y - 3)$ определяет преобразование ΔABC в $\Delta A'B'C'$. Докажите что $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.



План для доказательства:
1) Применив параллельный перенос найдите координаты точек A\`, B\`, C\`.
2) Примените формулу расстояния между двумя точками.
3) Воспользуйтесь свойством конгруэнтности треугольников.

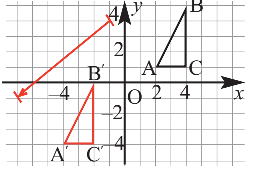
7 Запишите новые координаты точек при параллельном переносе.

a) 3 единицы по оси Ox и –2 единицы по оси Oy
F(–4; 1), A(–2;, 5), S(–1; 4), N(–1; 2)

b) –4 единицы по оси Ox и –3 единицы по оси Oy D(–4; –3), E(–2; –2), F(–2; –4)

Параллельный перенос и векторы

Каждый параллельный перенос определяет один вектор. То есть при параллельном переносе перемещение всех точек фигуры выполняется по одному вектору. Выражение параллельного переноса вектором упрощает запись. Компоненты вектора $\vec{u}\langle a\,; b\rangle$ показывают изменения координат точек относительно осей Ox и Oy. На картине изображен параллельный перенос ΔABC на вектор $\vec{u}\langle -6; -5\rangle$. Воспользуясь компонентами вектора можно определить перемещение фигуры. Все точки треугольника ABC перемещаясь на длину вектора $\vec{u}\langle -6; -5\rangle$ переходят в точки треугольника ΔA′B′C′.



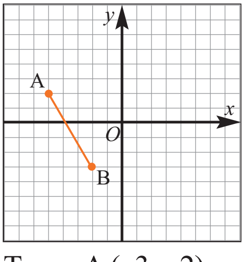
вектор параллельного переноса: ⟨–6; –5⟩

Длина вектора $|\vec{u}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} \approx 7{,}8$ (единиц)

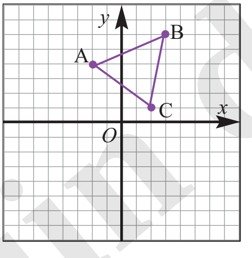
8 Напишите векторы компонентами, соответствующие параллельным переносам.
a) 5 единиц направо 8 единиц наверх
b) 2 единицы налево, 5 единиц наверх
c) 3 единицы налево, 5 единиц вниз
d) 4 единицы налево, 5 единиц вниз

9 Выполните параллельный перенос фигур по заданному вектору:

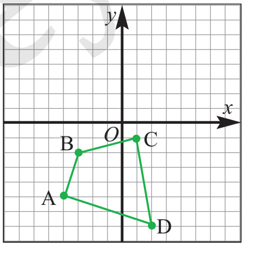
a) ⟨–2; 5⟩



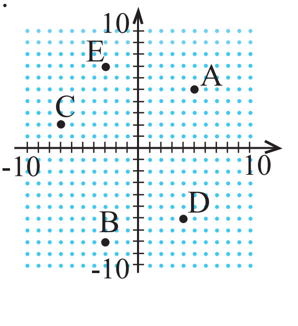
b) ⟨1; –4⟩



c) ⟨3; 2⟩



10 Точка A (–3; –2) параллельно перенесена по правилу $(x\,; y) \rightarrow (x + 5; y + 3)$ и преобразована в точку A′.
1) Запишите вектор определяющий параллельный перенос;
2) Запишите координаты точки A′.



11 Запишите вектор определяющий параллельный перенос.
a) B → D b) A → C c) A → B

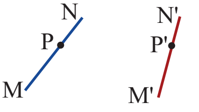
Геометрические преобразования. Движение.

Движение и конгруэнтные фигуры

Пусть каждой точке фигуры F противопоставлена определенная точка плоскости. Множество таких точек образует фигуру F′. В этом случае говорят, что фигура F′ получена преобразованием фигуры F. Плоскость так же является геометрической фигурой. При преобразовании плоскости произвольная точка переходит в точку этой же плоскости и причем каждая точка преобразуется в определенную точку. Если при преобразовании одной фигуры в другую расстояние между точками сохраняется, то все геометрические свойства фигуры сохраняются и фигура преобразуется в конгруэнтную фигуру. Такие преобразования называются движением. Результат последовательных движений также является движением.

Теорема. При движении отрезок преобразуется в отрезок.

Доказательство. Пусть при движении концы отрезка MN переходят соответственно в точки M′ и N′. Докажем что, отрезок MN переходит в отрезок M′ N′. На отрезке MN берем произвольную точку P: MP + PM = MN. Пусть точка P преобразуется в точку P′. Так как при движении расстояния между точками сохраняются M'N' = MN, M'P' = MP, N'P' = NP. Отсюда M'P' + P'N' = M'N'. А это значит, что точка P' находится на отрезке M'N', то есть точка P отрезка MN переходит в точку отрезка M′ N′, и наоборот в точку P' переходит точка P отрезка MN, удовлетворяющее условию MP = M'P'. Теорема доказана.



Следствие. При движении каждая сторона треугольника переходит в конгруэнтный отрезок, и поэтому по признаку CCC треугольник преобразуется в конгруэнтный треугольник. При движении прямая переходит в прямую, отрезок в отрезок и угол между полупрямыми сохраняется.

При таких преобразованиях как параллельный перенос, центральная симметрия, осевая симметрия, поворот, фигура переходит в конгруэнтную фигуру. Исследуем это при помощи оси симметрии (отражения).

Теорема. Осевая симметрия (отражение) есть движение.

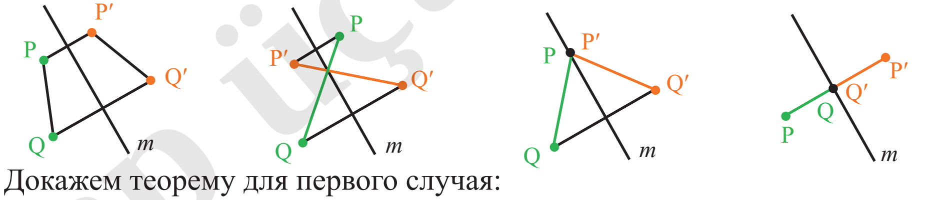
На рисунке изображено отражение отрезка PQ относительно прямой *m*.
По расположению отрезка PQ и прямой *m* возможны 4 различных случая.

1. Точки P и Q лежат по одну сторону от прямой *m*.

1. Точки P и Q лежат по разные стороны от прямой *m*.

1. Одна из точек лежит на прямой, PQ не перпендикулярен прямой *m*.

4. Точка Q лежит на прямой *m*, PQ ⊥ m



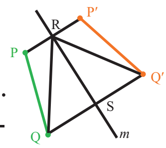
Докажем теорему для первого случая:

Текстовое доказательство.

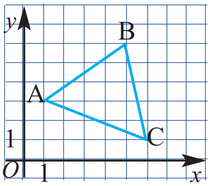
В этом случае точки P и Q лежат по одну сторону от прямой *m*.

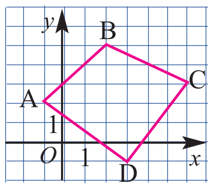
Геометрические преобразования. Движение.

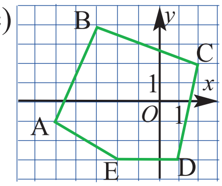
Из определения отражения следует, что так как отрезок RS- серединный перпендикулярный отрезков PP' и QQ', то $RQ \cong RQ'$ и $\angle QRS \cong \angle Q'RS$. $PR \cong RP'$, $\angle PRQ \cong \angle P'RQ'$. Тогда по признаку СУС $\Delta RQP \cong \Delta RQ'P'$. Так как у конгруэнтных треугольников соответственные стороны конгруэнтны, то $PQ = P'Q'$. Теорема доказана.



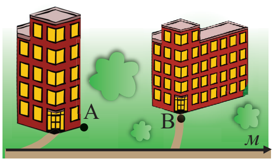
12 Изобразите отражение многоугольников относительно осей *Ox* и *Oy*.

a) 

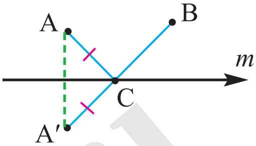
b) 

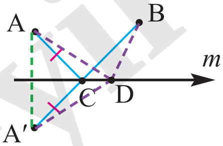
c) 

13 **Пример 1.** Для того, чтобы провести телефон в зданиях A и B, на краю дороги нужно установить распределительный прибор в такой точке C, чтобы использовать как можно меньше кабеля, т.е. расстояние AC + BC должно быть минимальным?



Решение. Отметим точку A′ полученную отражением точки A относительно прямой *m*. Нарисуем отрезок A′B и пересечение с прямой *m* обозначим точкой C. Отрезок A′B самое короткое расстояние между точками A′ и B и так как AC = AC′, то точка C самая выгодная точка для этой цели. Действительно, для любой другой точки D прямой *m*, по неравенству треугольника:





$$AD + DB = A'D + DB > A'B = A'C + CB = AC + CB$$

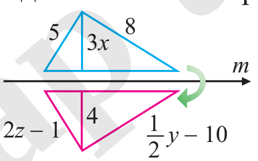
14 На оси абсцисс найдите такую точку C, чтобы AC + BC было минимальным.

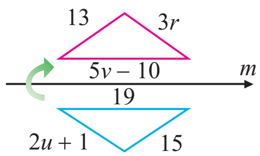
a) A(1, 5), B(7, 1) b) A(2, –2), B(11, –4)

c) A(–1, 4), B(6, 3) d) A(–4, 6), B(3, 9)

Пример. На оси *Ox* найдите такую точку C, чтобы AC + CB было минимальным. Точку A(1; 5) отражаем относительно O*x*: A′(1; –5). Уравнение прямой проходящей через точку A′(1; –5) и B(7; 1) есть $y = x - 6$. Эта прямая пересекает ось *Ox* в точке C (6; 0).

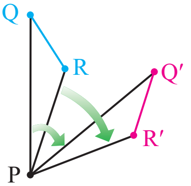
15 На рисунке изображено отображение относительно прямой *m*. Найдите значения переменных.



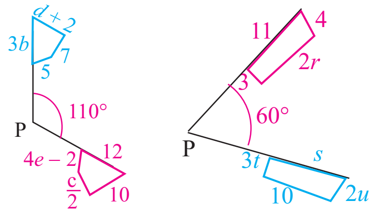


Геометрические преобразования. Движение.

16 Рисунок отображает перемещение точки Q в Q', R в R' в результате поворота . Докажите: $PQ \cong P'Q'$
План для доказательства: По определению поворота $PQ \cong PQ'$, $PR = PR'$ и $\angle QPQ' \cong \angle RPR'$: Завершите доказательство конгруэнтных треугольников.

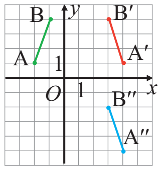


17 На картине изображен поворот многоугольника вокруг точки P . По данным, найдите переменные.

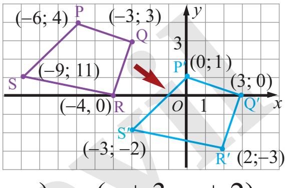


18 Вершинами треугольника являются точки A(–1, 0), B(2, 3), C(3, –3). Этот треугольник был параллельно перемещен на вектор $\vec{u}\langle 4; -2\rangle$. Запишите новые координаты вершин треугольника.

19 В результате каких двух последовательных движений отрезок AB преобразуется в отрезок $A''B''$?

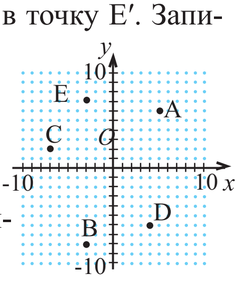


20 Покажите по рисунку вектор используемый при параллельном переносе.



21 a) Напишите словами изменение координат$(x\,;\,y) \to (x + 3;\, y + 2)$
b) Точка A (–3; 5) в результате отражения относительно оси Ox переходит в точку A'. Напишите координаты точки A' .
c) Точка D (3; 4) совершила поворот относительно начала координат на 180º. Напишите координаты точки D'. d) Точка E (–3; 4) при параллельном переносе на вектор $\vec{u}\langle 4;\ 5\rangle$ переходит в точку E′. Запишите координаты точки E'.

22 По данным найдите точку, в которую переходит точка C при параллельном переносе.
a) ⟨4; 5⟩ b) ⟨11; –8⟩



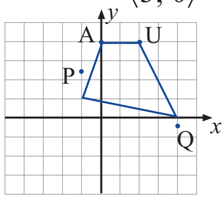
23 Допишите правило изменения координат на координатной плоскости при каждом повороте относительно начала координат (по часовой стрелке и против часовой стрелки). Покажите на рисунке.

a) 90° $(x; y) \to (\quad ; \quad)$ b) 180° $(x; y) \to (\quad ; \quad)$
c) 270° $(x; y) \to (\quad ; \quad)$ d) 360° $(x; y) \to (\quad ; \quad)$

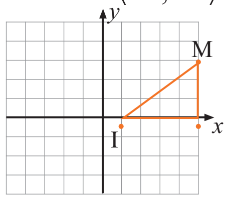
Обобщающие задания

1 Перерисуйте рисунки в тетрадь. Выполните параллельный перенос по данному вектору.

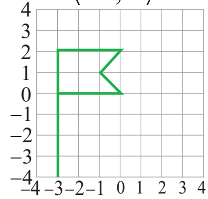
a) $\langle 3; 0\rangle$



b) $\langle -4; -1\rangle$



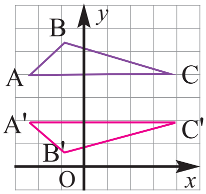
c) $\langle -2; 2\rangle$



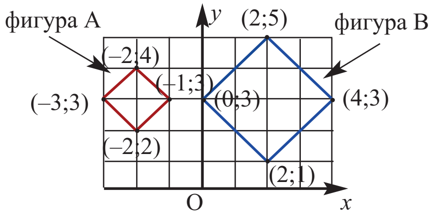
2 При параллельном переносе точка P (6;–2) переходит в точку P′. Для каждого случая определите вектор параллельного переноса.

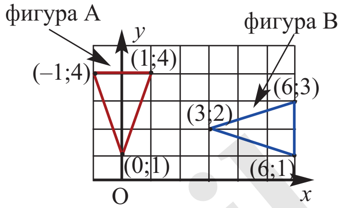
a) P′ (2; 0) b) P′ (–3; 1) c) P′ (8; –3)

3 Фигура A отражением переходит в фигуру B. Определите линию отражения.



4 Представьте два последовательных преобразования, при которых из фигуры A можно было бы получить фигуру B.





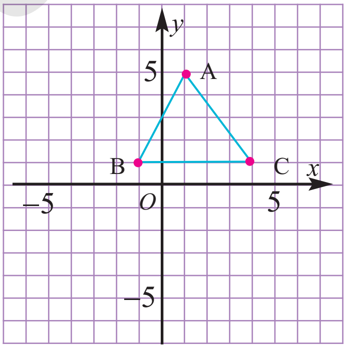
5 Точки A (2, –2), B (2, 3), C (–4, –2) вершины ΔABC. Треугольник отражен относительно оси Ox и повернут на 90° против часовой стрелки вокруг начала координат, далее перемещен на 3 единицы вниз и на 2 единицы налево. Нарисуйте рисунок соответствующий каждому движению и напишите координаты вершин треугольника:

a) после отражения;

b) после поворота;

c) после параллельного переноса.

6 После каждого преобразования напишите координаты точек A', B', C'.



1) Параллельный перенос на вектор $\langle 3; 0\rangle$;

2) Параллельный перенос на вектор $\langle -4; 2\rangle$;

3) Отражение относительно Oy;

4) Отражение относительно прямой $x = -2$;

5) Поворот вокруг точки C на 90° против часовой стрелки;

6) Поворот вокруг начала координат на 180°;

7) Гомотетия с коэффициентом $k = 2$ и центром в точке A.

8) Гомотетия с коэффициентом $k = 2$ и центром в начале координат.

Раздел

6

Статистика
Вероятность

Группировка и представление информации
- Группировка информации
- Частота (рассеивание) информации
- Относительная частота.
Представление информации
- Графики распределения информации

Анализ и представление информации
- Среднее арифметическое по частоте распределения
- Полигон частот

Число возможных событий
- Пермутация
- Число пермутаций во множестве с повторяющимися элементами
- Комбинезон

Пермутация, комбинезон и вероятность

Группировка и представление информации

Группировка информации. Частота информации

Группирование данных в классы, определение частот информации, составление таблицы частот и представление информации рассмотрим на примере.

Пример. Представленные ниже данные отражают информацию о возрасте 50-ти пользователей интернета. Информацию представьте в виде таблицы частот.

50 40 41 17 11 7 22 44 28 21 19 23 37 51 54 42 88
41 78 56 72 56 17 7 69 30 80 56 29 33 46 31 39 20
18 29 34 59 73 77 36 39 30 62 54 67 39 31 53 44

1. Разделим информацию на 7 классов, сгруппировав ее в определенных интервалах.
2. Определим размах каждого класса - интервала. Для этого от наибольшего числа (88) вычтем наименьшее (7) и разделим на число классов: $(88 - 7) : 7 \approx 11{,}57 \approx 12$
3. Как видно, наименьшее значение равно 7. Это наименьшее граничное значение первого класса, а наибольшее - будет 18. Наименьшее значение второго класса 19, а наибольшее 30. Границами 3-го класса будут числа 31 и 42 и.т.д. (Не забудьте включить граничную информацию в общее количество чисел и обратите внимание, чтобы не происходило перекрытие классов.)
4. Построим таблицу частот.

Класс (возраст)	7-18	19-30	31-42	43-54	55-66	67-78	79-90	
Чёрточки	𝍸 |	𝍸 𝍸	𝍸𝍸|||	𝍸 |||	𝍸	𝍸 |	||	
Частота	6	10	13	8	5	6	2	Всего: 50

Систематизирование и представление базы информации можно обобщить как указано ниже.

1. В базе данных по числовым значениям (или по категориям - цвет, вид и т.д) информация группируется в классы - интервалы. Рекомендуется, чтобы количество классов было между 5 и 20.
2. Определяется размах классов-интервалов. Для этого разность наибольшего и наименьшего значения информации делится на число классов. Целая часть частного принимается за величину класса.
3. Определяется граничные значения- наибольшее и наименьшее значение каждого класса - интервала. Наименьшее значение первого интервала дается в базе информации, а наибольшее - находится при помощи размаха класса.
4. Строится таблица частот. Она состоит из граничных значений классов и частот, нарисованных в виде чёрточек и записанных числом.

Группировка и представление информации

Относительная частота

Для анализа и представления информации пользуются такими показателями как **средняя оценка класса**, **относительная частота.**

Средняя оценка класса (средняя точка интервала) равна полусумме наименьшего и наибольшего граничных значений. Этот показатель, коротко называют **оценкой класса**.

Относительная частота определяется как отношение значения частоты класса к общему количеству информации.

Определим эти показатели на данном примере:

Класс	Частота	Средняя оценка класса	Относительная частота
7-18	6	$\frac{7+18}{2}=12{,}5$	$\frac{6}{50}=0{,}12$
19-30	10	$\frac{19+30}{2}=24{,}5$	$\frac{10}{50}=0{,}2$
31-42	13	$\frac{31+42}{2}=36{,}5$	$\frac{13}{50}=0{,}26$
. . .	. . .	. . .	. . .

Как видно из последовательности 12,5; 24,5; 36,5; ... , после нахождения средней оценки первого класса, средняя оценка каждого последующего класса равна сумме предыдущего с размахом класса (в этом случае с 12). Представим базу данных следующей таблицей с соответствующими показателями.

Возраст пользователей и срок пользования			
Класс (возраст)	**Частота**	**Средняя оценка класса**	**Относительная частота**
7-18	6	12,5	0,12
19-30	10	24,5	0,2
31-42	13	36,5	0,26
43-54	8	48,5	0,16
55-66	5	60,5	0,1
67-78	6	72,5	0,12
79-90	2	84,5	0,04
	Всего: 50		Всего : 1

Относительная частота выражает (в виде дроби или процента), какую часть общей информации составляет определенная (данная) информация. Например, из таблицы видно, что 26% пользователей интернета люди в возрасте от 31 до 42 лет.

Группировка и представление информации

1 Следующую информацию сгруппируйте по классам.
a) **Продажа.** Количество классов: 6
Информация: Сумма (в манатах), полученная от продажи в августе:
2114, 2468, 7119, 1876, 4105, 3183, 1932, 1355, 4278, 1030, 2000, 1077, 5835, 1512, 1697, 2478, 3981, 1643, 1858, 1500, 4608, 1000
b) **Время реакции.** Количество классов: 8
Информация: Время реакции на голосовое предупреждение (в миллисекундах) 30 женщин.
507, 389, 305, 291, 336, 310, 514, 382, 320, 450, 309, 416, 359, 442, 307, 337, 373, 469, 351, 411, 388, 422, 413, 428, 387, 454, 323, 441, 388, 426

2 Следующий ряд информации отражает результат оценивания 50 учеников по предмету математика по 100-бальной системе.
43, 88, 25, 93, 68, 81, 29, 41, 45, 87, 34, 50, 61, 75, 51, 96, 20, 13, 18, 35, 25, 77, 62, 98, 47, 36, 15, 40, 49, 25, 39, 60, 37, 50, 19, 86, 42, 29, 32, 61, 45, 68, 41, 87, 61, 44, 67, 30, 54, 28.
a) Разделите информацию на классы; b) Составьте таблицу частот;
c) Добавив в таблицу столбик, выражающий относительную частоту, нарисуйте таблицу заново.

3 Множество информации охватывает 45 выбранных образцов. Наименьшее значение равняется 0, а наибольшее 28. Какой размах класса предложили бы вы, для этой информации? Запишите числовые интервалы соответствующие классам.

4 26 учеников класса выполнили оценочные задания по математике. Оценки, полученные учениками записаны в таблице. Представьте информацию таблицей, содержащую такие показатели как: частота и относительная частота.

3 2 3 3 4 3 1 2 5 1
5 4 2 1 1 3 3 4 1 2
1 4 5 4 2 2

5 1) Ниже показаны результаты взвешивания спортсменов. Представьте информацию таблицей.

50, 50, 53, 53, 54, 55, 55, 55, 56, 60, 62, 62, 62, 64, 64, 64, 65, 65, 65, 66, 66, 66, 70, 72, 72, 72, 75, 75, 76, 80, 80, 80, 81, 81, 82, 82, 83, 84, 85, 85, 85, 86, 87, 93, 94, 97, 98, 98, 100, 100

2) Составьте таблицу частот, отражающую вес учеников вашего класса. Представьте сравнительную информацию по относительной частоте.

6 Выполните задания, пользуясь таблицей.
a) Определите размерность каждого класса;
b) Определите среднюю оценку каждого класса;
c) Вычислите относительные частоты.

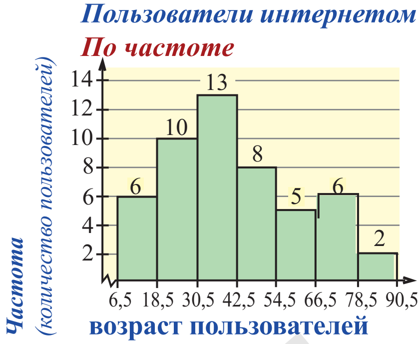
Класс	Частота
10-19	8
20-29	120
30-39	230
40-49	310
50-59	160
60-69	72
70-79	20

Представление информации.
Графики распределения информации

Графики распределения информации

Гистограмма частот. Одной из самых выгодных форм представления распределения информации является гистограмма. Построим гистограмму частот рассмотренного нами примера о пользователях интернета: 1. Размах классов с граничными значениями или среднее значение класса помещается на горизонтальной оси, а значения частот на вертикальной оси. 2. Соседние столбики гистограммы должны касаться. То есть граничные точки класса должны определяться таким образом, чтобы не образовалась пустота. Например, наибольшее значение 1-го класса 18; наименьшее значение 2-го класса 19. Расстояние делится между двумя соседними классами. Половина равна 0,5. Значит, граничные точки 1-го класса будут 6,5-18,5 и т.д.

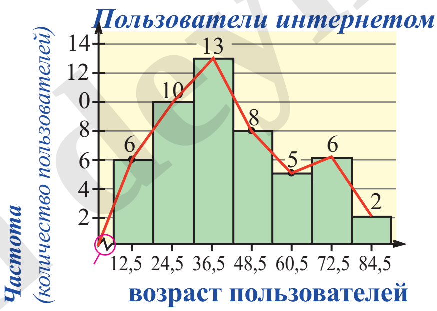
Класс (возраст)	Границы	Частота
7-18	6,5-18,5	6
19-30	18,5-30,5	10
31-42	30,5-42,5	13
43-54	42,5-54,5	8
55-66	54,5-66,5	5
67-78	66,5-78,5	6
79-90	78,5-90,5	2



Представление информации. Из гистограммы частот видно, что возраст более половины пользователей меньше 42-х лет.

Полигон частот отражает графическую информацию распределения частоты. Полигон частот можно построить 2 способами.

1. Пользуясь гистограммой:
- строится гистограмма;
- отмечается средняя точка интервалов (на столбцах гистограммы);
- эти точки соединяются.

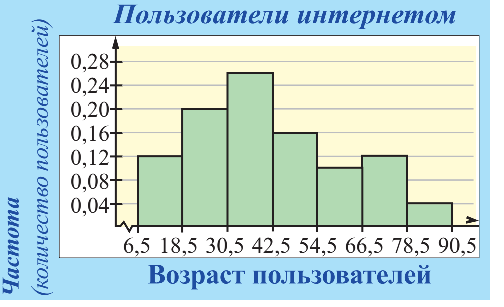


2. Пользуясь таблицей частот:
- На оси абсцисс отмечается средняя оценка класса с соответствующим масштабом, на оси ординат - частота соответствующая классу.
- Отмеченные точки соединяются. Полученный график распределения информации называется полигоном частот.

Представление информации. Графики распределения информации

Гистограмма относительных частот

Для наглядности, сравнения собранной информации, во многих случаях, более удобно представить информацию с помощью гистограммы относительных частот или полигона относительных частот.

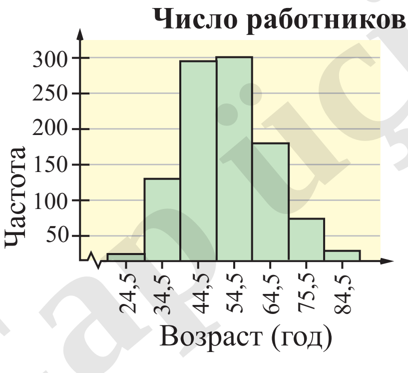


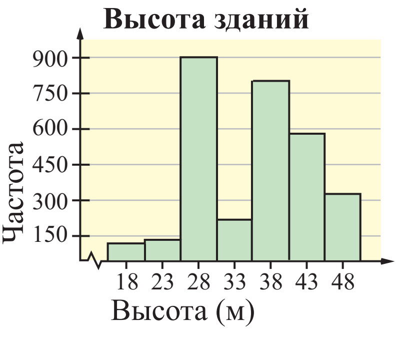
Из гистограммы частот видно, что возраст 25% пользователей между 30 и 42 годами.

1 Данная информация отражает результаты опроса, проведенного в различных семьях о ежемесячных затратах на продукты питания.
a) Постройте таблицу частот соответственно информации.
b) Представьте информацию полигоном частот.

279	205	279	266	199	177	162	232	303
192	181	321	309	246	278	50	41	335
116	100	151	240	474	297	170	188	320
429	294	570	342	279	235	434	123	325

2 1) По гистограммам определите:
a) число классов;
b) размах классов;
c) классы с наименьшей и наибольшей частотой и приблизительные значения этих частот;
2) Постройте полигон частот соответствующий каждой гистограмме.





Представление информации. Графики распределения информации

3 По графику полигона частот на рисунке, выполните задания.
a) Определите классы с наибольшей и с наименьшей частотой.
b) Сколько приблизительно людей набрали меньше 50 баллов?

4 Таблица отражает информацию о высоте деревьев в лесу.

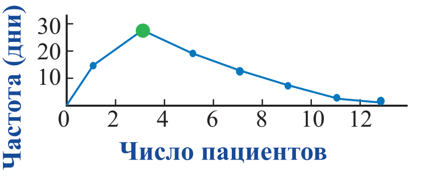
a) Добавив в таблицу столбик, отражающий относительную частоту, нарисуйте ее в тетради.
b) Постройте соответствующую гистограмму и полигон частот.

Класс (высота деревьев, *м*)	10 -13	14-17	18-21	22-25	26-29	30-33	34-37	38-41
Частота (число деревьев)	10	15	20	30	30	20	25	15

5 Сгруппируйте данные в 5 классов:
a) постройте гистограмму частот;
b) постройте гистограмму относительной частот;
c) постройте полигон частот.
d) определите классы с наибольшей и наименьшей частотой.
1) Результаты игры (число очков).
Данные:154 257 195 220 182 240 177 228 235 146 174 192 165 207 185 180 264 169 225 239 148 190 182 205 148 188
2) Площади участков фермеров в деревне (в гектарах)
Данные: 12 7 9 8 9 8 12 10 9 10 6 8 13
12 10 11 7 14 12 9 8 10 9 11 13 8

6 Полигон частот представляет число пациентов обращающихся на станцию скорой медицинской помощи.

a) Представьте информацию отмеченную зеленой точкой.
b) Сколько дней продолжались наблюдения?
c) Составьте таблицу.

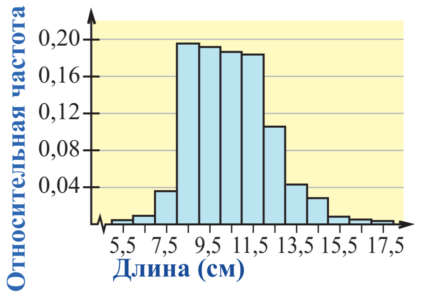


Представление информации.
Графики распределения информации

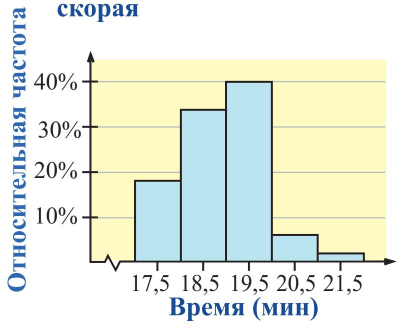
7 a) Определите классы с наибольшей и наименьшей частотой.
b) Сколько процентов составляют рыбы длиной 12,5 см.

8 По гистограмме можно утверждать, что в 50 из 100 вызовов скорая помощь прибыла раньше 10 минут.

Длины рыб в аквариуме (см)



Время за которое прибывает скорая



9 Ниже дана информация о годовом финансовом обороте 40 мелких фирм.

Количество годового (в тысяч манат)	Число фирм
от 45-ти до 55-ти	5
от 55-ти до 65-ти	7
от 65 до 75-ти	14
от 75 до 85-ти	8
от 85 до 95-ти	6

a) Определите частоты, соответствующие информации.
b) Нарисуйте график частот.
c) По графику определите, сколько фирм имеют оборот меньше 85 тысяч манат?
d) Какую часть всех фирм составляет фирмы с оборотом меньше 55 тысяч манат?

10 В таблице дана сумма очков, набранных Сананом в компьютерной игре.
Если не учитывать наименьшее очко, то какой показатель центральной тенденции изменится больше:
среднее арифметическое или медиана?

Очки набранные Сананом			
164	128	151	138
158	162	130	162
109	134	157	137

Анализ информации

Во многих случаях, чтобы проанализировать сгруппированную информацию требуется вычислить среднее арифметическое. На примере, приведенном ниже, исследуем правило нахождения среднего арифметического.

Класс (время разговора)	Частота (Число работников
1–5	12
6 –10	26
11 –15	20
16–20	7
21–25	11

Пример. Таблица показывает: время, затраченное на телефонные разговоры за один день и число работников фирмы. Сколько минут в среднем разговаривает по телефону один работник фирмы?

В этой задаче требуется вычислить среднее арифметическое, соответственно сгруппированной информации. Здесь среднее арифметическое вычисляется по следующему правилу:

1. Находится среднее арифметическое каждого класса.
2. Вычисляется сумма произведений среднего арифметического каждого класса и частоты.
3. Находится сумма частот.
4. Второй результат делится на третий результат. Среднее арифметическое $= \dfrac{883}{76} \approx 11{,}6$

Класс	Частота	Среднее значение класса	Частота × среднее значение
1–5	12	3	36
6 –10	26	8	208
11 –15	20	13	260
16–20	7	18	126
21–25	11	23	253
	76		**883**

Таким образом, можно сказать, что в среднем каждый работник этой фирмы в день разговаривает по телефону 11, 6 минут.

Среднее арифметическое по распределению частоты

$\bar{x} = \dfrac{\sum(x \cdot f)}{n}$ *x среднее арифметическое класса, f частота,*
Обратите внимание, что $n = \sum f$.

Знак $\sum$ - показывает сумму и читается “сигма”.

1. Находится среднее значение каждого класса. — $x = \dfrac{\text{наиболь. знач.} + \text{наимень.знач}}{2}$
2. Находится сумма произведений среднего значения и частоты каждого класса. — $\sum(x \cdot f)$
3. Находится сумма частот. — $\text{n} = \sum f$
4. Находится соответствующее значение среднего арифметического. — $\bar{x} = \dfrac{\sum(x \cdot f)}{n}$

Анализ информации

1 Зарплата 8 работников фирмы из 30 равна 110 манат, а 22 работников 330 манат. Найдите средний заработок работников фирмы.

2 Пироги, приготовленные одной и той же фирмой в разных магазинах продаются по разным ценам. Количество пирогов проданных за день и цена одного пирога приведены в таблице. За какую цену, в среднем, фирма продает один пирог?

Продажа пирогов		
магазин	цена	кол.
A	1,20	120
B	1,50	70
C	1,60	110
D	1,10	200

3 Найдите среднее арифметическое по данным в таблице.

a) По набранным очкам в компьютерной игре найдите среднее очко.

Набранные очки	Число игроков
1–5	2
6 –10	5
11 –15	9
16–20	8
21–25	3

b) По информации о массе новорожденных детей за неделю, определите среднюю массу одного ребенка.

Масса	Количество
1 – 1,5	1
1,5 – 2	3
2–2,5	8
2,5–3	15
3–3,5	10
4–4,5	9
4,5–5	0

4 Сгруппируйте информацию по классам, постройте таблицу и вычислите среднее арифметическое.

a) База информации:
Высота 30 кустов (в см)
Число классов: 5
67 76 69 68 72 68 65 63 75 69
66 72 67 66 69 73 64 62 71 73
68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

b) База информации:
Время пребывания 20 больных в больнице (дни)
Число классов: 4
6 9 7 14 4 5 6 8 4 11
10 6 8 6 5 7 6 6 3 11

5 Для чего находится среднее значение класса при подсчете среднего арифметического - соответственно сгруппированной информации? Обоснуйте ваше мнение на нижеприведенном примере. Придумайте и запишите еще одну базу данных.

Масса рыб пойманных из озера (кг)	Число рыб
1–5	2
6 –10	5
11 –15	9
16–20	8
21–25	3

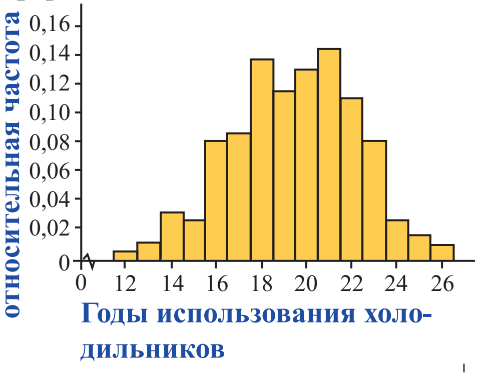
Обобщающие задания

1 **Пример.** Фирма, по производству электрооборудования, провела опрос среди жильцов 200 домов, о том в каком году ими были куплены холодильники. Результаты опроса показаны на гистограмме.

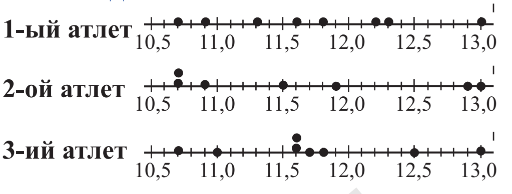
а) По гистограмме постройте таблицу, со следующими показателями: классы, размах классов, частоту информации.

b) Не проводя вычислений - предположите чему равно среднее арифметическое. К какому из чисел ближе среднее арифметическое: 15; 20 или 25?

c) Вычислите среднее арифметическое и проверьте предположение.



2 На диаграмме показаны результаты бега трех атлетов. Для каждого из них определите средний результат. О каком спортсмене можно сказать, что он показывает более стабильный результат. Обоснуйте ваше мнение.



3 По данным постройте таблицу частот.

Рост детей. Число классов: 5, Информация: рост 30-ти детей:
67 76 69 68 72 68 65 63 75 69 66 72 67 66 69 73 64 62 71 73
68 72 71 65 69 66 74 72 68 69

4 По данным постройте гистограмму частот и полигон относительных частот.

a)

Рост девочек	Число
140-145	3
146-151	7
152-157	12
158-163	6
164-169	2

b)

Рост мальчиков	Число
145-150	2
151-156	3
157-162	8
163-168	11
169-174	6

5 По данным постройте гистограмму относительной частоты. Вычислите среднее арифметическое.

Время проживания в отеле. Число классов: 6
Информация: время проживания в отели 20 человек:
6 9 10 6 11 7 14 6 5 7 6 4 5 6 8 4 11 8 6 3

Пермутации

Пермутация - перестановка. ${}_nP_n$

Пример 1. Предположим, что номера автомобилей составляются с помощью последовательно записанных трех латинских букв и трех цифр. Сколько различных автомобильных номеров можно составить?
а) разрешается повторение букв b) не разрешается повторение букв.

	Буквы			Цифры			Общее число выборок
a)	26	26	26	10	10	10	$26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10 =$ $= 17\ 57\ 6000$
b)	26	25	24	10	10	10	$26\cdot 25\cdot 24\cdot 10\cdot 10\cdot 10 =$ $= 15\ 600\ 000$

Принцип умножения. Если элемент a можно выбрать n способами, а при любом выборе a элемент b можно выбрать m способами, то пару (a, b) можно выбрать $m\times n$ способами.

Пермутация. В некоторых случаях требуется найти число возможных вариантов по порядку расположения элементов входящих во множество. Задачи такого типа мы решали при помощи разветвляющейся диаграммы или составлением списка. Например, сколько трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 1, 2, 3? 123, 132, 213, 231, 312, 321. А теперь выведем формулу для нахождения числа всех возможных перестановок. Первый элемент можно выбрать из 3-х элементного множества тремя способами; 2-ой элемент из оставшегося 2-х элементного множества двумя способами; 3-ий элемент можно выбрать из одноэлементного множества одним способом. Тогда число всех возможных перестановок будет $3\cdot 2\cdot 1 = 6$. Произведение $3\cdot 2\cdot 1$ коротко записывается как 3! и читается “три факториал”.
$1! = 1$, $2! = 2\cdot 1 = 2$, $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$...., и т.д. Принято, что $0! = 1$.

$$\boldsymbol{n! = n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}$$

Упорядоченное множество элементов заданного конечного множества, отличающегося только порядком их элементов называется ***пермутацией*** (*перестановкой*).

Первый элемент пермутации можно выбрать из n- элементного множества n способами; 2-ой элемент из оставшегося $(n - 1)$ элементного множества $(n - 1)$ способами, 3-ий элемент из оставшегося $(n - 2)$ элементного множества $(n - 2)$ способами и .т.д. Наконец, n-ый (последний) элемент можно выбрать одним способом. Тогда число всех пермутаций по принципу умножения будет: $\boldsymbol{{}_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1}$.
Число всех возможных пермутаций $\boldsymbol{n}$ - элементного множества записывается как ${}_n\mathbf{P}_n$ и вычисляется по формуле $\boldsymbol{{}_nP_n = n!}$.

Пример 2. Сколькими различными способами можно расставить в ряд 5 человек? Здесь $n = 5$, ${}_5P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

Пермутации

1 Сколько чисел можно составить перестановкой цифр числа 1234?

2 В турнире участвуют 6 человек. Сколькими различными способами могут быть распределены места в турнирной таблице.

3 Сколько пятизначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 ?

4 Вычислите.

a) $\dfrac{8!}{6!}$ b) $\dfrac{18! - 2 \cdot 17!}{16! + 15\,!}$ c) $\dfrac{9! \cdot 5!}{8! \cdot 6!}$ d) $\dfrac{{}_5P_5 - 2 \cdot {}_3P_3}{{}_4P_4 + 5 \cdot {}_3P_3}$

5 Сколько различных “слов” можно получить из букв слова “АТОМ”?

6 Сколькими разными способами можно построить в ряд 8 школьников, при условии чтобы Лала и Эльмир стояли рядом.

7 Сколькими различными способами можно рассадить 6 человек вокруг круглого стола?

8 Переставляя буквы в слове “ПЕРМУТАЦИЯ” строятся различные “слова”. Найдите число слов, в которых гласные записаны рядом.

9 В классе 8 учеников из которых 5 мальчиков, 3 девочки. Сколько существуют возможных вариантов последовательного выхода их из дверей: a) сначала выходят девочки; b) сначала выходят мальчики; c) могут выйти в любой последовательности.

Число пермутаций во множестве с повторяющимися элементами

Пример 1. Сколько различных слов с различным произношением можно получить переставляя буквы в слове АЛТАЙ?

Решение: Если буквы были бы различными, то 5! перестановками можно построить различные слова. Однако, при каждой такой перестановке, если поменять местами две буквы А между собой слово не изменится.

Поэтому число различных перестановок будет в два раза меньше, то есть $\dfrac{5!}{2} = 60.$

Пример 2. Сколькими способами можно поменять буквы в слове БАНАН? Например, ААБНН, АНАБН, АБАНН и т.д .

Решение: В слове БАНАН имеются две буквы А, две буквы Н и одна буква Б. Число пермутации из 5 элементов равна 5! Однако, две буквы - повторяющиеся, поэтому. Число возможных перестановок:

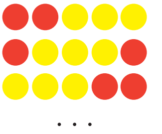
$$\text{БАНАН} \quad \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1}{2 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{60}{2} = 30$$

Если в n-элементном повторяющемся множестве имеется k видов элементов и из них количество 1-го вида равна n_1; 2-го вида n_2; 3-го - n_3, наконец k-го вида n_k, тогда число возможных пермутаций будучи: $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ вычисляется как: $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

Пермутации

10 Сколько слов с различными произношениями можно получить переставляя буквы в словах:
a) НЯНЯ; b) ДАЧА; c) ВОДОПАД; d) ПАРАБОЛА

11 Из 5-ти последовательно расположенных шаров две красные, три желтые. Сколькими способами можно расположить их в ряд?



12 По данным выражениям напишите число элементов, число повторяющихся элементов и число повторений

a) $\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$ b) $\dfrac{12!}{7!\cdot 3!\cdot 2!}$ c) $\dfrac{8!}{4!\cdot 2!\cdot 2!}$

Упорядочные и неупорядочные выбора

Задача. В группе 8 учеников. Сколькими способами можно выбрать председателя группы и редактора? **Решение:** a) Председателя группы можно выбрать из 8-ми учеников 8-ю разными способами; после того как выбрали председателя группы, редактора выбирают из оставшихся 7-и учеников 7-ю разными способами. По правилу умножения число различных выборов $8\cdot 7 = 56$.

Если закодировать учеников числами 1, 2, ... , 8 то выбор последовательностью 3; 5 отличается от выбора последовательностью 5; 3. В первом случае 3-ий ученик выбран председателем, а 5-ый - редактором. А во втором случае наоборот, 5-ый ученик выбран председателем, а 3-ий редактором. b) На первый взгляд эта задача похожа на прежнюю. И здесь одного дежурного можно выбрать 8-ю способами из 8 учеников, а другого из 7 оставшихся учеников 7-ю способами. Однако, в этом случае выборы, например 3; 5 и 5; 3 не различаются и показывают одинаковую пару. Принимая во внимание одинаковые составы, получаем: $\dfrac{8\cdot 7}{2} = 28$ способов.

В подобных задачах особое внимание нужно обратить важности выбора последовательности элементов.

Обучающие задания

13 Сколько двузначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 1; 2; 3; 4; 5; 6.

14 На окружности отметьте точки A,B,C,D,E. Сколько прямых можно провести через любые две из этих точек?

15 Али, Вюгар, Яшар, Лейла, Илаха и Тогрул в соревновании по шахматам между собой набрали различные очки.
a) Найдите число всех возможных вариантов распределения I и II места.
b) Шахматисты, занявшие первые два места завоевали права на участие в зональном туре. Найдите число возможных вариантов.

Пермутации

Пермутации - Перестановки. $_nP_r$

Пример. Сколькими способами можно выбрать в школьную организацию трех учеников из семи - председателем, заместителем и секретарем?
Решение: Председателя можно выбрать из 7 учеников 7-ю способами, заместителя из оставшихся 6-ти учеников 6-ю способами, а секретаря 5-ю способами. Число способов выбора трех учеников из семи будет $7\cdot 6\cdot 5 = 210$. Рассмотрим пермутации, которые имея по “k” элементов, выбранных из числа данных “n” элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения. Из n элементного множества выбрав “k” элементов построим последовательно в ряд. 1-ый элемент ряда можно выбрать из n -элементного множества n способами, 2-ой элемент из оставшихся $(n-1)$-го элемента $(n-1)$-способами и.т.д. наконец k-го элемента $(n-k+1)$ способами: По принципу умножения число пермутаций вычисляется по формуле:

$$_nP_k = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}_{\text{число множителей равен “}k\text{”}} \quad 0\le r\le n.$$

Воспользуюсь знаком факториала указанную выше формулу можно записать короче: $_nP_k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Проверим правильность этого равенства на данном примере:

$$7\cdot 6\cdot 5 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{7!}{4!} = \frac{7!}{(7-3)!}$$

$$_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

16 Каждая буква слова “АЗОТ” написана на отдельной карточке. Сколько различных “слов” можно составить, если любые две будут лежать рядом.

17 Вычислите. a) $_{10}P_3$ b) $_7P_2$ c) $_8P_3$ d) $_5P_4$ e) $_7P_4$

18 Что больше? a) $_8P_2$, или $_6P_3$ b) $_{10}P_3$, или $_7P_5$ c) $_9P_6$, или $_8P_7$

19 Упростите. a) $\dfrac{_5P_3}{_5P_2}$ b) $\dfrac{_8P_5}{_8P_4}$ c) $\dfrac{_7P_3 + {_6P_3}}{_{11}P_2}$ d) $\dfrac{_6P_5 + {_6P_4}}{_6P_3}$

20 У Фидан 6 костюмов. В понедельник, во вторник и в среду она должна участвовать в семинаре. Если в каждой из этих дней Фидан будет одевать разные костюмы, то сколько разных выборов она имеет?

21 Сколькими способами можно положить 4 письма в 6 конвертов, так чтобы в каждом конверте было-бы не больше одного письма.

22 В классе 20 учеников. Сколькими способами можно выбрать председателя и секретаря для проведения классного собрания.

23 Сколькими различными способами могут покинуть автобус трое пассажиров на 5-ти остановках, при условии, что на каждой остановке выходит не более одного пассажира?

24 Сколько можно составить трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6. Сколько из них будет больше 200 ?

Комбинезон, пермутации

Комбинезон

Пример. Для презентации проекта группа из 7 членов должна выбрать троих. Сколькими различными способами могут это сделать члены группы? **Решение**: Не имеет значение в какой последовательности будут выбраны трое. Если выбрать любых трех учеников, построить их последовательности в ряд, то число всех возможных случаев будет ${}_7P_3$. Так как перестановки 3! способами местов в ряду выбранных учеников показывают одинаковый состав, то число различных выборов будет в 3! раза меньше: $\frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$

Число всех выборов "k" элементов из "n" данных без учета их порядка называется комбинезоном. Комбинезоны отличаются друг от друга только элементом. То есть комбинезон "k" - элементное подмножество "n" - элементного множества.

Число k - элементных подмножеств n - элементного множества обозначается ${}_nC_k$ и читается так "комбинезон из n элементов k". Если от каждого k элементного комбинезона образуется k! пермутации, то количество общих пермутаций будет ${}_nP_k$. По принципу умножения имеем. ${}_nP_k = {}_nC_k \cdot k!$

Значит,

$$ {}_nC_k = \frac{{}_nP_k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} $$

число множителей равен k

Пример: ${}_7C_3 = \frac{{}_7P_3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$

Формулу числа комбинезонов можно написать в виде: ${}_nC_k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

Обратите внимание на своеобразную симметрию этой формулы. Если заменить k на $(n-k)$, то получится та же формула. Только факториалы в знаменателе поменяются местами. $\mathbf{{}_nC_k = {}_nC_{n-k}}$. Легко показать что, ${}_nC_0 = 1$, ${}_nC_n = 1$, ${}_nC_1 = n$.

В некоторых вычислениях, относящихся к объединениям возникает необходимость использования программы Microsoft EXCEL или графкалькулятора.

1 Отметьте на окружности точки A,B,C,D,E,F и соедините их попарно отрезками. Сколько отрезков нарисовано?

2 Вычислите. a) ${}_4C_3$ b) ${}_4C_4$ c) ${}_5C_2$ d) ${}_6C_3$ e) ${}_6C_1$ f) ${}_7C_3$

3 Сравните.

a) ${}_8P_2$ и ${}_{11}C_2$ b) ${}_7P_3$ и ${}_7C_3$ c) ${}_{11}P_2$ и ${}_{11}C_2$ d) ${}_7C_3$ и ${}_7C_4$

4 a) Сколькими возможными способами из 12-ти видов освежающих напитков можно выбрать 3 различных напитка.

b) Сколькими возможными способами можно выбрать 2-х финалистов среди 20-ти спортсменов.

c) Менеджером фирмы получены 8 предложений на вакантные рабочие места. Сегодня он пригласит троих на собеседование. Найдите число возможных вариантов.

5 Вычислите и определите что больше: ${}_nP_k$ или ${}_nC_k$ при $n = 6$, $k = 2$.

6 Напишите по одной задаче соответственно каждому данному комбинезону: a) ${}_{10}C_3$ b) ${}_5C_2$ c) ${}_7C_4$

7 Упростите выражения.

a) $\frac{6!}{5!} - \frac{5!}{4!} + \frac{7!}{6!}$ b) $\frac{7! + 6!}{7! - 6!}$ c) $\frac{{}_7C_3}{{}_6P_3}$ d) ${}_7C_3 : {}_8P_5$

Прикладные задания

8 Определите, в каких случаях находятся пермутации, а в каких - комбинезоны и вычислите.

a) Из 20-ти видов цветов выбирают 3.
b) Трехзначный код кредитной карты.
c) Регистрация 9-ти книг из прочитанных 12-ти.
d) Для участия в семинаре выбирают 2-х работников из 9-ти.
e) Из 10-ти спортсменов до финиша доберётся 1-ым, 2-ым, 3-им.

9 Магазин спортивных товаров готовится закупить товары нового сезона. Есть предложение спортивных костюмов 6-ти цветов с пошивом 4-х стилей. Владелец магазина решил выбрать костюмы 4-х цветов и 2-х стилей. Сколько возможных выборов имеет владелец?
Указание: Возможность выбора = Число цветов × Число стилей
из 6 цветов выбор 4-х: ${}_6C_4$
из 4 стилей выбор 2-х : ${}_4C_2$

10 Наргиз хочет из букв своего имени создать пароль для e-mail из 6-ти маленьких букв. Сколькими способами она сможет это сделать?

11 Из 10-ти рекламных шитов 3 белых, 2 серых, 5 голубых. Сколькими разными вариантами можно расположить их в один ряд?

12 Сколькими разными способами могут сесть за круглый стол Азер, Анар, Али, Вели, Видади и Араз при условии, что Али и Вели не будут сидеть рядом?

13 На окружности отмечены 8 точек. Сколько треугольников можно построить с вершинами в этих точках?

14 Сколько параллелограммов можно сосчитать на рисунке?

15 Сколькими разными способами можно ответить на 10 вопросов, записав два ответа - верно и неверно.

16 Сколько разных групп можно составить из 5-ти мальчиков и 4-х девочек при условии, что в группе есть хотя бы одна девочка?

17 В урне 5 белых и 3 красных шара. Сколькими различными способами можно вынуть из урны 3 шара так, чтобы 2 из них были белыми, а 1 красным?

18 Сколькими возможными вариантами могут сесть в одном ряду 4 мальчика и 4 девочки, если:
a) все мальчики и все девочки сядут рядом; b) рядом сядут одна девочка и один мальчик ; c) сядут все и в любой последовательности.

Решение задач по теории вероятности

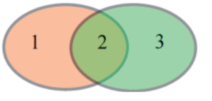
1 Изучите виды событий и правило вычисления вероятности. Решите задачи. Для каждого случая составьте и запишите и вы один пример.

Правило вычисления вероятности: $P(A)=\dfrac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число равновозможных событий}}$

1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: **P(A или B) = P(A) + P(B)**

Пример 1. Буквы слова “МАТЕМАТИКА” разрезаны и собраны в мешочек. Фарах выиграет приз, если первой из мешочка вытащит букву A или İ. Найдите вероятность того, что Фарах выиграет приз.

2. Вероятность совместных событий:



P(A или B) = P(A) + P(B) – P(A и B)

Пример 2. Из 20-ти участников семинара 12 человек разговаривают на английском, 10-на немецком, а 4 из них разговаривают и на английском и на немецком языках. Если из участников семинара будет случайным образом выбран 1 человек, то какова вероятность того, что он разговаривает на английском или немецком языках.

3. Вероятность независимых событий A и B:

P(A и B) = P(A) · P(B)

Пример 3. Игральная кость и монета бросаются одновременно. Если на игральной кости выпадет 6 очков, а на монете герб, то Афаг выиграет приз. Какова вероятность выигрыша Афаг.

4. Вероятность зависимых событий A и B:

P(B после A) = P(A) · P(событие B после A)

Пример 4. В мешочке 5 красных и 3 желтых шар. Из него последовательно не возвращая в мешочек, вынимают два шара. Найдите вероятность того, что оба шара красные.

2 Определите, какими являются события: совместные или несовместные и вычислите их вероятность.

1) Каждая буква Азербайджанского алфавита записана на отдельный карточке и помещена в урну. В случайно вынутой карте: a) будет буква A или какая-либо гласная. b) будет одна из букв L, M или же N.

2) При бросании одной игральной кости: a) P(1 или 5); b) P(нечетное число или же число меньшее 5-ти).

3 Сначала определите являются ли события зависимыми или независимыми, а потом вычислите вероятность.

1) Одна игральная кость была брошена подряд два раза:

a) P(2, потом 3); b) P(два раза 6); c) P(3, любое очко)

2) В коробке имеются карты на которых записаны буквы A, B, G, N, L, Ə, M. Вынимают подряд две карты. Найдите вероятность события. a) P (A, потом Ə), если карты не возвращаются; b) P(L, потом N), если карты возвращаются.

Решение задач по теории вероятности

Пермутации и вероятность

Пример 1. Из 6-ти дисков находящихся в коробке, на которой нет никакой информации, два - с народной музыкой, два - джазовой, два -с эстрадной. Какова вероятность того, что из случайно выбранных двух дисков первый будет с джазом, а второй с эстрадой?

По принципу умножения число благоприятных исходов $2 \cdot 2$, потому что имеется два эстрадных и два джазовых диска. Число возможных результатов выбора двух дисков из 6-ти: ${}_6P_2$

$$P(\text{джаз, эстрада}) = \frac{2 \cdot 2}{{}_6P_2} = \frac{2 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{4}{6 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Ответ: вероятность того, что первый диск джаз, а второй эстрада $\frac{2}{15}$.

Комбинезон и вероятность

Пример 2. В мешочке 12 теннисных мячей из которых 4 с дефектом. Какова вероятность того, что два вынутых из мешочка шара будут с дефектом?

Решение: Число возможных результатов равно ${}_{12}C_2$. В данном случае число благоприятных исходов равно ${}_4C_2$

$$P(\text{2 дефектных}) = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число возможных результатов}} = \frac{{}_4C_2}{{}_{12}C_2}$$

$${}_4C_2 = \frac{{}_4P_2}{2!} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \qquad {}_{12}C_2 = \frac{{}_{12}P_2}{2!} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$$

$$P(\text{2 дефектных}) = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

Пример 3. В урне 5 красных и 3 голубых шара. Наудачу вынимается 2 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров будет красным.

Решение. Обозначим E событие, когда один из вынутых шаров красный. Однако нахождение числа возможных вариантов одного красного шара утомительно. Сначала мы найдем вероятность E′, дополняющую это событие - из 2-х шаров ни один не является красным, т.е. событие, что оба шара будут голубыми. В этом случае число благоприятных событий: ${}_3C_2$.

Число возможных событий: ${}_8C_2$

$$P(E') = \frac{n(E')}{n(S)} = \frac{{}_3C_2}{{}_8C_2} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}}{\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}} = \frac{3}{28}$$

Вероятность события E:

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28} \approx 0{,}89$$

4 В классе 12 девочек и 10 мальчиков. Школа должна отправить в школьную организацию пять представителей. a) Сколько существуют вариантов, что ими окажутся 3 девочки и 2 мальчика?
b) Какова вероятность, случайного выбора 5 мальчиков?
c) Какова вероятность того, что все выбранные представители девочки?

5 Сколько трехзначных чисел с неповторяющимися цифрами можно составить из цифр 2, 3, 5, и 7. Найдите вероятность того, что одно случайно выбранное из этих чисел будет четным?

6 Из 5-ти синих и 4-х красных шаров в коробке, любые три могут быть выбраны различными способами. Найдите вероятность того, что хотя бы один из вынутых шаров будет синего цвета.

7 Конвейер за один выпуск производит 100 батареек и известно, что 2 из которых с дефектом. Батарейки упаковывают случайным образом в коробки по 4 штуки в каждой: a) Какова вероятность, того что в одной случайно выбранной коробке все батарейки будут без дефекта? b) Какое событие является дополнительным событием данного события? Найдите его вероятность. c) Какова вероятность того, что 2 батарейки в этой коробке будут с дефектом? d) Какова вероятность того, что 2 батарейки случайно выбранной коробки будут без дефекта? e) Чему равна вероятность того, что в случайно выбранной коробке будет хотя бы одна батарейка с дефектом?

8 Числа 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, и 13 записаны на карточках и сложены в мешочек. Если вытащить случайным образом три числа, то какова вероятность что эта Пифагорова тройка.

9 Рена, ее подруга Лейла и еще пять учеников участвуют в выборах председателя и заместителя школьной организации. a) Какова вероятность выбора Рены председателем, а Лейлы заместителем? b) Какова вероятность, что на эти должности будут выбраны подруги?

10 Среди трех девочек и пяти мальчиков классный руководитель должен выбрать троих представителей в школьную организацию.
a) Сколькими разными способами он сможет это сделать?
b) В скольких случаях все три представителя будут мальчиками?
c) Найдите вероятность, что все три представителя будут мальчиками.

11 Три девочки и два мальчика строятся в один ряд. Найдите вероятность того, что все мальчики будут стоять рядом.

12 В урне 4 белых и 3 черных шара. Найдите вероятность, того что случайно вынутые 2 шара:
a) оба белые; b) оба черные; c) один белый, а другой черный.

Решение задач по теории вероятности

13 В урне находятся 5 красных и 5 желтых шаров. Из нее наугад и без возврата вынимают 2 шара. Найдите вероятность того, что один из них красный, а второй - желтый.

14 Монету бросают 3 раза. Какова вероятность того, что каждый раз выпадет герб?

15 12 учеников из 9^a, 8 учеников из 9^b хотят добровольно участвовать в организационных работах олимпиады. Если подряд будут выбраны два ученика, то какова вероятность того, что: a) оба будут из 9^b; b) один из 9^a; а другой из 9^b; c) оба из 9^a?

16 a) При бросании одной игральной кости, найдите вероятность выпадения нечетного или простого числа.
b) Одновременно бросают две игральные кости. Найдите вероятность выпадения чисел сумма которых равна 7 или 11.

17 Опрос о том "Откуда люди получают последние новости" выявил следующие результаты: 85 % из интернета, 35 % читают из газет, 25 % из обеих источников. Представьте информацию диаграммой Венна. Если среди респондентов случайно выберут одного, найдите соответствующую вероятность: a) человек, который получает информацию не из газет, а из интернета. b) человек, получает информацию из обеих источников.

18 В коробку собраны карты с числами от 1-до 30-ти. Если вытащить одну карту из коробки, найдите вероятность того, что это число: a) делится на 2 или на 3; b) делится на 2 и не делится на 3; c) делится и на 2 и на 3 .

19 В урне 45 желтых и зеленых шаров. Число шаров относятся соответственно как 5:4. Если вынуть из урны 2 шара, то какова вероятность, что оба шара окажутся желтыми?

Решите задачу по диаграмме Венна.

20 Вычислите вероятность по данным условиям, если выберется один ученик:
a) P (музыка или рисование)
b) P(драма или рисование)
c) P (драма и музыка или драма и рисование)

21 В кошельке три 20-ти манатные, две 10-ти манатные и пять 5-ти манатных купюры. Если из кошелька, не возвращая взять 3 купюры, то какова вероятность, что первая купюра будет 5-ти манатная, вторая - 10-ти манатная, а третья – 20-ти манатная?

21 Буквы слова "АНКАРА" написаны на отдельных карточках и собраны в коробку. Карточки вытаскиваются поочередно и кладутся друг за другом. Найдите вероятность образования слова "АНКАРА".

Обобщающие задания

1 1) Информация показывает заработную плату и число работников на фирме.

Зарплата	Кол.
280 - 330	5
331 - 381	6
382 - 412	4
413 - 443	3
444 - 474	7

a) По информации постройте таблицу относительной частоты. b) У скольких работников зарплата меньше 382-х манат? c) На сколько манат меньше получают зарплату 72% работников? d) Если случайным образом выбрать одного работника, то какова вероятность, того, что его зарплата меньше 413 манат? 2) На фирме - на празднике в качестве подарка - приза разыгрываются 3 холодильника: a) чему равна вероятность выигрыша всех трех холодильников работниками получающими зарплату, меньше чем 331 манат; b) чему равна вероятность выигрыша хотя бы одного холодильника работниками получающими меньше 331 манат?

2 Среди жителей одного поселка было проведено исследование - “сколько телевизоров имеется в каждом доме”. Результаты опроса были как показаны ниже. Сколько телевизоров, в среднем, имеется в одном доме?

Число телевизоров:	0	1	2	3	4	5
Число домов:	1	8	13	10	5	3

3 В школе 56% школьников составляют девочки. Половина их занимается спортом. Число этих девочек равно 140. 65 % мальчиков школы так же занимаются спортом. a) Сколько учеников в этой школе ? b) Сколько мальчиков и сколько девочек в школе? c) Если случайным образом выбрать одного ученика, то чему равна вероятность, того что он занимается спортом ?

4 Из 3-х шестиклассников, 5-ти семиклассников, 4-х восьмиклассников школы для дежурства выбирают 3-х учеников.
a) Найдите вероятность того, что все дежурные из седьмого класса;
b) Найдите вероятность того, что ни один дежурный не является семиклассником.

5 Найдите число возможных вариантов вытянутых трех букв из мешочка с данными буквами. Если из мешочка вытянуть три буквы, найдите вероятность того, что хотя бы одна буква гласная.

a) A B C D E b) E F G H I J K c) M N O P

6 В урне 6 желтых и 8 белых шара.
a) Сколькими возможными вариантами можно вытянуть 3 шара?
b) Найдите вероятность того, что все три шара белые.

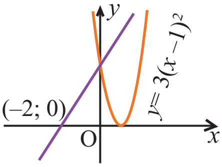
7 Переставляя буквы в слове “ХОРДА” получаются разные “слова”. В скольких из них: a) гласные записаны рядом;
b) гласные не записаны рядом.

8 Решите уравнения:
a) $(n+2)! = 20 \cdot {}_nP_n$ b) ${}_nP_2 = 90$ c) ${}_nC_2 - {}_nC_1 = 9$

Обобщающие задания

1 Посуда, полностью заполненная сахарным песком весит 14,5 кг, а заполненная наполовину весит 7,7 кг. Найдите вес пустой посуды.

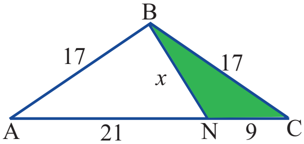
2 Прямая $y = kx+b$ пересекает ось абсцисс в точке (–2; 0), а параболу $y = 3(x-1)^2$ на оси ординат. В какой еще точке пересекается прямая и парабола?



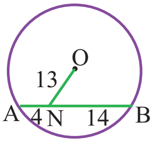
3 Найдите значение выражения:

a) $x^2 - 8x + 15$ при $x = 4 - \sqrt{5}$, b) $x = \sqrt[3]{7}$ при $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

4 По данным рисунка найдите периметр и площадь закрашенной части.



5 Найдите радиус окружности с центром в точке O.



6 Для размещения 56-ти туристов были установлены трехместные и пятиместные палатки. Если всего было установлено 16 палаток, то сколько из них трехместные.

7 В арифметической прогрессии $a_1 = -2$, $a_5 = 18$. Найдите десятый член прогрессии.

8 Напишите уравнение окружности с центром в начале координат и проходящая через данную точку. Найдите площадь сектора соответствующего центральному углу 45°.

a) (0; –10) b) (–3; –1) c) (–4; –4) d) (–6; 4)

9 Четыре куба с ребрами по 4 см у каждого, наложением друг на друга образуют прямоугольный параллелепипед. Найдите его объем и полную поверхность.

10 В пустые клетки запишите соответствующие знаки сравнения (>, <, =).

a) Если $a > b$, $(-a) + b \;\square\; 0$ b) Если $a > b$, $(-a) - (-b) \;\square\; 0$

11 Если Сеймур за 32 минуты читает 24 страницы книги, то:

a) сколько страниц прочитает за 40 минут?

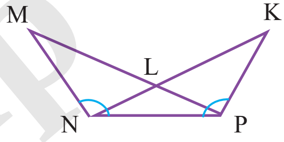
b) за какое время он прочитает книгу, в которой 264 страниц.

12 Решите неравентства:

a) $2(x-3) < 5x$ b) $\dfrac{x-3}{1-\sqrt{2}} > \sqrt{2} + 1$ c) $1 < 3 - 2x \le 7$ d) $2|x-3| - 1 < 3$

13 **Дано:** ΔMLN ≅ ΔKLP

Докажите: ΔMNP ≅ ΔKPN



14 Найдите сумму $\dfrac{S}{x} + \dfrac{S}{y}$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{S}{x+y} = 3 \\ \dfrac{S}{x-y} = 5 \end{cases}$$

Обобщающие задания

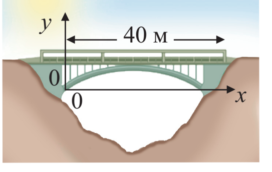
15 $\frac{2}{7}$ части воды из бака израсходовали до обеда, $\frac{1}{2}$ часть - после обеда. Найдите вместимость бака, если вода израсходованная после обеда на 15 *l* больше воды израсходованной до обеда.

16 Вычислите. a) $\dfrac{\text{НОК }(72;\ 90)}{\text{НОД }(72;\ 90)}$ b) $\dfrac{\text{НОК }(36;\ 45)}{\text{НОД }(36;\ 45)}$

17 Урожайность повысилась с 25-ти центнеров до 30-ти центнеров. На сколько процентов повысилась урожайность?

18 Сторона правильного многоугольника равна 8 м, а периметр 64 м. a) Найдите градусную меру каждого внутреннего угла. b) Сколько диагоналей можно провести из одной вершины? c) Найдите количество всех диагоналей?

19 Мост длиной в 40 метров, проложенный через овраг был прикреплен к арке в форме параболы с помощью вертикальных металлических балок. Выбрав координатную систему как показано на рисунке арку можно смоделировать функцией: $f(x) = -0{,}08(x-20)^2 + 32$, $0 \le x \le 40$. Найдите длину балок, которые находятся на расстоянии 5 м, 10 м, 20 м от средней точки моста.



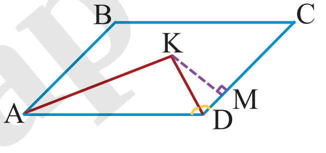
20 a) Покажите, что квадратный корень из $(3 + 2\sqrt{2})$ - x равен $(1 + \sqrt{2})$.
b) Вычислите $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

21 Вычислите значения выражения:
a) $(7x - y)^2 - 2\,(7x - y)\,(x - y) + (x - y)^2$, при $x = \sqrt{2}$.
b) $\dfrac{2\sqrt{2} - ab^2}{2 + b^2} + \dfrac{\sqrt{2}b^2 - 2a}{2 + b^2}$ при $a = \sqrt{2} - 1$

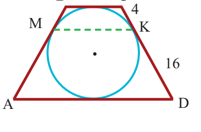
22 За 3 часа автомобиль проехал 240 км.
a) Какое расстояние проедет автомобиль за 5 часов?
b) За сколько часов проедет автомобиль с той-же скоростью 560 км?

23 Число желтых шаров в урне относится к числу зеленых шаров как 4 : 1. Если вытащить из урны половину желтых шаров, то число оставшихся в урне желтых шаров будет на 2 больше зеленых.
1) Сколько всего шаров было вначале в урне? 2) Если вытащить два шара какова вероятность того, что оба шара будут:
a) желтого цвета b) разного цвета.

24 a) Найдите BC, если в параллелограмме ABCD, DK биссектриса, $KM \perp CD$, KM= 6 см и $S_{\Delta AKD}$= 54 см^2



25 По данным на рисунке найдите периметр и площадь равнобедренной трапеции ABCD и длину отрезка MK.



Обобщающие задания

26 a) Длины сторон треугольника относятся как 2 : 3 : 4. Найдите длины сторон треугольника, если его периметр равен 54 см.
b) Боковая сторона равнобедренного треугольника 10 см, высота проведенная к основанию 8 см. Найдите периметр и площадь треугольника и радиусы вписанной, описанной окружностей.

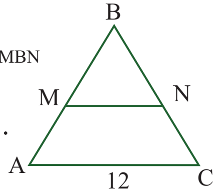
27 Уравнение прямой l имеет вид: $3x - 2y = 6$. Прямая m пересекает прямую l в точке $x = 2$. Если точки $(-1;\ 6)$ и $(x;\ 2)$ лежат на прямой m, то найдите координату x.

28 a) Найдите периметр, площадь, высоту, радиус вписанной окружности ромба с диагоналями 6 см и 8 см.
b) Найдите площадь параллелограмма с периметром 28 см, и высотами 3 см и 4 см.

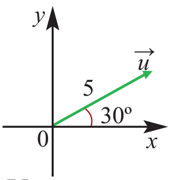
29 Вычислите.
$\sqrt{13} \cdot \sqrt{52} - \sqrt{117^2 - 108^2}$ | $(\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28}$ | $\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$

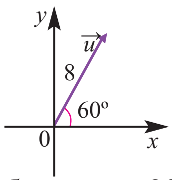
30 В окружности $x^2 - 2x + y^2 + 1 = 4$
a) найдите координаты центра;
b) найдите радиус:
c) вычислите площадь соответствующего круга.

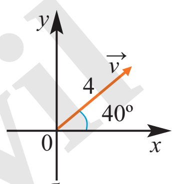
31 $MN \parallel AC$
$S_{AMNC} = 8 \cdot S_{\Delta MBN}$
$AC = 12$
Найдите MN .



32 Напишите каждый вектор с компонентами.

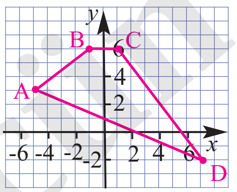






33 Учитель вычисляя средний бал тестов 30-ти учеников ошибочно показал вместо 50-ти баллов одного ученика 350 и поэтому средний бал составил 70. Если устранить допущенную ошибку, то каким будет средний бал учеников?

34 Вычислите периметр многоугольника изображенного на координатной плоскости.



35 Вычислите.
a) $\dfrac{9^5 \cdot 2^9}{36^4}$ b) $\dfrac{4^{-3} \cdot 9^{-2}}{6^{-5}}$
c) $2^{\frac{7}{3}} \cdot 32^{\frac{5}{6}} : 8^{\frac{3}{2}}$

36 a) Найдите сумму и произведение корней уравнения $2x^2 - 3x - 1 = 0$
b) Сумма корней уравнения $x^2 + (1 - 2m)x + m - 3 = 0$ на 3 единицы больше их произведения. Найдите m и решите уравнение.

37 a) Если число 300 увеличить на 20%, а затем полученное число уменьшить на 20 %, то какое число получится?
b) Цену товара уменьшили на 10%, а потом новую цену увеличили на 10%. Как изменилась цена товара?

Обобщающие задания

38 1) В равнобедренном треугольнике длины двух сторон равны 8,4 и 3,2 м. Найдите периметр треугольника. Сколько решений имеет задача? 2) Какому целому числу может равняться длина третьей стороны треугольника если угол между сторонами равными 6 и 8 единиц : a) меньше 90° b) больше 90°

39 Решите уравнения:

a) $\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}=1$ b) $\frac{x+1}{x+3}=\frac{2}{x}$ c) $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$

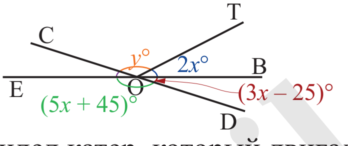
40 a) Какие измерения должен иметь прямоугольник с периметром 64 см, чтобы его площадь была наибольшей?

b) Какие измерения должен иметь прямоугольник с площадью 25 м^2, чтобы его периметр был наименьшим?

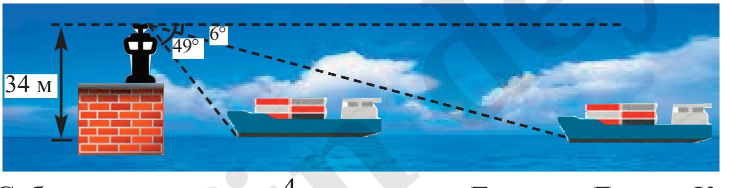
41 Какое наибольшее число букетов можно составить из 16-ти фиалок, 32-х ромашек, 24-х нарциссов? Сколько цветов каждого вида будет в одном букете в этом случае?

42 Если для разложения бактерий будут хорошие условия, то каждая из них за 20 минут делится на 2 новые бактерии. Сколько бактерий образуются из одной бактерии в этих условиях за 4 часа.

43 Найдите градусные меры углов, показанных на рисунке.



44 Наблюдатель со смотровой башни увидел катер, который двигался в направлении маяка под углом 6º. Через 5 минут катер наблюдался под углом 49º. Вычислите скорость катера (м/мин) если наблюдатель находился на высоте 34 метров от поверхности моря.



45 Деньги Сабины составляют $\frac{4}{5}$ части денег Гюляры. Деньги Канана составляют $\frac{7}{8}$ части денег Сабины. Если у Канана 28 манат, то сколько денег у Сабины и у Гюляр?

46 1) Найдите длину дуги окружности с радиусом равным 15 см, соответствующий центральному углу в 60°. Округлите до десятых.
2) Найдите радиус окружности если длина дуги в 60° равна:
a) 3π b) 5π c) 8π

47 Найдите вершины, точки пересечения с координатными осями и постройте параболы. Запишите квадратичные функции в виде $y=a(x-m)^2+n$.

a) $y=x^2+8x+1$ b) x^2+4x-2 c) $2x^2+4x+6$ d) $3x^2+12x+9$

48 Вычислите. a) $\dfrac{7{,}1^2 - 1{,}5^2 + 8{,}6 \cdot 2{,}4}{6{,}3^2 - 2{,}3^2}$ b) $\dfrac{2{,}1^3 - 0{,}9^3}{1{,}2} + 0{,}9 \cdot 2{,}1$

49 Освободите знаменатель от иррациональности.

a) $\dfrac{8}{3\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$ c) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{36}}$

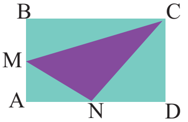
50 Площадь длиной 10 м, шириной 25 м должна быть залита бетоном толщиной 20 см. Грузовик за один рейс перевозит 12м^3 бетона. Сколько рейсов нужно сделать, чтобы забетонировать всю площадь?

51 Запишите числа в стандартном виде.

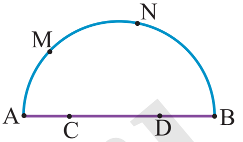
a) 3560 b) 0,000204 c) 21 020 000 d) $0{,}32 \cdot 10^7$ e) $3580 \cdot 10^9$

52 Если участники одного мероприятия сядут за столы по 5 человек, то трое останутся на ногах. Если сядут по 8 человек, то три стола останутся свободными. Сколько человек присутствуют на этом мероприятии.

53 В прямоугольнике ABCD, E и K средние точки сторон AB и CD . Если $S_{ABCD} = 64$ см^2, $S_{MNC} = ?$



54 Сколько треугольников можно построить с вершинами в отмеченных точках?



55 Даны точки A (1 ; 3) , B (– 2 ; 1) и C (4 ; 2). Выразите компонентами вектор $\overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{CA}$ и найдите модуль этого вектора.

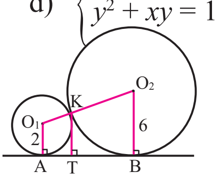
56 Оценки Лятифа по суммативным оцениваниям следующие: одна “2”, четыре “3”, три “4”, две “5”. По этим данным найдите среднюю арифметическую, моду и медиану.

57 Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел на 24 больше, суммы их квадратов. Найдите эти числа.

58 Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = \dfrac{1}{2} \\ 4y - x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{x-1}{y+2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x + 5xy + y = 4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}$

59 Две окружности радиусами 2 и 6 касаются извне в точке K. Найдите расстояние от точки K до общей касательной AB.



60 При параллельном переносе точка A (–2; 1) переходит в точку A' (–1; 3). При этом параллельном переносе: a) В какую точку переходит точка B'(–1; 1) b) Какая точка переходит в точку C'(–2; 1).

61 Самир один выполняет некоторую работу за 9 часов, а вместе с Надиром за 6 часов. За сколько часов выполнит эту работу Надир .

Обобщающие задания

62 Расположите числа в порядке возрастания. $a = \frac{71}{72}, b = \frac{72}{73}, c = \frac{75}{74}, d = \frac{76}{75}$

63 Первый автобус подъезжает к остановке через каждые 30 минут, второй через каждые 36 минут, третий через каждые 45 минут. Если все три автобуса с первой остановки выезжают в одно и то же время, то через какое время они опять встретятся на этой остановке.

64 Решите уравнения:

a) $4x = x^3$ b) $x^3 - x^2 - 2x = 0$ c) $x^3 + x^2 = 4x + 4$

d) $(5x + 1)^2 + 6(5x - 7) = 0$ e) $(x^2 + 2x + 4)^2 - 7(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$

65 Один из двух насосов заполняет бассейн за 15 часов, а другой за 10 часов. Третий насос опорожняет полный бассейн за 18 часов. За сколько часов заполнится бассейн, если все три насоса будут подключены одновременно.

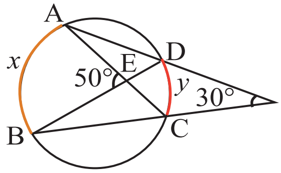
66 Сначала продали $\frac{1}{3}$ часть мешка сахара, потом $\frac{3}{5}$ часть оставшегося.

a) Какую часть всего сахара составляет проданный сахар?

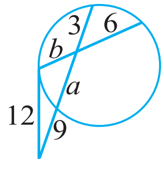
b) если всего было 45 кг сахара, то сколько сахара осталось в мешке.

67 По данным рисунка найдите переменные

a)



b)



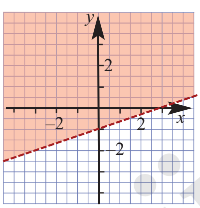
68 Установите соответствие (c_n - n-ый член последовательности, S_n сумма n-первых членов).

1. $S_n = n^2 + n$ A) $c_3 = 12$ B) $c_3 = 5$ C) $c_3 = 6$
2. $S_n = n^2$ D) геометрическая прогрессия E) $c_n = 2n - 1$
3. $S_n = 3(2^n - 1)$

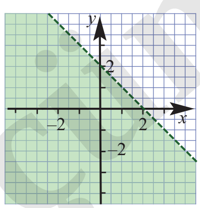
69 Если яблоки из корзины разложить на тарелки по четыре, по шесть, по восемь, то каждый раз 3 яблоки останутся лишними. Какое наименьшее число яблок было в корзине?

70 Напишите неравенства соответствующие каждому графику.

a)



b)



71 В какую точку N $(x; y)$ преобразуется точка A (3; 5) при гомотетии с центром в точке C (–1; 2) и с коэффициентом $к = 2$. Найдите длины отрезков CA и CN и сравните.

72 Напишите квадратичную функцию проходящую через точку (0; –3) с вершиной в точке (1; –5) в виде $y = a(x - m)^2 + n$ и постройте график.

73 Укажите коэффициент и степень одночлена $(2ab^2)^3 \cdot (3a^2b)^2$.

74 Из 60%-ти раствора соли массой 400 г вылили 25 % раствора и добавили такое же количестве воды. Найдите процентное содержание полученного раствора?

Обобщающие задания

75 Найдите сумму $a + b$, если $a, b \in$ N, $a : b = 2 : 5$, НОК$(a; b)$ – НОД $(a; b) = 45$

76 Градусные меры внешних углов треугольника относятся как 3 : 4 : 5. Найдите внутренние углы треугольника.

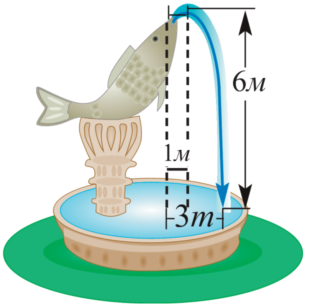
77 Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 20 км/ч, проплыла 18 км против течения и 11 км по течению потратив на весь путь полтора часа. Найдите скорость течения реки.

78 Решите неравенства методом интервалов.

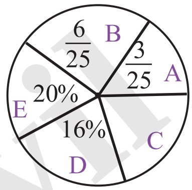
a) $x^2 + 3x - 18 \geq 0$ c) $3x^2 - 16x + 5 \leq 0$ e) $4x^2 < 25$

b) $-x^2 - 12x < 32$ d) $2x^2 - 4x - 5 > 0$ f) $0{,}5x^2 + 3x \leq -6$

79 Высоту фонтана можно смоделировать квадратичной функцией. На рисунке вершина струи высотой 6 м удалена от источника на 1 м и достигает поверхности бассейна на расстоянии 3 м от источника. Выразите зависимость высоты (H) от расстояния до источника (d) функцией $H(d)$.



80 На круговой диаграмме показано распределение правильных ответов из 125 вопросов на экзамене. В какой части наибольше правильных ответов? Сколько правильных ответов соответствует этой части.

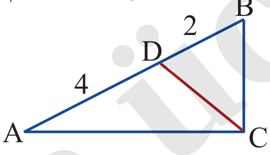


81 Определите координаты точек пересечения данных окружностей.

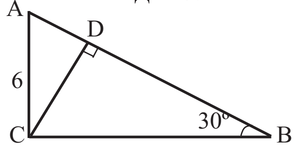
a) $x^2 + (y + 2)^2 = 13$ и $x^2 + (y - 3)^2 = 8$ | b) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ и $(x - 4)^2 + y^2 = 10$ | c) $x^2 + y^2 = 25$ и $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 25$

82 Расстояние между Баку и Гянджа 350 км. В каком масштабе нарисована карта, если на ней данное расстояние равно 7 см.

83 Дано: $\angle ACB = 90^\circ$, CD биссектриса, AD = 4 см, BD = 2 см.
Найдите: $S_{\Delta ABC}$



84 Дано: $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $\angle B = 30^\circ$, AC = 6.
Найдите: BD



85 Зерно со склада 6 грузовиков перевозят за 80 дней. За сколько дней перевезут это зерно 8 таких грузовиков?

86 При каком значении c система уравнений $\begin{cases} 4x + y = c \\ y = x^2 \end{cases}$ имеет единственное решение ?

Ответы

I Раздел

с. 8-11 №8 b) $\frac{8}{9}$. №13 d) –3 и $\frac{2}{3}$; f) 1 и $\sqrt{3}-1$. №14 a) 2. №23 2) $A\cap(B\cup C)$.

с.13-15 №1 a) точки B , C и D b) $m=-2$ №3 $V=64$ см³ a) 512 см³ b) 61 см³ увелич. №4 c) 2; e) 3; f) 4; g) 5. №10 a) $\sqrt[3]{1{,}2}<\sqrt[3]{7}<2<\sqrt[3]{9}$ №11 a) $x=2$; c) $x=3$ №14 1) $a=2^2\cdot 3=12$; 2) 96 см² №16 2-ой холодил. №21 $h\approx 37{,}2$ м №22 b) ≈340 г №24 b) ≈ 4,5 м.

с.16-21 №3 a) 2 и 3; b) 2 и 3; c) 1 и 2; d) 0 и 1; e) 1 и 2 №6 a) 2; c) 3; d) 2 №7 c) 48; e) 0; f) 2; h) –8 №9 a) $2x$; b) 0 №10 b) 0 №11 1 №14 d) ±2; e) –2 №19 a) 2; d) 40; e) 1 №20 a) 12 b) 6 №21 a) 1; c) 2; f) 6 №22 a) 4; c) 2 №25 a) x; b) a; h) xy №26 2м² №30 a) $\frac{y}{x}$, d) $|x|$ №31 a) a^2+4a+4; c) x^2-1 №32 a) $4\sqrt{2}$; b) $2\sqrt[3]{3}$ №33 a) $4x\sqrt{x}$; b) $3a\sqrt[3]{a^2}$ №34 h) $x\sqrt[4]{2y}$ $x\geq 0,\ y>0$ №35 a) $9\sqrt[5]{y}$ b) $x\sqrt[5]{2x^3}$ №36 a) $\sqrt[3]{54}$; d) $-\sqrt[4]{48}$ №37 d) $\sqrt[4]{2x},\ x>0$; e) $-\sqrt[4]{-3c^3},\ c<0$ №41 a) 3. №42 a) $\sqrt[4]{b}$ №43 a) 2 ; b) 4 ; c) $1{,}5\sqrt{3}$ №47 a) $3\sqrt[4]{3}$; c) $2\sqrt[5]{4}$ №48 a) 1 №49 b) $x=16,\ x>16,\ 0\leq x<16$

с.22-26 №3 a) 10; b) $\frac{1}{3}$; f) 10; h) 1 №4 b) 6 №9 d) a^3 №11 a) a; b) $m^{0,5}$; d) $c^{0,5}$ №12 b) 2 №13 a) 6 №14 b) $3x$ №17 b) $0{,}1a$; c) $10a$ №18 a) $x=a^2$; b) $x=a^{-3}$ №19 c) 3 №20 c) $x^{\frac{11}{24}}$ №21 c) $x^{0,5}$ №22 a) $2x$; b) $x-y$; c) $y-1$ №23 c) $c^{\frac{4}{3}}-1$ №24 a) $b^{0,5}(b^{0,5}+1)$; c) $(c-3^{0,5})(c+3^{0,5})$; g) $(x^{\frac{1}{3}}-3)(x^{\frac{1}{3}}+3)$ №25 a) $a^{0,5}+b^{0,5}$; d) $b^{\frac{1}{6}}$ №26 a) 5 №28 2) 5 час. №30 b) $h=12$ см №31 *объем параллелепипеда больше* №34 d) $b=\frac{a}{\sqrt[3]{A^2-1}}$

с.27 №1 a) 6; b) 1; c) –1; e) 1 №3 a) $4\sqrt[3]{9}$ №4 b) ≈ 1,9 m №5 a) 1 №6 d) $-\sqrt[4]{3a^4}$; e) $\sqrt[4]{2c^3}$; f) $-\sqrt[4]{-2c^3}$ №7 b) $\sqrt[5]{b}$; c) $\sqrt[6]{a}$ №10 a) ±2; c) –1 №11 $2a^3$ №12 $\frac{2}{a}$ №13 a) $x\geq 3$; b) $x\in R$; c) $x\leq 2$; d) $x\leq 0$

с.29-30 №4 d) ≈ 4,18 мм №5 a) 2,37 см №6 ≈ 62,8 см №9 a) 150º, 90º, 120º

с.31-34 №3 a) 4 b) 93º №5 a) 16; b) 30 №7 25 №9 b) 48; 26 №10 a) 10 b) 3 №11 21 №13 I вар.-1см, II вар.-7см №14 144 м №15 a) 12 см; b) 10 см; c) 48 см.

с.35-36 №1 40º, 180º, 210º. №2 95º,60º,120º. №5 1) 63º; 2) 110º; 3) 36º, 30º

с.37-39 №4 b) 8; c) 9; d) 15. №6 c) 3,9 м; d) 36º №8 b) 2; d) 12 №9 a) AD=14 см, AB=16 см, DC = 17 см, BC =19 см, P = 66 см №11 a) $15\sqrt{3}$; b) 36 №12 $9\sqrt{7}$ см

s.40-42 №5 a) 19º; b) 17º №6 d) 14º; e) 26º №7 a) 30º b) 44º №9 40º №10 1) b) 58º,122º №11 c) 55º

s.43-44 №4 a) 2; b) 25; c) 2 №5 6,5 м №6 5,8 км №7 a) 2; e) 8 №9 b) $c=5,\ d=6$; c) $x=11$

s.45-46 №1 30º №2 50º №5 b) 8 №7 89º ; 41º №8 e) 154º ; 76º №10 a) ≈13,4 км; b) ≈ 67 ман

II Раздел

с.49-55 №2 b) 9 №3 a) –1; 2 №7 1) $a=\frac{1}{4}$ №16 b) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+2$, $y=2(x-3)^2+2$ №20 a) $x=5$ №21 c) $y=-4(x-2)^2+5$; d) $y=\frac{1}{5}(x+3)^2-10$ №23 a) $y=-(x-2)^2-1$;

с.56-57 №1 1) a) 2; b) 1; c) 2; №2 a) 1) *вверх;* 2) $m=15,\ n=-100$; 3) $x=15$; 4) 2; b) 1) *вниз*; 2) $m=0,\ n=14$; 3) $x=0$; 4) 2; c) 1) *вверх*; 2) $m=-18,\ n=-8$; 3) $x=-18$; 4) 2; №3 a) $f(x)=(x-8)(x+3)$; $g(x)=(x-1)^2$; $p(x)=4(x-2)(x-3)$ b) $f(x)$: (8; 0),(–3; 0), (0; –24); $g(x)$: (1; 0), (0; 1); $p(x)$: (2; 0), (3; 0), (0; 24) №4 a) $y=(x-10)(x-4)$ №6 a) 2; $x=2$; c) $2\sqrt{3}$; $x=2$; d) 4; $x=1$ №7 a) $m=1,\ n=-8$; b) $m=-2{,}5$ $n=-\frac{1}{6}$; c) $m=-1,\ n=4$

с.58-61 №2 1) a) (3; 0), (–1; 0); b) (0; –3); c) (1; –4); d) $y=(x-1)^2-4$ 3) a) (–1; 0), (–5; 0); b) (0; 5); c) (–3; –4); d) $y=(x+3)^2-4$. №6 a) пересекает ось абсцисс (2; 0); (6; 0), ось ординат (0; 12). Вершина (4; –4). НМЗ = – 4. Область опрд. (–∞; +∞), область значений [–4; +∞]. №7 a) НМЗ = 8; b) НБЗ = 4; h) НБЗ = 0,5 №9 $y=-\frac{1}{20}(x-5)^2+20$ №10 d) (1; 14); f) (2; 48). №15 a) b = –2, c = –3; b) b = –4, c = 3; c) b = –4, c = 4;

Ответы

с.64-65 №1c) S = $12x - x^2$; d) при x = 6 см S_{max} = 36 см² №2 a) *подорожания по 50 гяп. пять раз;* b) 1125 манат №4 a) t_1 = 1 сек, t_2 = 3 сек;
b) t = 2 сек, h_{max} = 21м c) ≈ 4,04 сек №5 3-*ий день; 290 билет.* №6 20 м.
№7 1) $y = 2{,}24 - \frac{8}{7}x^2$ (x и y в метрах) 2) a) 1,68 м №8 1) $y = \frac{1}{40}x^2$

с.67-68 №4a)$y = 2|x|$; b)$y = 1 - |x - 3|$; c) $y = 0{,}5|x + 2|$ №6b) на10-й неделе, 4000 *альбом*

с.69 №1 $b = -3$; $c = 2$ №2 (5; 0), (–3; 0), (0; –15) №3 $y = (x + 3)^2 - 2$ №4 $k = 10$
№5 [2; +∞) №7 $y = x^2 - x - 2$ №8 20 м №12 $a = 4$, $b = -6$ *или* $a = -4$, $b = 6$

с.70-73 №3 a) 1) 10; 2) 5; 3) 13 b) RQ = $\sqrt{68}$, PT = 5 №4 a) P = 18; b) P = $4\sqrt{17}$ №5 5
№7 (–2; –2) №8 5 №9 1) a) x=10, y=10; b) $2\sqrt{13}$ №11 $k = -1$; $k = -7$, *две точки*
№12 (6; 0) №13 a) $y = 2x + 4$ və $y = 2x - 1$; c)$\sqrt{5}$ №15 15 м №16 a) P = 12
№17 10 км №20 a) *равнобедренный*; b) *разносторонней.*

с.74-81 №1 b) $x^2 + y^2 = 12$; c) $x^2 + y^2 = 15$ №2 b) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 1$; f) $(x+5)^2 + (y-9)^2 = 20$
№3 a) ±12; b) ±13 №4 b)M(1; 2), r =4 №5 b)M(–8; –20), r = 22; d)M(2; –1), r = 1
f) M(1; –3), r = 5 №7 a)$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 17$, (–1; 2), (–1; 4) №9 a)$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 49$
b) (10; –2), (–4; –2) №12 b) $y = -\frac{4}{5}x - \frac{41}{5}$ №15 10 №16 5 №17 a) *касательная*;
d) *секущая* №18 $(x-12)^2 + y^2 = 64$ №21 a)10; b)7 №27 c)135° №29 a)$9\sqrt{3}$

с.82-83 №1 a) ≈ 39,25 см² b) ≈ 37,68 см² №2 a) ≈ 1,14 м² №3 b) ≈ 8,87 №4 $9\sqrt{3} - 1{,}5\pi$ ≈
≈ 10,86 см² №8 ≈0,61 м² a) №10 a) 12,5(π – 1); b) 6,25π – 12 №11 8π – 16

с.84 №3 a) (4; 3); c) 5π; d) $y = -\frac{4}{3}x$ №4 (–6; 0), (2; 0) №6 12,5 π №7 $16\sqrt{3} - 8\pi$

III Раздел

с. 86-88 №1a)3; e) ±1 №2 b) 0;2 c) 0; ±2; e) 0; ±4; №3 1) 0; 4; –5, 3)–2; ± 0,5 10) ±3; 1,5
№4 a) *две дейст. числа;* b) *один дейст. корень*; c) *три корня* №5 c)±2
i) ±2; ±3 №6 –2;1;3; $a = -2$ №7 a)5; b)1; ±3 №8 10 *il* №9 a)± 3; d) ±2; ±1 f)1; 2
i) 4; –0,5 №10 a) ±1; ±2 b)3; ±1 c)±1; –2;–4; f)±1; g)1; 2; 3; 6 №11 b) 12; 4
№12 a)k = 2 b)k = –1 №13 a) 56; b) *при ср. бал* 52,5 *за 4 недели.*
№14 a)$r = \frac{A - P}{Pt}$; d) $v_0 = \frac{s}{t} - \frac{gt}{2}$ №15 b) ≈31,25 м.

с. 89-90 №1 a) ∅; b) –4; 3 g) ± 4; i) –2,5 №2 a) 3 c) ±4 f) ∅; j) 6; –1 №3 a) ∅; d) 0; f) –1
№4 b)$a = \frac{b}{3b + 2}$; f)$a = \frac{b(x + 1)}{x - 1}$ №5 *Рагим*-6час., *Cəmil*-3 час. №6 4 час., 12час.
№7 9000 №8 40 стр №9 15 ман, 17,25 ман №10 a)4 кг №12 20 игр №13 36; 37

с. 92-94 №1 b) ±4; g) ±3; i) –4; 3; n)l №5 g) –0,6; 3; l)1 №9 $|x - 110| = 15$ №12 $|x - 48| = 2{,}4$

с.95-101 №7 b) (2;2), (1;3); c) (4;2), d) (–1;3), (–3;1) №8 a) (3;9), (–1;1); b) (1;2), (–2;5);
e)(6;–1), (3;5) №12 a)b>6; b)b=–5 №13 $k = -2$ и $k = 10$ №14 b<0 №15 a)(–2;–4)
(4; 2) №16 2) $y = 4 - (x+3)^2$, $y = -x - 1$ №19 t_1 = 1 сек и t_2 = 3 сек №20 8м × 8м
№22 b) ≈14 сек №23 a) 7,5 №28 a)(1;–2),(–1;2) №29 d) одно реш.; e) нет реш.

с.102-103 №1 430 №2 0,8 ман; 1,1 ман №3 1000ман, 3000ман №4 2350ман, 3050ман
№5 6 *л*, 4 *л* №6 88 кг чист. щелк, 32 кг 85%-ый №9 60см² №10 20 мин., 30 мин.
№11 96 км/час, 64 км/час №12 56 сек

с.104-105 №11) (1; –4), (2; –1); 2) (3; 3), (–3; –3); 5) (1; –2), (–1; 2); 10) (0; –1), (–1; 0)
№3 c) 1; 2 e) 0; ±5 №4 4 км/час, 5 км/час №5 100 челов. №7 b) (–2; 5), (2; 1);
c) (3; 2) №9 6; 8; 10 №10 f) –1№11 4м/с, 3 м/с №14 a) a = 0; b) a = ±6

с.107-109 №7 1) a) 12; b) 54; 2) a)120°, 60°; b) 144°, 36° №9 1260° №10 144°; 36°; n = 10
№11 a) 127° №13 1) 6; 2) 12; 3) 9; 4) 18 №14 3) n = 10 4) n = 12

с.111-117№1 a) 30°; b) 7,5 №3 a) x = 90°, y = 60°; b) x = 90°, y = 50°; c) x = 32°, y = 90°
№4 96 см² №8 24 см №12 I вар-22 см; II-вар 20 см №14 a) 40;80 №15 d)130см²
№16 b)R=5,r = 2; №1810 см №19 R=8 см №20 2)12см №21 R=6см S=$27\sqrt{3}$см²

Ответы

№23 a) r= 4см, R=8,125 см; №25 a) $r_1 = 1$; $r_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ b) $r = \frac{\sqrt{3}}{6}$; $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{18}$ c) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$
№27 4,8 см №28 2,4π см №30 b) P=6R, d_b=2R, $d_k=\sqrt{3}R$

с.119-122 №2 a) $9\sqrt{3}$ №4 a) 48 см^2; b) 24 см^2 c) 20 см^2 №5 a)256; c)$864\sqrt{3}$ №6 c)$54\sqrt{3}$
№7 a) P = 42; $S = \frac{147\sqrt{3}}{2}$; c)P≈53,8; S=243 №8 b)$24\sqrt{3}$ м^2 №12 b)$3\sqrt{3}$ см
№16 b) 1) $x = 105^\circ$; 2) $x = 54^\circ$; 3) $x = 84^\circ$

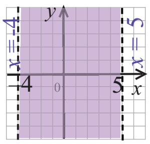
с. 123 №1 36 см №2 $72\sqrt{3}$ см^2 №3 126° №4 $\sqrt{5}$ №8 ≈ 226 м^2

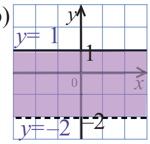
IV Раздел

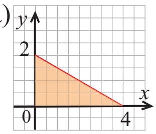
с.124-126 №2 a) [–4; 2); b)(1; 10) c) ∅ №3 a) [2; 4) b) (–∞; 4) №4 (4; 8) №5 a) (–4; 1)
c) (–10; 2) №6 a) (–1; 8); c) (–0,5; +∞) №7 a) [5; 7]; c) [–2; +∞) №8 36
№9 не меньше10,8 кг, не больше 32,4 кг №10 больше 3-х см ,
меньше 9 см. №11 a) (–∞; –3) ∪ (5; +∞); c)(1; +∞) №12 b)(-∞;1)∪(3; +∞)
d) [–3; 6] №13 a) (1; 3) b) (–∞; –1) ∪ (2; +∞) №14 15 №15 b) при $a < 10$

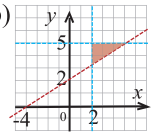
с.128-129 №1a)(–∞;–3,6]∪[2;+∞) b)[2;3]; c)(-6;0); h)(–∞;–2); i)(1,5;+∞); №3 $|x - 45| \le 30$
№4 $|x - 150| \le 20$ №5 a) –5; 3 b) (–5; 3) c)(-∞;-5)∪(3;+∞) №7b) голуб. c) зел.

с.131-132 №3 a) $2x + y \le 4$; b) $2x - y \ge 4$; c) $-2x - y < 4$ №5 $2x + 3y \ge 300$ №6 $5x + 8y \le 80$

с.133-136 №2 a)


b)


№12 a)


b)


№3 a) $y>5 - x$; $x \le 30$; b) $y<5 - x$; $y \le 4$ №4 a) $y \ge x + 1$; $y \le x + 3$ b) $y \le 4$; $y \ge 2$
c) $x \ge -2$; $y \le 2$ №6 $x + y \le 15$; $2x + y \ge 20$

с.139-144 №2 a) (-∞; 2)∪(5; +∞); b)(1; 3); c) (-∞;-3]∪[3; +∞) №3 a) (-∞; –10]∪[4; +∞)
d) [–2,5; –1]; e) (–1,5; 1) №5 a) (–∞; +∞); c)∅ №7 b) $x = 7$; c)∅; d) (–∞;+∞)
№8 a)(1; 8); b) (–∞; –5)∪(–1; +∞); d)[-6; 8]; i) $x \ne 2$ №10 a)$(-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$
b) (–∞;1)∪(2;+∞) №11 a)(-2,5; 2); b)(1; 7) №12 (-1; 6) №13 a)(–∞;–6]∪[3;+∞)
b) [1;5]; e) (-∞;–1)∪(5;+∞) №14 b) [–5; –1] c) (-∞;2,5]∪[3;+∞); e)(2,5; 4)
d) (–∞;–12)∪(2;+∞) №17 a) 5см; b) 4см, 5см №19 больше 7см, меньше 12 см
№21 c) > 58 лет №23 *на расс. от* 50 м до 480. №24 $t \in (1; 3)$
№26 a) *не сможет;* b)меньше 2м; c) ≈3,44м №30 *больше* 15 м, меньше 20 м

с.145-148 №1 a) (–∞; –3] ∪ [1; +∞); c) [–4; 7]; d) (–∞; –1) ∪ (5; +∞); h) [–5; 0] ∪ [3; +∞)
№2 c) [–4; –3] ∪ [3; 5]; f) [0; 2] ∪ {–5}; g) (0; 4)∪(4; 8); i) (–∞; 0]∪[2; +∞)
j){–4}∪[5; +∞) №3a)7; (–∞;5)∪(7;+∞); (5;7) №4 b)[2; 6] №5 a)(–∞;–3)∪(3;+∞)
№6 больше ≈28 см, *меньше* 28,6 см №8 a)(–7;3); b)(–∞;–8)∪(5;+∞)f)$[-5\frac{1}{3}; -2\frac{1}{2})$

с.149-150 №1 c) $x \ne 0,5$; g) ∅; h) (–∞;+∞) №2 d) (–2; –1) ∪ (1; 3); e) [–3; 0) ∪ [20; +∞)
f)[–1; 3)∪(3;+∞) h)(–∞;–3)∪(–2;2); i)(–∞;–4)∪[–2;5]; №9 b)(–2;–0,5)∪(1;+∞)
c) (–∞;–1,5)∪(–1;11) №13 9 və 11; 10 və 10. №16 $a \in (-3; 0)$ №18 $a \in [0; 4)$

с.152 №3 a) $\vec{f}, \vec{h}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{k}$; b) $\vec{b}, \vec{f}, \vec{h}$; c) $\vec{f}, \vec{h}$; d) $\vec{d}$

с.154,155 №1 5)⟨–8;–2⟩, $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{68}$ №4 a) $\overrightarrow{OP} = \langle 2;4 \rangle$; c) $\overrightarrow{QP} = \langle 2;-4 \rangle$ №7 $\overrightarrow{PQ} = \langle 3; 4 \rangle$ $|\overrightarrow{PQ}|=5$,
v = 50 km/saat №8 a)$\overrightarrow{OP} = \langle 3; 2 \rangle$, $\overrightarrow{RS} = \langle 3; 2 \rangle \Rightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RS}$ №10 a) –0,5

с.156,157 №3 $\vec{a} = \langle 5; 5 \rangle$ $|\vec{a}| \approx 7,2$ $\varphi = 45^\circ$. № 5 a) $\overrightarrow{PQ} = \langle -3; 2 \rangle$ $|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{13}$ $\varphi \approx 144^\circ$

с.159-164 №2 a) 220 N; b) 270 N №7 ≈143°, 5 км №13 a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{DB}$; d) $\overrightarrow{AD}$; f) $\overrightarrow{BC}$; i) $\overrightarrow{AD}$

Ответы

с.166 №4 a) $\langle 10\sqrt{2}; 10\sqrt{2}\rangle$; b) $\langle -300; 0\rangle$ №5 300 м №6 a) 40 сек; b) ≈ 89 м
s.167 №1 c) ≈81° №2 $F_{ü} \approx 159$ N, $F_{ş} \approx 103{,}5$ N №4 $\vec{w}=\langle -3\sqrt{3};3\rangle$ №5 $|\vec{u}| = 250$ (м), $\varphi \approx 67°$
с168,170 №1 $\overrightarrow{AC} = 2\vec{a}$; b) $\overrightarrow{KC} = -2\vec{b}$ №6 a)$\langle -8; 21\rangle$ c)$\langle 14; -1\rangle$ №7 10 №9 $k=\pm 6$
№10 2) $\overrightarrow{AX} = \vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\overrightarrow{BY} = \vec{b} - 0{,}5\vec{a}$ №13 C(0; 3)

V Раздел

с.173-175 №3 a) 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21. $a_5 = 15$, $a_n = 3n$, $n \in N$ №5 1) a)$b_4 = 33$; b)$b_5 = 51$; c) $b_7 = 99$; d) $b_{k+1} = 2k^2 + 4k + 3$, $k \in N$ 2) a)$c_n = 27$ $n=7$; b)$c_n = 35$ $n = 9$ №6a)$a_n = 20$ $n = 10$; d) $a_n = 0$ $n = 8$ №7 $a_n = 3n+1$ №10 1) $a_{n+1} = a_n + 2$ $a_1 = 1$, $n \in N$ и $a_n = 2n - 1$, $n \in N$; 2) $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 2$, $n \in N$ и $a_n = 2n$, $n \in N$.
№11a) 1; 5; 17; 53; 161 №12 $a_1 = 11$, $a_2 = 34$, $a_3 = 17$, $a_4 = 52$
с.177 №1 b) $a_{n+1} = a_n + 0{,}5$; $a_1 = 0{,}5$ d) $a_{n+1} = a_n + 0{,}3$; $a_1 = -1{,}6$ №2 a) $x_1 = 9$, $x_3 = 1$
с.178-180 №1 b) $a_n = 4n - 10$ и $a_{n+1} = a_n + 4$, $a_1 = -6$. №3 a) $a_1 = -40$, $a_8 = -19$
№4 11,2; 18,4; 25,6; 32,8 №6 a) $n \geq 15$, $x_n > 0$ №10 b) $a_6 = -23$, $d = -4$
№11 152; 208 №13 a)$d = 3$, $a_1 = 12$, $a_6 = 27$. №16 $a_4 = \sqrt{48}$ №20 a)1; 4; 7 и 7; 4; 1
c)12 член №23 13 член. №24 46000 манат №25 24 см² №27 $a_n = 4n - 1$
с.181,182 №1 b)1)$a_5 + a_9 = 6$; 2)$a_7 = 3$ №2 b) $x = 0$, $x = 2$. №5 8 см №6 10см №7 9 см;12 см 15см №9 1) a)–1; 2; 5. e)$\frac{1}{2}$; $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{3}$. №10 $a_2 + a_8 = 2a_5 = 2c$
с.184-186 №1 c) 92 №2 a)195; b)$n^2 - 2n$ №5 a) $\frac{n(n+1)}{2}$; b) $n(n+1)$; c) n^2 №6 c)1683
№7 122,5 №9 a) 8 b)78 №12 a) 19 №13 0,25 №14 a) $a_1 = 1$; $a_2 = 9$ c) 5-й член
с.188 №3 a) $y_1 = 2$, $y_4 = 0{,}25$. №4 a) 10; 3; 0,9; 0,27; 0,081 №7 1)$q = \frac{1}{3}$; 3) $q = 0{,}5$
с.190-191 №1c) $b_4 = 12$, $b_5 = -24$ №4 a) $n = 5$ b) $n = 6$ №5 2)$b_{n+1} = 3b_n$, $b_1 = 4$ №7 $P_6 = 1{,}5$ см
№8 3см² №12 72,9% №13c) увеличится 4 раза №14a)$b_n = 2^{11-n}$ b) $n = 11$.
с.192 №2 $x = 5$, $x = -15$ №3 $x = 4$ №4 $q = 2$ №5 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ №6 b) да
с.194-195 №1 a)31; c)3069 №3 a)$b_1 = 3$ №5 a) $\frac{y^n - 1}{y - 1}$, $(y \neq 1)$ №7 2^{72} №10 a)$n^3 + 1$ №13 1364
с.197 №1 a) $S = 27$ №3 e)$q = \frac{1}{3}$ №4 a)$\frac{1}{1-a}$; b) $\frac{1}{1+a^2}$ c) $\frac{1}{1-a^2}$ d) $\frac{1}{1+a^3}$ №6 72 см²
с.198-199 №2 $S_3 = 248$, $b_1 = 8$, $b_4 = 1000$ №6 84 №7 $S_4 = S_9 = 54$ №10 462 лот или 5913,6 г
№11 30,6 №12 $a_1 = 5$, $d = 4$ №15 $a = 3$, $b = 6$ или $a = 27$, $b = 18$ №20 a) $\frac{3}{4}$
с.201-205 №7 a)F(–4;1)→F′(–1;–1); A(–2;5)→A′(1;3), S(–1; 4)→S′(2;2),N(–1;2)→N′(2;0)
№8 a) $\vec{u}\langle 5; 8\rangle$, d)$\vec{u}\langle -4; -5\rangle$ №10 1) $\langle 5; 3\rangle$ 2) A′(2; 1) №14 c) C(2,5; 0)
с. 206 №2 a) $u = \langle -4; 2\rangle$ №5 c)A′(–4; –1), B′(1; –1), C′(–4;–7)

VI Раздел

с.219-221 №2 720 №3 96 №4 d) 2 №5 24 №7 5! №8 6! · 5! №9 a)3! · 5! b) 5! · 3! c)8! №10 a)6, b)12, c)1260, d)6720 №11 10 №12 a)6 элемент, кажд 3 элемента повтор по 2 раза.; №13 30 №14 10 №15 a) 30 b)15 №17 a)720 №18 a)$_8P_2 < {}_6P_3$
№19 b) 4 №20 120 №21 360 №22 380 №23 60 №24 120; 100
с.222-223 №2 a) 4; d) 20 №4 a) 220 №5 $_nP_r > {}_nC_r$ №8 a) *комбинезон;* b)*пермутация;*
№10 6! №11 1260 №13 56 №14 60 №15 2^{10} №16 74 №18 b) 2! · 4! · 4!; c) 8!
с. 224-227 №4 a)9900 №5 24, $P = \frac{1}{4}$ №6 $\frac{20}{21}$ №8 $P = \frac{1}{28}$ №9 a) $\frac{1}{42}$ №10 a) 56; b)10; c) $\frac{5}{28}$
№11 $\frac{2}{5}$ №12 a)P=$\frac{2}{7}$; b)$\frac{1}{7}$; c)$\frac{4}{7}$ №13 $\frac{10}{39}$ №14 $\frac{1}{8}$ №16 a)$\frac{2}{3}$; b) $\frac{2}{9}$
№18 a)$\frac{2}{3}$; b)$\frac{1}{3}$; c)$\frac{1}{6}$ №19 $\frac{10}{33}$ №21 $\frac{1}{120}$ №22 $\frac{1}{20}$
с. 228 №4 a) $\frac{1}{22}$ b)$\frac{21}{22}$ №5 a)10; 0,9 №6 a) 364; b) $\frac{2}{13}$ №7 a) 36; b) 72 №8 c) 6
с.229-236 №24 28 см, 24 см² №31 4 №33 60 №37 *уменьш на* 1% №54 16 №65 9 *час*
№69 27 №74 45% №79 a) $H(d) = 6 - 1{,}5(d-1)^2$ №81 c)(5;0), (4;3) №83 7,2 см²

RİYAZİYYAT 9

Ümumtəhsil məktəblərinin 9-cu sinfi üçün
«Riyaziyyat» fənni üzrə dərslik
Rus dilində

Tərtibçi heyət:

Müəlliflər: **Nayma Mustafa qızı Qəhrəmanova**
Məhəmməd Ağahəsən oğlu Kərimov
İlham Heydər oğlu Hüseynov

Tərcüməçilər: **Güllü Həsənova**
Əlixan Qarayev

Məsləhətçi: **Çingiz Qacar**
Azərbaycan Milli Elmlər
Akademiyasının həqiqi üzvü,
fizika-riyaziyyat elmləri doktoru

İxtisas redaktoru: **İlham Hüseynov**
fizika-riyaziyyat elmləri üzrə fəlsəfə doktoru

Kompüter tərtibatı: **Rəşad Musayev**
Bədii tərtibatı: **Leyla Bəşirova**
Korrektoru: **Qafur Zamanov**

Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin
03.06.2016-cı il tarixli 369 №-li
əmri ilə təsdiq edilmişdir.

Kağız formatı: 70×100 1/16.
Fiziki çap vərəqi 15,0.
Səhifə sayı 240.
Tiraj: 8000. Pulsuz.
"Radius" MMC-nin mətbəəsində çap olunmuşdur.